考試科目	線性代數	所別	應數所	考試時間	5月25日 上午第一節 星期六

一、設在線性系統 $Ax=b$ 中，$n\times n$ 係數矩陣 A 和 $n\times 1$ 常數向量 b 內的元素均為整數且 $|A|=1$. 證明解向量 x 中的元素也均是整數.（6%）

二、設 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 的實數元矩陣，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是其特徵值.

6% 證明：(1) $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

6% (2) $\forall j=1,2,\cdots,n$; $\lambda_j = a_{jj}+\sum_{i\neq j}(a_{ii}-\lambda_i)$.

三、設 A 是 $n\times n$ 的實數元對稱矩陣.

6% 證明：(1) A 的特徵值均為實數.

6% (2) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是 A 的特徵值，v_1, v_2 是對應的特徵向量 $\Rightarrow v_1\perp v_2$.

四、設 $T: V\longrightarrow W$ 是從向量空間 V 到向量空間 W 的線性變換且 $\dim V=n$.（14%）
證明：$n=\text{nullity}(T)+\text{rank}(T)$.

五、設

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $A_{11}: p\times p$, $A_{12}: p\times q$, $A_{21}: q\times p$, $A_{22}: q\times q$ 且 $\text{rank}(A_{11})=$

備考	試題隨卷繳交

考試科目	線性代數	所別	應數所	考試時間	5 月 25 日上午第一節 星期六

$\text{rank}(A) = p$.

10% 証明：(1) $A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

10% (2) $|A| = |A_{11}| \, |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$.

六. 設 V 是實內積空間 (real inner product space)，S 是 V 的子空間且 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是 S 的單範正交基底 (orthonormal basis). 又設 $x_0 \in V$ 且 $p = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$，其中 $c_i = \langle x_0, u_i \rangle$.

6% 証明：(1) $p - x_0 \in S^{\perp}$.

8% (2) $\exists\, y_0 \in S$ 滿足 $\forall y \in S$, $y \neq y_0$ 恒有 $\|y - x_0\| > \|y_0 - x_0\|$.

七. 設 A 是 $n \times n$ 的實數元對稱矩陣，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是其單範正交特徵向量 (orthonormal eigenvectors)，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是對應的特徵值.

6% 証明：(1) $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i c_i)^2$，其中 $x \in R^n$ 且 $c_i = u_i^T x$

8% (2) $\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$,

【定義】 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

8% 八. 設 A 是非奇異矩陣. 証明：$(\text{adj}\, A)^{-1} = \text{adj}\, A^{-1}$

備考	試題隨卷繳交

考試科目	分析概論	所別	應用數學系	考試時間	5月25日上下午第2節 星期六

1. For $0 < x < \infty$, we define the Gamma function by

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

(a) (10%) Show that the integral converges for $0 < x < \infty$ and that $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ holds for $0 < x < \infty$.
(b) (10%) Show that $\log \Gamma(x)$ is convex on $(0, \infty)$.

2. Given the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} x^n, \alpha > 0$$

(a) (5%) Find the interval of convergence of this series.
(b) (15%) Let $f(x)$ be the sum of this series in the interval of convergence. What is $f(x)$?
(Hint : $(1-x)f'(x) - \alpha f(x) = 0$.)

3. Let $\mathbf{X} = \{f \mid f : [0,1] \to R \text{ is continous}\}$. For $f, g \in \mathbf{X}$, define

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

(a) (10%) Show that $\mathbf{X}$ is complete with respect to the metric d.
(b) (10%) Prove or disprove :
$\mathbf{A} = \{f \in \mathbf{X} \mid f(x) > 0 \text{ for all } x \in [0,1]\}$ is open in $\mathbf{X}$.

4. Consider the system of equations

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

(a) (10%) Is it possible to solve for $u(x,y), v(x,y)$ near $x = 2, y = -1$ such that $u(2,-1) = 2, v(2,-1) = 1$?
(b) (10%) Compute $\frac{\partial v}{\partial y}(2,-1)$.

5. Let f be continuous on $[a,b]$.
(a) (10%) Show that

$$2! \int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(y)dy\right)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$

(b) (10%) Show that for any integer $n \geq 1$,

$$n! \int_a^b f(x_1) \int_{x_1}^b f(x_2) \cdots \int_{x_{n-1}}^b f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1 = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^n.$$

備考	試題隨卷繳交