國立政治大學財政學系研究所

碩士學位論文

Department (Graduate Institute) of Public Finance,

National Chengchi University

Master Thesis

指導教授：林忠正　博士

Advisor: Chung-Cheng Lin, Ph. D.

序數邊際效用理論：對於不確定性的分析

Analysis of Uncertainty in the Ordinal Marginal Utility Theory

研究生：賴　璽　撰

Lai, Xi

中華民國一〇八年七月

July, 2019

DOI:10.6814/NCCU201900637

摘要

本文採用林忠正（2015e）提出的序數邊際效用分析法，探討人們面對不確定性的決策，並將分析結果與期望值理論、預期效用理論及展望理論等進行比較。結果顯示，序數邊際效用理論能通過Kahneman《快思慢想》（*Thinking, Fast and Slow*）一書中三個不確定性問題（尋求或規避風險、參考點的不同及損失厭惡）的檢驗。從針對不確定性問題所建立的新理論模型及三個問題的分析結果，可得出以下結論：（a）序數邊際效用理論能擁有更多的經濟意涵；（b）對於不確定性的各種可能決策，序數邊際效用理論都能加以解釋，而非預測單一結果。發現序數邊際效用理論有潛力能成為分析不確定性的一套可行方法，本研究結果可作為進一步應用序數邊際效用理論探討不確定性的指南。

關鍵字：序數邊際效用分析法、不確定性、展望理論

DOI:10.6814/NCCU201900637

Abstract

This paper used the ordinal marginal utility theory brought up by Chung-Cheng Lin (2015e) to discuss the decision-making in the face of uncertainty, and compares the analysis results with expected value theory, expected utility theory and prospect theory. The results show that the ordinal marginal utility theory can pass the test of three uncertainty problems (seeking or avoiding risks, differences in reference points, and loss aversion) in "*Thinking, Fast and Slow*" by Kahneman . From the new theoretical model established for the uncertainty problem and the analysis results of the three questions, the following conclusions can be drawn: (a) the ordinal marginal utility theory has more economic implications, and (b) for uncertainty the various possible decisions, the ordinal marginal utility theory can explain, rather than predict a single result. The discovery of the ordinal marginal utility theory may be a feasible method for analyzing uncertainty. The results of this study can be used as a guide to the application of ordinal marginal utility theory to explore uncertainty.

***Key Words*: The Ordinal Marginal Utility Theory, Uncertainty, Prospect Theory**

DOI:10.6814/NCCU201900637

目　次

DOI:10.6814/NCCU201900637

表次

DOI:10.6814/NCCU201900637

圖次

DOI:10.6814/NCCU201900637

第一章　緒論

第一節　研究動機

近年經濟個體面對不確定性（uncertainty）時的決策行為是一個備受關注的議題，在諸多決策理論當中，期望值理論（Expected Value Theory）、預期效用理論（Expected Utility Theory）及展望理論（Prospect Theory）等最廣為人知，隨著決策理論的演進，也更能解釋個人的決策行為。但上述理論皆建立在總效用的觀點上，而總效用理論其隱含的種種問題及缺陷卻仍舊無法解決。效用理論為個體經濟理論之基礎，於經濟思想史上，有三種主要理論，分別為古典可衡量的效用理論（Classical View of Measurement Utility Theory）、序數總效用理論（The Ordinal Utility Theory）以及基數總效用理論（The Cardinal Utility Theory）。

古典可衡量的效用理論由 Marshall 集其大成，從邊際需求價格的角度出發，包含了邊際效用遞減的概念，並假設存在一個標準的效用衡量單位，但爾後逐漸被序數總效用理論取代。序數總效用理論解決了效用可衡量的問題，只有總效用數值的相對大小有意義，而邊際效用數值的大小沒有意義。但也因此，兩個邊際效用數值間差值的正負號沒有意義，因此產生了無法容納邊際效用遞減以及採用交叉邊際效用項的正負號來定義替代品及互補品概念的嚴重缺陷。基數總效用理論雖解決了上述缺陷，但其主張消費者有能力對不同的商品組合進行偏好排序，同時能對不同商品組合的移轉進行偏好排序，其假設過於強烈且在現實生活中幾乎不存在，且此時效用僅能進行正向線性轉換，又重回類似效用可衡量的舊路。進一步的討論，請參考 Lin, C.C. and S.S. Peng (forthcoming)和林忠正（2019）的專書。

為解決近代經濟學效用理論作為個體理論的明顯缺陷，林忠正在 2015 年提出一套新的個體選擇理論，名為序數邊際效用理論（The Ordinal Marginal Utility Theory），並發展出序數邊際效用學派。不同於序數總效用理論從極大化總效用的角度出發，並使用邊際替代率衡量消費選擇，序數邊際效用理論改以從邊際效用的角度發展。新理論認為

DOI:10.6814/NCCU201900637

每個消費者進行每一次選擇時，都是同時面對邊際利得以及邊際損失的取捨，邊際利得就是取得每一單位商品消費者所獲得的利益，邊際損失是所必需支付的代價對於消費者的損失。因此每一次消費者進行選擇都是在進行邊際思考，只考慮每一個邊際單位的取捨以及邊際效用，而非所擁有的全部物品及總效用的角度思考。由於新理論的分析架構下其模型無需使用總效用函數，因此可以完整保留商品邊際效用遞減的概念，而非如極大化總效用下必需加入基數效用的假設。

在過去，關於不確定性問題的討論多半是在極大化總效用的分析架構下，發展出決策理論以進行分析，以總效用的觀點來進行選擇的預測，欠缺更直觀且符合常識的思考方式來進行解讀。因此本文挑選幾個代表性的議題及悖論，嘗試使用新理論來解決不確定性的問題。

第二節　研究目標與論文結構

本文首先採用序數邊際效用理論，進行不確定性問題的討論。並分別採用期望值理論、預期效用理論、展望理論以及序數邊際效用理論的分析方式，來探討個人在面對不確定性的問題時，如何做出決策。

本文共分為五章，第一章為前言，第二章以文獻回顧的方式首先講解近代重要的決策理論及其相關的悖論，進一步說明近代效用理論的發展脈絡以及其與決策理論的關聯性，並說明新理論發展的背景及其所期望解決的問題。第三章使用序數邊際效用理論建構可分析不確定性問題的基礎模型，及其是否能解決舊理論所隱含的問題。第四章由 Kahneman（2011）《快思慢想》（*Thinking, Fast And Slow*）一書中提出的三個具代表性的情境：「尋求或規避風險」、「參考點的不同」、「損失厭惡」，以及聖彼得堡悖論（St. Petersburg Paradox）及阿萊悖論（Allais Paradox）等具代表性的議題來進行討論，從是否可以合理解釋個人決策行為的角度，分析現有各項決策理論及序數邊際效用理論之優劣。第五章為結論與建議。

DOI:10.6814/NCCU201900637

第二章　文獻回顧

本章介紹經濟理論發展史上，關於各種不確定性的決策理論中最為著名的三個決策理論：期望值理論、預期效用理論及展望理論。依時間先後順序說明上述主流理論產生的背景，及而後提出的悖論及被推翻的各種原因，並介紹近年較新的經濟理論——序數邊際效用理論。最後將新理論與先前各項決策理論比較，以推測本文後續是否得以提出更多不同的分析方式，並改進先前理論之缺陷。

第一節　經濟史上重要決策理論的演進

一、期望值理論（Expected Value Theory）

在面對不確定性的情況下，一個理性的決策者，為了使自身的利益最大或虧損最小，會將各種狀況發生的客觀或主觀機率，及每一種行動下所能得到的利潤或虧損，配合適當的準則合理推算，並以推算出來的結果來進行決策。為了瞭解人們在面對包含不確定性的問題時，如何做出決策。首先討論大家最熟悉、最能直觀了解的期望值理論。

期望值理論的概念，起源於 17 世紀 Blaise Pascal 和 Pierre de Fermat [1]，認為理性的個人會利用計算期望值的方法，得出預期的利潤來衡量賭局的價值，進而選擇能得到最大期望值的賭局（Machina，1987）。

以期望值理論進行決策時，必須考量各個情況發生的機率，並且配合各個情況下的獲利或損失計算出期望值，並以期望值做為我們對於賭局預估的報酬進行決策。我們假設一場賭局有 k 個結果，每個結果發生的機率為$p_1,p,\dots,p_k$，各個結果可能的獲利或損失分別為$x_1,x_2,\dots,x_k$，且$\sum_{n=1}^{k} p_n = 1$。則此賭局之期望值$E(x)$可表示為：

$$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_{k-1}x_{k-1} + p_kx_k \qquad (2\text{-}1)$$

[1] 傳言西元 1654 年法國有兩位實力的相當的棋手，各出資 32 法郎進行賭賽，不料比賽因故被迫中止。兩位棋手為解決將賭金發還的問題而爭執不下，Blaise Pascal 和 Pierre de Fermat 兩位數學家，藉由書信進行討論，認為發還賭金的多寡，應與最後獲勝的機率的比率相同。

DOI:10.6814/NCCU201900637

期望值理論簡單且容易理解，但在現實世界中，我們很容易可以找出反例來加以反駁。例如只關注高額的頭獎彩金而購買樂透彩，卻忽略乘以較小的中獎機率後並考量其購買成本，購買彩券的期望值為負數，但還是有無數不理性的玩家受到高額獎金吸引而做出購買樂透彩的決定。

在許多反例中最著名的例子，便是 18 世紀數學家 Daniel Bernoulli 的堂兄 Nicolas Bernoulli 提出的聖彼得堡悖論：投擲一枚公平的硬幣，若擲出人頭便停止，擲出字的話便可繼續投擲下去，直到出現人頭為止。並依據你於第幾次擲出人頭來決定你可獲得的獎金，如果第一次便擲出可獲得 1 元，第二次擲出可獲得 2 元，第三次擲出可獲得$2 \times 2 = 4$元，若於第 N 次擲出人頭便可獲得2^{N-1}元。而你願意付出多少錢來參與這個遊戲？這個遊戲的期望值為：

$$E(x) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} \dots\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots\dots = \infty \quad (2\text{-}2)$$

如果以公平的觀點來看，賭客應該願意付出接近無限的財富來參與這個賭局。但實際上假如你付出 50 元參與這個賭局，你能贏得超過 50 元的情況的機率，也就是贏得 64 元、128 元、256 元……等所有情況機率的總和，僅有$\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{64}$。也就是付出 50 元參與賭局只有$\frac{1}{64}$的機率能夠贏錢，因此一般人並不願意為此賭局付出太大的金錢，和期望值理論願意付出接近無限財富的結論相違背。

針對這個問題，對此 Bernoulli（1738/1954）提出了一種解答，他提出效用的概念，並且提出隨著財富增加，邊際效用會遞減，效用函數為一個凹函數（圖 2-1）；以及人的決策並非是追求最大的期望值，而是為了追求最大的期望效用，來反駁以期望值進行決策的謬誤，這便是預期效用理論的重要起源。

DOI:10.6814/NCCU201900637

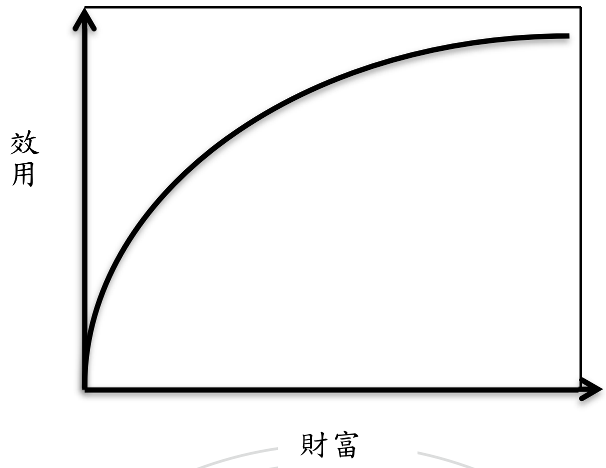

圖 2-1　效用函數圖

二、預期效用理論（Expected Utility Theory）

爾後 von Neumann and Morgenstern（1944）在 Bernoulli 效用的概念上，進一步精緻化預期效用理論的概念。利用公理[2]加以證明，運用一套嚴謹的準則推導出不確定情況下的效用函數，藉以分析決策者在風險情況下的經濟行為（楊秉訓，2013）。當情況為i時，令i情況下可獲得的財富為x_i，i情況下的機率為p_i，而一個典型的 von Neumann-Morgenstern 預期效用函數 U可表示如下：

$$U = \sum u(x_i)\, p_i \tag{2-3}$$

而決策者會以此為衡量方法，選擇能帶來最大預期效用的賭局，而非期望值最高的賭局。

預期效用理論成功取代了期望值的概念，成為近年經濟學探討不確定性問題的主流典範。在預期效用理論的基礎上，更衍生出了許多新的觀點，如 Savage（1954）的主觀預期效用理論（Subjective Expected Utility Theory）等。但和期望值理論相同的困境

[2] 主要有完整序列公理(complete-ordering axiom)、連續公理(continuity axiom)、不等機率公理(unequal-probability)、獨立公理(independence axiom)及複合公理(complexity axiom)等。

DOI:10.6814/NCCU201900637

是，在現實世界中我們一樣能找出大量的反例，來證明預期效用理論的缺陷之處，其中最著名的例子，就是下一段即將談論的阿萊悖論。

在預期效用理論提出不久，許多的經濟學及心理學家便發現了許多研究證據，足以證明此理論的預測與現實世界的真實狀況不一致。而要談論對預期效用理論的批評，首先要從 1953 年法國的 Maurice Allais 所提出的阿萊悖論中的一項實驗（Tversky，1975）說起。Allais 對 100 個受試者測試以下兩個問題：

問題一：A 跟 B 你會選那一個?

A：確定獲得 100 萬元。

B：10%的機率獲得 500 萬元，89%的機率獲得 100 萬元，1%的機率獲得 0 元。

在問題一中，雖然 A 選項的期望值（100 萬元）小於 B 選項的期望值（139 萬元），但實驗結果大多數人都選擇 A。根據預期效用理論，我們可以得到 B 選項預期效用值較小的結論，表示如下式：

$$1.00 \times U(100\text{ 萬}) > 0.1 \times U(500\text{ 萬}) + 0.89 \times U(100\text{ 萬}) + 0.01 \times U(0) \qquad (2\text{-}4)$$

Allais 接著對同樣一批人，測試第二個問題：

問題二：C 跟 D 選項你會選那一個?

C：11%的機率獲得 100 萬元，89%的機率獲得 0 元。

D：10%的機會獲得 500 萬，90%的機會獲得 0 元。

問題二的實驗結果，C 選項的期望值（11 萬元）小於 D 選項的期望值（50 萬元），大多數人都選擇 D。根據預期效用理論，我們可以得到 D 選項預期效用值應較大的結論，表示如下式：

$$0.89 \times U(0) + 0.11U \times (100\text{ 萬}) < 0.1U \times (500\text{ 萬}) + 0.9 \times U(0) \qquad (2\text{-}5)$$

而由（2-5）式可得：

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$1.00 \times U(100\text{ 萬}) < 0.1 \times U(500\text{ 萬}) + 0.89 \times U(100\text{ 萬}) + 0.01 \times U(0) \qquad (2\text{-}6)$$

有顯著的受試者在問題一中選擇 A，在問題二中選擇 D。由（2.4）式與（2.6）式可看出兩式互相矛盾，顯然違反了預期效用理論。

三、展望理論（Prospect Theory）

許多專家試著找出新的方法來解決阿萊悖論的困境，其中較為人知的便是由 Daniel Kahneman and Amos Tversky 於 1979 年提出的著名的展望理論（Prospect Theory）。展望理論的評價方式和機率的加權方式與預期效用理論不同，以下分別對於不同之處進行說明。

(一)引用參考點的評價方式

展望理論認為人會將相對於某個參考點(reference point)的利得與損失來評估結果，而非以最後的總財富來進行評估。其中參考點通常是個人目前的狀況，但也會受到個人自身預期的影響。例如當你預期你會得到 10 萬元的年終獎金，但最後實際只發放了 7 萬元，雖然從結果上來看總財富最後增加了 7 萬，但你還是會感受到失望，原因是低於你的預期。此時這 10 萬元便是你的參考點，低於 10 萬你便會感受到損失。

(二)價值函數v

和預期效用理論不同的是，展望理論引用了一個價值函數v（如圖 2-2）來解釋個人面對利得或損失的效用。由圖 2-2 可知價值函數v為一個嚴格遞增函數，在利得和損失的範圍皆為凹函數。從絕對值角度來看，不論是利得或損失皆有邊際遞減的現象，且在損失範圍內的函數曲線相對利得範圍陡峭，可知個人對於損失的反應較為敏感，也就是有損失厭惡（loss aversion）的特性。

DOI:10.6814/NCCU201900637

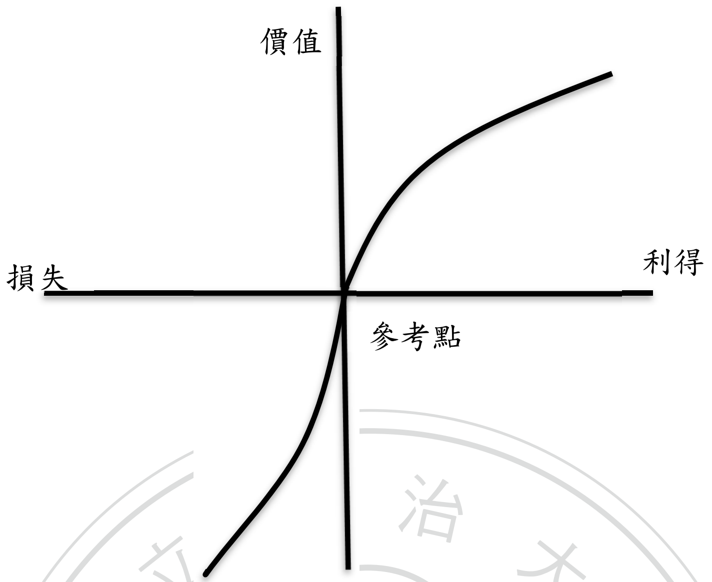

圖 2-2　價值函數v

資料來源：Kahneman and Tversky (1979)

(三)採用決策權數做為機率的加權方式

展望理論使用從主觀機率（subjective probabilities）概念衍生出的決策權數$\pi(p_i)$，取代預期效用理論中的客觀機率。決策權數π將各結果可能的機率p_i轉換為$\pi(p_i)$的函數，因此增強了展望理論解釋決策行為的能力。

此決策權數π的主要特性分為兩點，第一點是在低機率的時候，個人會有過度加權，也就是高估機率的現象；第二點則是在接近端點處，也就是p_i接近 0 或 1 時，會有突然的變化。p_i接近 0 時個體會誇大機率，p_i接近 1 時個體會忽略或誇大高機率與確定之間的差異。而決策權數π的特性可用來解釋數種現實生活中的個人行為，例如購買樂透或保險，都是因為個人過度加權低機率的結果所導致。

DOI:10.6814/NCCU201900637

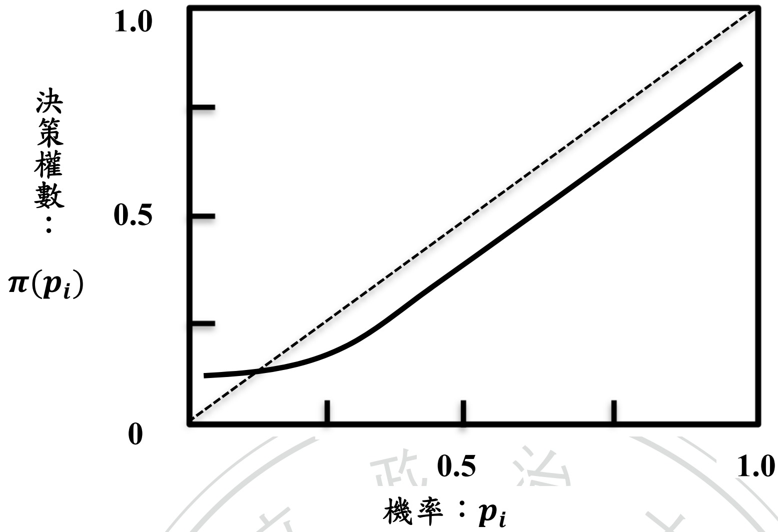

圖 2-3　假定的權數函數π

資料來源：Kahneman and Tversky (1979)

第二節　效用理論發展及新理論的誕生

先前提到的預期效用及展開理論，皆建立在基數總效用的概念上。因此本節回顧經濟史上效用理論的演進，並介紹一種可能的新理論—序數邊際效用理論，其誕生的背景及其核心概念和分析方式。

一、古典效用理論

古典效用理論的起源可追朔自 19 世紀的 Gossen 及邊際效用三傑 Jevons、 Menger 和 Walras 的理論開始，由 Marshall（1920）集其大成。邊際效用遞減法則為其主要的核心概念，且他們主張當價格變動時此商品占總支出的比例很小時，則貨幣的邊際效用可視為維持不變。Marshall 並提出邊際需求價格的概念，也就是以該單位商品邊際效用與貨幣邊際效用的比率和價格作比較，以做為消費者決定是否購買的依據。上述邊際效用三傑及 Marshall 的理論，均被認為是一種存在標準測量單位的古典的效用可衡量理論，

DOI:10.6814/NCCU201900637

而存在一個標準測量單位的概念備受爭議，因而逐漸被後續推出的序數總效用理論和基數總效用理論所取代（林忠正 2018a）。

二、序數總效用理論

Pareto（1909/1971）發展了序數總效用理論或無異曲線分析法，成為新效用理論的先趨。1910 年代，Johnson（1913）和 Slutsky（1915/1952）亦分別在一般化總函數的分析架構下，完成了 Pareto 序數效用概念下需求理論的重建工作。Allens 和 Hicks 於其 1934 年合著的〈價值理論的重建〉（The Reconsideration of the Theory of Value）以及 Hicks 於 1939 年出版的《價值與資本》（*Value and Capital*）中，批判 Marshall 的需求理論是建構在效用可衡量的基礎上，但效用明顯是不可測量的，並正式提出所得效果、替代效果和替代彈性等概念，建立了完整的消費者理論，發揚無異曲線分析法，完成序數效用的革命（關永強、張東剛，2014；林忠正，2015a，2015b，2015c，2015d）。

序數總效用理論認為，個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用排序，且總效用函數經過任何正向單調轉換（positive monotonic transformation）後，其新函數仍舊可以表示原來商品組合的偏好次序。但其總效用的二次微分項的正負無法維持恆定，也就是邊際效用的遞增、遞減或不變，在經過正向單調轉換後是有可能改變的。這導致必須拋棄邊際效用遞減法則這種簡單直觀的概念，並且不能夠簡單的採取總效用的交叉微分項的正負來定義互補品及替代品，而改為使用消費者對某商品的需求，受另一商品價格變動而改變的方向來定義。序數總效用理論雖然解決了效用可衡量的問題，但也產生了其它重大的問題（林忠正，2018b）。

三、基數總效用理論

由於序數邊際效用理論的幾項重大缺陷，而有了基數總效用理論的出現。和序數總效用理論相同的是，此理論主張個體有能力對不同選項組合進行排序，並且還主張個體能夠對不同選項組合的移轉進行排序，也就是能對「選項組合從 A 改到 B 之間效用的

DOI:10.6814/NCCU201900637

差值」及「選項組合從 C 改到 D 之間效用的差值」的大小進行排序。進一步表示人有能力對邊際效用進行排序，保留邊際效用遞減的概念。

預期效用理論及展望理論皆是在基數總效用理論的基礎上，添加其它額外的公設，所建構出的理論。然而在基數總效用理論中，只能對總效用函數進行正向線性轉換（positive linear transformation），此外 Samuelson（1938）認為建構基數總效用理論所添加的假設太過強烈，要在現實世界中滿足該條件的情況下，刻畫消費者偏好的機率近乎於零，並且以「近乎無限不可能」的強烈字眼來批評（林忠正，2015a，2015b，2018c）。

四、一套新的理論—序數邊際效用理論

在個體選擇理論上，目前主流的序數總效用理論及基數總效用理論各有其優點，但同樣的也包含了無法忽視的缺陷。序數總效用理論為了建構效用為不可衡量的觀點，而拋棄了邊際效用遞減的概念，且必需以複雜的方式來定義替代品與互補品。基數總效用理論為了找回邊際效用遞減的概念及總效用二次微分項的經濟涵意，又添加了額外的條件，類似走回了效用可衡量的舊路。

因此，林忠正於 2015 年提出了一套新的效用理論——序數邊際效用理論，修正了序數效用與基數總效用理論的重大假設，既個體有能力對不同選項組合的效用進行排序，改以消費者僅進行邊際的思考。消費者每次進行購買每一單位商品的選擇時，只考量每一單位商品的利得，也就是取得該商品對消費者的意義；以及所必需付出的損失，也就是購買該商品所必需支付的價格對消費者的意義。消費者僅需衡量是否值得以該單位價格購買該單位商品，考量得失之間偏好的高低即可做出選擇，並持續選擇至利得與損失相當為止。換言之以效用表示，也就是消費者會消費到支出第p元的邊際損失等於第x單位商品的邊際效用為止

在此新理論的架構下，保存了序數總效用理論效用不可衡量的良好特性，並避免了必需放棄邊際效用遞減的概念及無法以簡單的方式來定義替代品與互補品的缺陷。同時也保存基數效用中商品邊際效用遞減的概念，並且無需強烈且不符合現實的假設。

DOI:10.6814/NCCU201900637

第三章　序數邊際效用分析法探討面對不確定性的問題

在舊有的序數總效用分析法下，會有正向單調轉換後二次微分項正負號可能不一致，導致經濟意涵前後不一的問題。且在基數總效用昂貴的救援下，雖解決了舊有的問題，卻產生新的問題。本章採用林忠正提出的序數邊際效用分析法，試著建構更合宜來分析面對不確定性問題的基本模型。

本段落在序數邊際效用理論的架構下，依循林忠正（2017b）季節性商品的分析方式，使用彩券做為代表面對不確定性的商品，並且將彩券所有可能的結果（例如得到各個獎金的機率分配及獎金大小）綜合成彩券特性c，一般化分析在面對X彩券時，採用序數邊際效用分析法的思維方式，彩券特性c會如何影響購買的決策。並驗證函數在經過正向單調轉換後，是否能維持相同的經濟意涵。

第一節　序數邊際效用分析法如何進行決策

在本節首先會介紹序數邊際效用分析法其思維方式，並針對購買彩券的行為建立一個基礎的分析模型，最後說明有內部解的條件，及滿足條件下達成均衡時的圖解。

一、序數邊際效用分析法思維方式及其模型設定

消費者（或決策者）在彩券行裡，挑選想購買的彩券。當面對其中一種X彩券時，會思考是否以該彩券的價格購買，並且決定要購買幾張。消費者會考量花在該單位彩券上的支出的價格帶來的損失（邊際損失），是否大於得到該單位彩券的效益（邊際利得）。首先會先從購買第一單位開始思考，如果決定購買第一單位後，緊接著會思考是否購買第二單位……如此反覆直到支出價格的邊際損失大於或等於邊際利得為止。因此每一單位的選擇，消費者都是在該單位彩券帶來的效益（一得），及購買該單位彩券所必需付出的金錢所帶來的損失（一失）進行衡量與取捨。因此消費者僅需知道彩券帶來的效益（一得）及付出的金錢所帶來的損失（一失）間的相對大小即可，無需知道兩者之間效益的差距。

在前面的背景假設下，要分析的主要問題是：一位擁有財富或所得水準M元的消費者，面對單位價格是p元的X彩券，決定要購買x單位的X彩券與保留剩餘現金$m = M - px$。消費者面對的「邊際利得」為所購買的第x單位彩券的性質（例如各獎項金額的大

DOI:10.6814/NCCU201900637

小及機率）帶來的效益，而「邊際損失」是購買此一單位彩券所必須支出的單位價格p元的客觀物理性質或購買力。這兩個客觀的「邊際利得」與「邊際損失」，再透過消費者的主觀認知或價值判斷而形成對「主觀邊際利得」與「主觀邊際損失」的主觀（邊際）排序或邊際效用函數。消費者購買第x單位X彩券的「客觀的邊際利得」，所對應的「主觀的邊際利得」的（邊際）效用函數，表示如下：

$$g^x(x;c)\ ;\quad g_x^x < 0, \qquad g_c^x \gtreqless 0 \tag{3-1}$$

在（式 3-1）中，$g^x(x)$是第x單位X彩券的邊際效用，g_x^x是X彩券邊際效用的變化率。在此假設$g_x^x < 0$，即決策者所購買或消費的X彩券數量愈多彩券的邊際效用愈低。其次，彩券特性c有時會直接改變人們對該彩券的評價，可能使評價變高亦可能變低。透過修正基本模型來表達這種現象，將彩券特性水準高低放入人們消費彩券的邊際效用函數中，如$g^x(x;c)$。當 $g_c^x(x;c) = 0$時，彩券特性沒有改變人們對此彩券的評價（邊際效用）；當 $g_c^x(x;c) > 0$時，彩券特性會使人們對此彩券的評價（邊際效用）變高；當 $g_c^x(x;c) < 0$時，彩券特性會使人們對此彩券的評價（邊際效用）變低。

消費者購買第x單位彩券的邊際的「客觀的損失」(對應的那一邊際單位p元支出)，所對應的「主觀的邊際損失」的（邊際）損失函數，設定如下：

$$l^p(p;m)\ ;\ l_p^p > 0,\ l_m^p < 0 \tag{3-2}$$

（式 3-2）中， $l^p(p;m = M - px)$表示支出第x個p元且剩餘$m = M - px$現金時，所支出的那一單位價格的邊際損失。l_p^p是價格p提高對p元支出的邊際損失$l^p(p;m = M - px)$的影響，l_m^p是剩餘所得$m = M - px$增加對p元支出的邊際損失$l^p(p;m = M - px)$的影響。在本文中假設$l_p^p > 0$且$l_m^p < 0$。

$l_p^p > 0$表示彩券的單位價格愈高支出的邊際損失愈大，也就是當單位價格上漲時，消費者所感受到的支出邊際損失比較大，符合我們一般人付出的錢越多，感受到的損失越大的直觀感受。其次， $l_m^p < 0$表示剩餘所得$m = M - px$越多時，同樣p元支出的邊際損失$l^p(p;m = M - px)$越小，也就是剩餘所得$m = M - px$愈多，消費者對同樣p元支出的邊際損失$l^p(p;m = M - px)$越不在意。換言之當消費者保留的現金或所得愈多，消費者對同樣的價格支出所感到的「損失」越小。

DOI:10.6814/NCCU201900637

為方便分析起見，在本模型中簡化假設$g_m^x = 0$且$l_x^p = 0$，即保留現金的額度不會影響所購買的彩券的邊際利得，且所購買的彩券數量多少也不會影響支出現金數額的邊際損失。此外為簡化分析，假設$g_M^x = 0$且$l_M^p = 0$，即當前所得的高低不會直接影響彩券的邊際效用與支出的邊際損失的大小。

依據序數邊際效用理論的邊際摸索的決策方式，當消費者在購買某特定單位的X彩券下，若$g^x(x;c) > l^p(p;m = M - px)$則會購買此單位的$X$彩券並且會考慮繼續增加購買數量；若$g^x(x;c) < l^p(p;m = M - px)$則不會購買此單位，並且會考慮繼續減少購買數量。也就是消費者的最適購買數量（x^*）決定於：

$$g^x(x;c) = l^p(p;m = M - px) \quad (3\text{-}3)$$

等號右邊$g^x(x;c)$的X彩券邊際效用是「購買或消費第x單位X彩券所獲得的邊際效用」，等號左邊$l^p(p;m = M - px)$代表購買第x單位X彩券所付出邊際損失。

二、序數邊際效用理論內部解的安定條件

在序數邊際效用理論中內部解的安定條件為：

$$\frac{dg^x(x;c)}{dx} < \frac{dl^p(p;m)}{dx} \Leftrightarrow g_x^x < -pl_m^p \Leftrightarrow g_x^x + pl_m^p < 0 \quad (3\text{-}4)$$

（式 3-4）表示，在橫軸表示彩券的數量x且縱軸衡量彩券的邊際利得與價格支出的邊際損失的平面圖形中，p元價格支出的邊際損失$l^p(p;m = M - px)$曲線的斜率（$dl^p(p;m)/dx$）必須大於彩券邊際效用$g^x(x;c)$曲線的斜率（$dg^x(x;c)/dx$）。

在本文模型的設定中，由於我們假設彩券邊際效用遞減$g_x^x < 0$，因此彩券邊際效用曲線$g^x(x;c)$的斜率為負（$g_x^x < 0$）。另外，由於我們假設剩餘所得$m = M - px$愈多時同樣p元支出的邊際損失$l^p(p;m)$愈小$l_m^p < 0$，所以邊際損失曲線$l^p(p;m = M - px)$的斜率為正（$-pl_m^p > 0$）。$l^p(p;m = M - px)$曲線的斜率因此一定會大於$g^x(x;c)$曲線的斜率，在本模型中會存在內部解。

DOI:10.6814/NCCU201900637

三、消費者均衡的圖解

（圖 3-1）說明在新理論中，消費者均衡的決定過程，在（圖 3-1）的上圖中，橫軸表示彩券的數量x，縱軸衡量彩券邊際效用與所支出現金的邊際損失。其中，$g^x(x;c)$線表示彩券的邊際效用，$l^p(p;m=M-px)$線表示支出的邊際損失。彩券的邊際效用線$g^x(x;c)$的斜率是g_x^x，在彩券的邊際效用遞減$g_x^x(x;c)<0$的假設下，其斜率為負（$g_x^x<0$）。所支出現金的邊際損失線$l^p(p;m=M-px)$的斜率是$-pl_m^p$，在$l_m^p<0$消費者保留所得越高p元損失越小的假設下，其斜率為正（$-pl_m^p>0$）。為了簡化分析，彩券的邊際效用線$g^x(x;c)$及現金的邊際損失線$l^p(p;m=M-px)$都以直線作圖。在（圖 3-1）的下圖中，橫軸表示彩券數量多寡的x值，縱軸表示彩券單位價格的高低的p值。

接著說明在每單位彩券價格p元時，一位擁有財富或所得水準M元的消費者的購買行為。(圖 3-1）中，當消費者彩券需求數量為x^a時，消費者對第x^a單位彩券的偏好高於對彩券價格(支出)p元的偏好，即彩券的邊際效用$g^x(x^a;c)$高於支出的邊際損失(價格的效用) $l^p(p;m=M-px^a)$， $g^x(x;c)$直線的垂直高度大於$l^p(p;m=M-px)$直線的高度，所以消費者會購買與消費第x^a單位彩券，並且會考慮增加購買數量。

反之，當消費者彩券需求數量為x^b時，消費者對第x^b單位彩券的偏好低於對彩券價格（支出）p元的偏好，即彩券的邊際效用$g^x(x^b;c)$低於支出的邊際損失（價格的效用）$l^p(p;m=M-px^b)$，$g^x(x;c)$直線的垂直高度小於$l^p(p;m=M-px)$直線的高度，所以消費者不會購買與消費第x^b單位彩券，並且會考慮減少購買數量。

而當消費者彩券需求數量為x^*時，消費者對第x^*單位彩券的偏好等於對彩券價格（支出）p元的偏好，即彩券的邊際效用$g^x(x^*;c)$等於支出的邊際損失（價格的效用）$l^p(p;m=M-px^b)$，$g^x(x;s)$直線的垂直高度等於$l^p(p;m=M-px)$直線的高度，所以消費者買不買此x^*邊際單位彩券，對消費者來說沒有差異，消費者不再改變其購買數量。此時消費者達到均衡，均衡出現在上圖中兩線交點e^*上，此均衡點所對應的最適購買數量x^*，就是反映消費者的最適的彩券購買數量的均衡點E^*。

DOI:10.6814/NCCU201900637

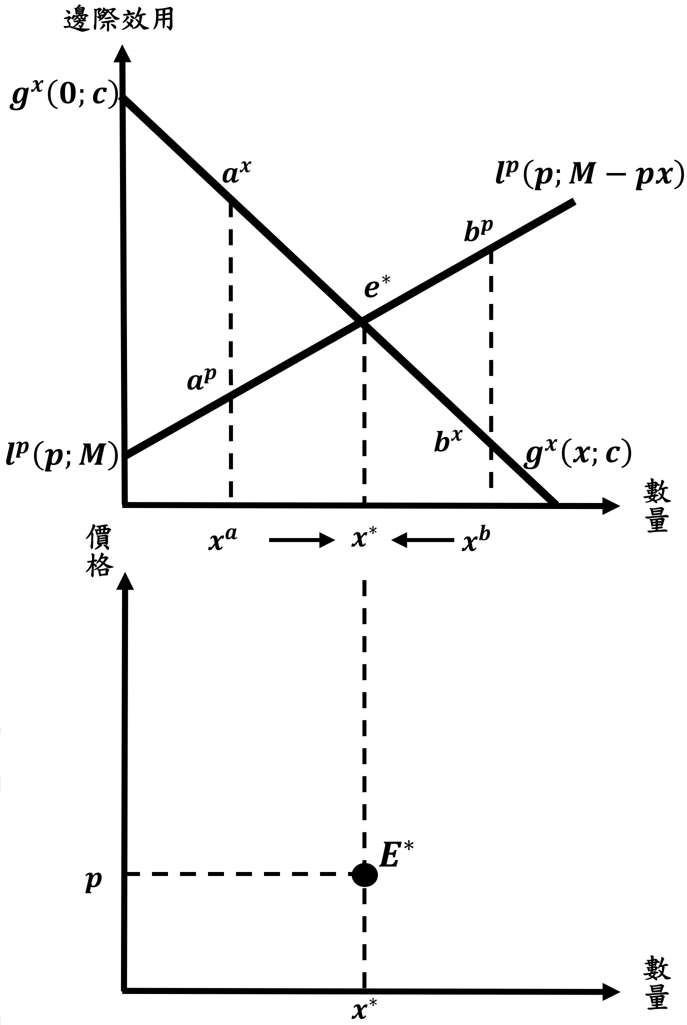

圖 3-1　消費者均衡

第二節　比較靜態分析結果—所得變動及價格變動效果

在本小節中，討論此新理論模型的比較靜態分析結果。首先針對所得變動效果及價格變動效果進行分析，並進一步說明負斜率的需求曲線及其圖解。

一、所得變動的效果

由（式 3-3）推導可得，所得變動對彩券購買數量的效果為：

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$x_M = \frac{l_m^p}{g_x^x + pl_m^p} > 0 \tag{3-5}$$

在本文的模型設定下，觀察（式 3-5）等號右邊的數學結果。由於彩券邊際效用遞減（$g_x^x < 0$）、以及剩餘所得$m = M - px$愈多同樣p元支出的邊際損失愈小（$l_m^p < 0$）等原因，我們獲得所得提高使彩券購買數量增加$x_M > 0$的比較靜態結果。

針對所得增加，導致彩券購買數量增加的過程進行分析。首先觀察（式 3-5）分子中唯一分項l_m^p的部分，在購買彩券數量維持不變的情況下，所得提高會導致保留所得同額增加，在先前$l_m^p < 0$的假設下，保留所得的增加使得支出的邊際損失減少，使得原本$g^x = l^p$的均衡狀態被破壞，變成$g^x > l^p$的狀態。由於此時增加購買彩券的邊際利益高於邊際損失，消費者會有增加彩券購買數量的動機。

接著我們觀察（式 3-5）分母部分的兩個分項g_x^x和pl_m^p，在前段人們商品購買數量增加的情況下會有兩股力量使$g^x > l^p$回到$g^x = l^p$的均衡狀態。首先說明g_x^x造成的第一股力量，由於$g_x^x < 0$彩券邊際效用遞減的關係，x增加使得g^x下降，先前失衡的$g^x > l^p$往均衡的$g^x = l^p$調整。接著說明pl_m^p造成的第二股恢復均衡的力量，由於花費在購買商品的金額隨著購買數量而增加，在新的所得水準下，剩餘所得m對影減少，由於剩餘所得愈多同樣p元支出的邊際損失愈小($l_m^p < 0$)的特性，使支出造成的邊際損失提高，同樣也讓原先失衡的$g^x > l^p$往$g^x = l^p$調整，而達到了新的均衡。

二、彩券價格變動的效果

接著同樣由（式 3-3）推導可得X彩券的價格p變動對彩券購買數量x的效果為：

$$x_p = \frac{l_p^p - xl_m^p}{g_x^x + pl_m^p} = \frac{l_p^p}{g_x^x + pl_m^p} - x\frac{l_m^p}{g_x^x + pl_m^p} = \frac{l_p^p}{g_x^x + pl_m^p} - xx_M < 0 \tag{3-6}$$

由（式 3-6）可知，由於彩券邊際效用遞減（$g_x^x < 0$）、彩券單位價格愈高支出邊際損失愈大（$l_p^p > 0$）以及剩餘所得m愈多支出的邊際損失愈小（$l_m^p < 0$）等原因，使得彩券價格提高促使彩券購買數量減少（$x_p < 0$）。 X彩券的價格p變動對彩券購買數量x影響

DOI:10.6814/NCCU201900637

的效果，在分子及分母分別各有兩種不同的力量，以下將分別進行說明。

首先說明分子項l_p^p的部分，在彩券價格上升的情況下，由於彩券的單位價格愈高支出的邊際損失愈大（$l_p^p > 0$），消費者感受到支出的邊際損失較大，使得消費者原先的均衡狀態$g^x = l^p$不再成立，變成$g^x < l^p$的失衡狀態，因此人們有動機減少彩券的購買數量。接著說明分子項l_m^p的部分，由於彩券價格提高，在原來的固定所得與最適彩券購買數量之下，所能保留的所得m減少，在剩餘所得愈多同樣p元支出的邊際損失愈小（$l_m^p < 0$）的假設下，使得支出的邊際損失增加，消費者的均衡狀態$g^x = l^p$不再成立，變成$g^x < l^p$的失衡狀態。邊際減少彩券購買數量的邊際利益高於其邊際損失，因此人們有動機減少彩券的購買數量。

彩券購買數量減少再透過分母項g_x^x和l_m^p的兩種力量，使失衡的均衡條件恢復均衡。第一種力量由於彩券邊際效用遞減（$g_x^x < 0$）的特性，x減少使彩券邊際效用提高，讓失衡的$g^x < l^p$條件往均衡的$g^x = l^p$條件調整。第二種力量是由於彩券購買數量減少，在新的價格水準之下，使剩餘所得m增加，因為剩餘所得愈多同樣p元支出的邊際損失愈小（$l_m^p < 0$）的原因，支出的邊際損失降低，同樣也有助於使失衡的$g^x < l^p$條件往均衡的$g^x = l^p$條件調整，達到新的均衡。

三、負斜率需求曲線之圖解

由前面比較靜態分析的結果，可知價格上升導致彩券需求量減少，接著說明負斜率需求曲線（$x_p < 0$）之圖解。（圖 3-2）上圖中，因為價格上漲對$g^x(x;c)$沒有影響，因此當價格由p上漲至$\hat{p}$時，$g^x(x;c)$直線會維持不變。此外當價格p上漲，對$l^p(p;m = M - px)$的影響為$l_p^p - x l_m^p > 0$，也就是當價格由p上漲至$\hat{p}$時，$l^p(p;m = M - px)$直線會上移。新的均衡出現在上圖兩線的新交點$\hat{e}^*$上，此均衡點所對應的價格$\hat{p}$與數量$\hat{x}^*$是下圖中的均衡點$\hat{E}^*$，連接E^*與$\hat{E}^*$可畫出負斜率的個人需求線$x^d = x^d(p, M, c)$。

DOI:10.6814/NCCU201900637

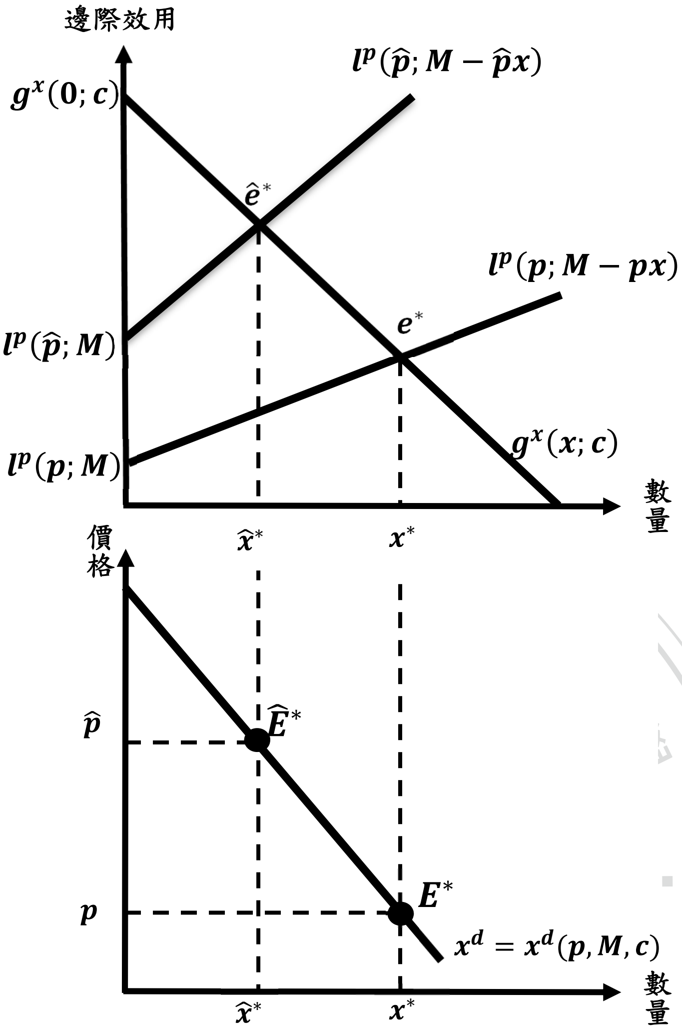

圖 3-2　需求曲線的導出

第三節　比較靜態分析結果—彩券特性變動的效果

在本小節中將探討本文較為重要的部分，也就是彩券特性變動在新理論中的比較靜態分析結果，並說明其圖解。第四章將應用本節推導的結果，進行更進一步的探討。

一、彩券特性變動的效果

同樣由（式 3-3）推導可得，彩券特性變動對購買數量的效果為：

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$x_c = -\frac{g_c^x}{g_x^x + pl_m^p} \gtreqless 0 \Leftrightarrow g_c^x \gtreqless 0 \qquad (3\text{-}7)$$

在本文的模型設定下，觀察（式 3-7）等號右邊的數學結果。由於彩券邊際效用遞減（$g_x^x < 0$）、以及剩餘所得$m = M - px$愈多同樣p元支出的邊際損失愈小（$l_m^p < 0$）等原因，可得彩券特性c變動對需求量x的影響效果x_c與g_c^x的正負號相同。也就是當彩券特性提高使人們對某些彩券的邊際效用或評價上升（$g_c^x > 0$），則會刺激人們提高該彩券的購買數量（$x_c > 0$）；若彩券特性提高會降低人們對某些彩券的邊際效用或評價（$g_c^x < 0$），則會刺激人們減少該彩券的購買數量（$x_c < 0$）。若彩券特性不會改變人們對該彩券的邊際效用或評價（$g_c^x = 0$），則不會刺激人們改變該彩券的購買數量（$x_c = 0$）。

針對彩券特性提高（例如彩券頭獎獎金提高），導致彩券購買數量增加的過程進行分析。首先觀察（式 3-7）分子中唯一分項g_c^x的部分，在購買彩券數量維持不變的情況下，彩券特性提高會提高人們對某些彩券的邊際效用或評價（$g_c^x > 0$），人們擁有現金的邊際效用相對地低於原先所購買的最適數量下的彩券的邊際效用，使得原本$g^x = l^p$的均衡狀態被破壞，變成$g^x > l^p$的狀態。由於此時增加購買彩券的邊際利益高於邊際損失，消費者會有增加彩券購買數量的動機，以回到原先$g^x = l^p$的均衡狀態。

接著我們觀察（式 3-7）分母部分的兩個分項g_x^x和pl_m^p，和（式 3-5）的分母項一樣。在人們商品購買數量增加的情況下，會有兩股力量使$g^x > l^p$回到$g^x = l^p$的均衡狀態。首先說明g_x^x造成的第一股力量，由於$g_x^x < 0$彩券邊際效用遞減的關係，x增加使得g^x下降，先前失衡的$g^x > l^p$往均衡的$g^x = l^p$調整。接著說明pl_m^p造成的第二股恢復均衡的力量，由於花費在購買商品的金額隨著購買數量而增加，在新的所得水準下，剩餘所得m對影減少，由於剩餘所得愈多同樣p元支出的邊際損失愈小($l_m^p < 0$)的特性，使支出造成的邊際損失提高，同樣也讓原先失衡的$g^x > l^p$往$g^x = l^p$調整，而達到了新的均衡。

二、彩券特性變動的效果的圖解

接著利用（圖3-3）與（圖3-4）圖解彩券特性對需求線的影響。首先說明彩券特性增加使需求增加的情況，在（圖3-3）中，彩券特性由增加c至$\hat{c}$時，若此彩券的彩券特性可以增加消費者對此彩券的邊際效用（$g_c^x > 0$），則會造成$g^x(x;c)$直線上移至$g^x(x;\hat{c})$。$g^x(x;c)$與$g^x(x;\hat{c})$兩線在縱軸（$x = 0$）截距分別是$g^x(0;c)$與$g^x(0;\hat{c})$，且$g^x(0;\hat{c}) >$

DOI:10.6814/NCCU201900637

$g^x(0;c)$，兩線斜率相同都是$g_x^x<0$，所以圖中$g^x(x;\hat{c})$線相較於$g^x(x;c)$線截距較高但斜率相同（兩線平行）。新均衡出現在上圖$g^x(x;\hat{c})$與$l^p(p;m=M-px)$兩線的新交點$\hat{e}^*$上，此均衡點對應於原先價格p與數量$\hat{x}^*$是下圖中的均衡點$\hat{E}^*$，連接E^*與$\hat{E}^*$就可畫出彩券特性使負斜率的個人需求線$x^d(p,M,c)$往外移動到$x^d(p,M,\hat{c})$。

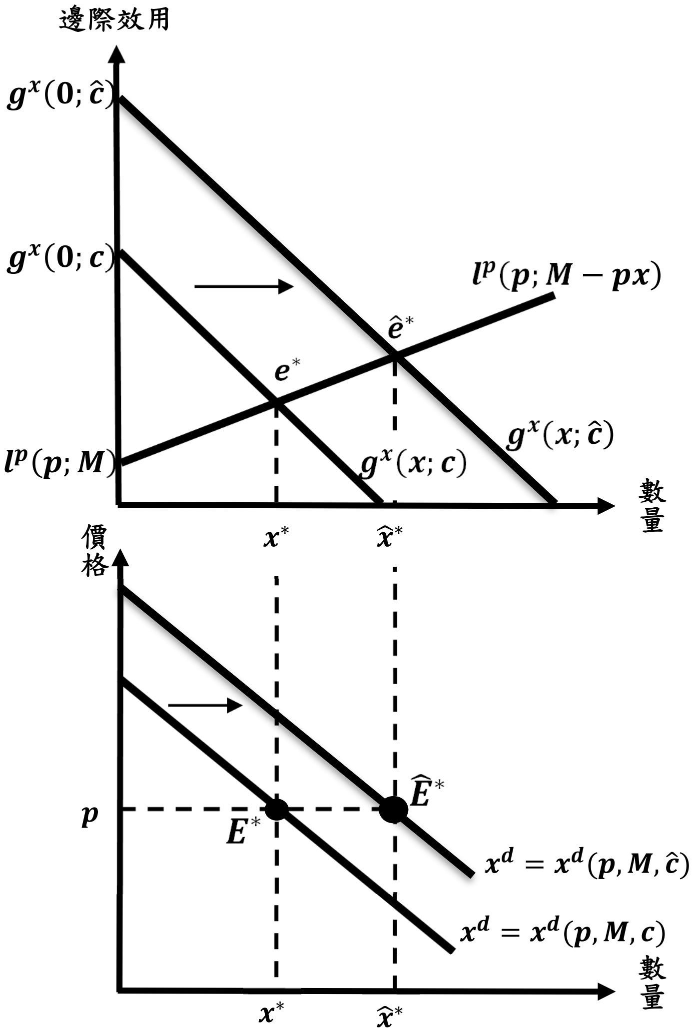

圖 3-3　彩券特性增加對需求曲線的影響
（使需求增加）

DOI:10.6814/NCCU201900637

接著說明彩券特性增加使需求減少的情況，(圖 3-4) 中，呈現彩券的彩券特性會減少消費者對此彩券的邊際效用 ($g_c^x(x;c) < 0$) 的情況，此時當彩券特性由c增加到$\hat{c}$時，會造成$g^x(x;c)$直線下移至$g^x(x;\hat{c})$，彩券特性因此使負斜率的個人需求線$x^d(p,M,c)$往內移動到$x^d(p,M,\hat{c})$的位置，從而使均衡點由E^*移動到$\hat{E}^*$，均衡數量由x^*移動到$\hat{x}^*$。

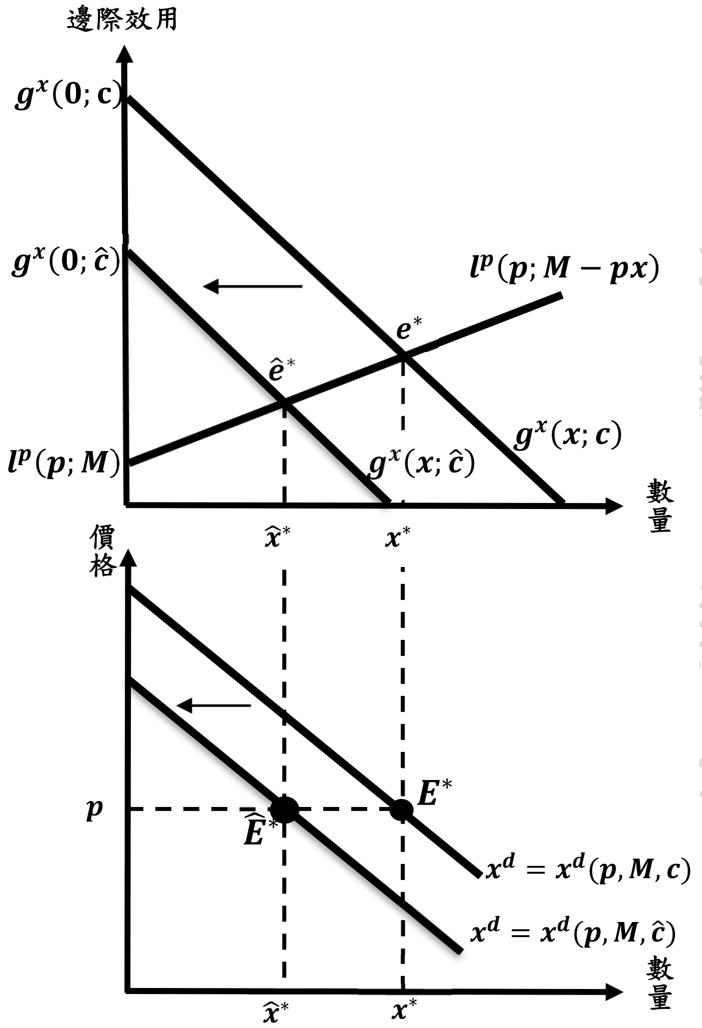

圖 3-4　彩券特性增加對需求曲線的影響
(使需求減少)

DOI:10.6814/NCCU201900637

第四節　正向單調轉換的檢驗

先前提到，在極大化序數總效用分析法中，總效用函數進行正向單調轉換後，會出現總效用的二次微分項正負符號無法維持恆定的缺陷，導致二次微分項無法保留其經濟意義。本小節中採用相同的檢驗方式，來驗證序數邊際效用理論於正向單調轉換後，是否可避免前述序數總效用分析法的缺陷。

一、對模型進行正向單調轉換

序數總效用分析法強調正向單調轉換不會改變偏好的特性，但必須犧牲效用函數二次微分項正負的經濟意義，並導致了無法用簡單方式定義替代及互補品等問題。邊際分析方法假設人由邊際效用，而非由總效用的角度出發，此時相關邊際效用函數經過正向單調轉換，不只不會改變消費者行為，而且也不需要犧牲邊際效用的一次微分項（等同於舊理論中總效用的二次微分項）的經濟意義。

本段證明新理論可通過單調轉換的檢驗如下：首先對彩券的邊際單位所對應的邊際效用或利得函數$g^x(x;c)$透過正向單調函數$F(\cdot)$且$F' > 0$轉換為$G^x(x;c) = F(g^x(x;c))$；同時也對剩餘$m = M - px$元現金時所支出的那一單位的現金的邊際損失函數$l^p(p;m)$做同樣的正向單調轉換為$L^p(p;m) = F(l^p(p;m))$，可得以下兩式：

$$G^x(x;c) = F\left(g^x(x;c)\right)\ ;\ F' > 0, F'' \gtreqless 0 \qquad (3\text{-}8a)$$

$$L^p(p;m) = F\left(l^p(p;m)\right);\ \ F' > 0, F'' \gtreqless 0 \qquad (3\text{-}8b)$$

（式 3-8a）及（式 3-8b）中隱含下列關係式：

$$G_x^x = F' g_x^x \Leftrightarrow\ sign\ \ g_x^x = sign\ \ G_x^x \qquad (3\text{-}9a)$$

$$G_c^x = F' g_c^x \Leftrightarrow\ sign\ \ g_c^x = sign\ \ G_c^x \qquad (3\text{-}9b)$$

$$L_p^p = F' l_p^p \Leftrightarrow\ sign\ \ l_p^p = sign\ \ L_p^p \qquad (3\text{-}9c)$$

$$L_m^p = F' l_m^p \Leftrightarrow\ sign\ \ l_m^p = sign\ \ L_m^p \qquad (3\text{-}9d)$$

由於$F' > 0$，可得在正向轉換後一次微分項的正負號可保持衡定的結果，也就是

DOI:10.6814/NCCU201900637

$sign\ \ g_x^x = sign\ \ G_x^x$、$sign\ \ g_c^x = sign\ \ G_c^x$、$sign\ \ l_p^p = sign\ \ L_p^p$、以及$sign\ \ l_m^p = sign\ \ L_m^p$，所以邊際效用的變化方向的正負符號，此時在正向單調轉換之後可以維持恆定，因此也可以保留或承載其經濟意義。

例如，彩券邊際效用遞減在此新理論模型中是序數效用概念，而非如在極大化總效用理論中是基數效用的代名詞或同義詞。這是因為在新的序數邊際效用分析法中，彩券邊際效用遞減$g_x^x < 0$的概念是一種禁得起邊際效用函數正向單調轉換後維持不變的序數效用標準考驗的概念。

二、檢查正向單調轉換前後分析結果是否一樣

接著檢查序數邊際效用理論的基本準則，即消費者偏好以不同的合格的邊際效用函數來表示時，不會改變分析結果，證明正向單調轉換前後的消費者均衡條件與比較靜態分析結果會維持一樣。分別從以下幾個面向檢驗分析結果：消費者均衡條件、內部解的條件及比較靜態分析的總結果是否一樣。

首先經過正向單調轉換後的消費者均衡要求為：

$$g^x(x;c) = l^p(p;m) \Leftrightarrow F(g^x(x;c)) = F(l^p(p;m)) \Leftrightarrow G^x(x;c) = L^p(p;m) \qquad (3\text{-}10)$$

由（式 3-10）可知正向單調轉換前後的最適條件不變。

其次，內部解的安定條件要求，支出邊際損失曲線$L^p(p;m)$的斜率必須大於彩券邊際效用曲線$G^x(x;c)$的斜率，即：

$$\frac{dG^x(x;c)}{dx} < \frac{dL^p(p;m)}{dx} \Leftrightarrow G_x^x < -pL_m^p \Leftrightarrow F'g_x^x < pF'l_m^p \Leftrightarrow g_x^x + pl_m^p < 0 \qquad (3\text{-}11)$$

即正向單調轉換前後內部解的安定條件維持不變。由（式 3-10）及（式 3-10），可發現正向單調轉換前後的最適條件與最適解不變。

正向單調轉換後價格變動對購買數量及彩券特性變動對購買數量的效果分別為：

$$x_M = \frac{L_m^p}{G_x^x + pL_m^p} = \frac{F'l_m^p}{F'g_x^x + pF'l_m^p} = \frac{l_m^p}{g_x^x + pl_m^p} \qquad (3\text{-}12)$$

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$x_p = \frac{L_p^p - xL_m^p}{G_x^x + pL_m^p} = \frac{F'l_p^p - xF'l_m^p}{F'g_x^x + pF'l_m^p} = \frac{l_p^p - xl_m^p}{g_x^x + pl_m^p} \quad (3\text{-}13)$$

$$x_c = -\frac{G_c^x}{G_x^x + pL_m^p} = -\frac{F'g_c^x}{F'g_x^x + pF'l_m^p} = -\frac{g_c^x}{g_x^x + pl_m^p} \quad (3\text{-}14)$$

由（式 3-12）、（式 3-13）及（式 3-14）可知，正向單調轉換不影響所得變動、價格變動及彩券特性變動對購買數量的比較靜態結果。

經由前面正向單調轉換的驗證，可發現對任何一個相同問題而言，序數總效用分析法總效用二次微分項正負符號不能有心理意義的缺點，在新理論中不存在。同時新理論也避免了基數總效用分析法，其總效用函數只能進行正向線性轉換的缺點。

DOI:10.6814/NCCU201900637

第四章　新舊理論如何解決不確定性的問題

本章主要探討人們在面對不確定性下的選擇時，如何評估各個選項，並做出最有利自身的決策。以 Kahneman（2011）《快思慢想》一書中提出的三個具代表性的重要情境[3]：「尋求或規避風險」、「參考點的不同」及「損失厭惡」。將以上三個主題，分別以期望值理論、預期效用理論及展望理論進行探討並分析優劣，最後並試著用林忠正所提出的序數邊際效用理論，看是否是更好的分析方法。最後探討如何使用序數邊際效用理論解決聖彼得堡悖論及阿萊悖論。

第一節　尋求或規避風險

首先我們先探討人們在利得及損失這兩種情境下，對於尋求或規避風險，會有怎樣不同的反應，進而影響最後決策。Kahneman 和 Tversky （1979）提出下列兩個較具代表性的問題[4]及最後的實驗數據：

問題三：H 和 I 兩個選擇你會選那一個？

H：有 80%的機會贏得 4,000 元，或 I：確定拿到 3,000 元。

實驗結果如下：

H：(4,000 , 0.8)　　and　　I：(3,000 , 1)

N = 95　[20]　　　　　　[80]*

上面的 N 為樣本數，[20]及[80]代表選項被選取的人數各自所佔的百分比率，*表示多數人選擇。在這個問題中，結果有 80%的人採取「確定拿到 3,000 元」的決策。

問題四：J 和 K 兩個選擇你會選那一個？

J：有 80%的機會失去 4,000 元，或 K：確定失去 3,000 元。

實驗結果如下：

J：(-4,000 , 0.8)　　and　　K：(-3,000 , 1)

N = 95　[92]*　　　　　　[8]

在這個問題中，實驗的結果有 92%的人選擇「80%的機會失去 4,000 元」的決策。

[3] 因於《快思慢想》書中並無所提出問題的實驗數據，故後面討論部分採用 Kahneman and Tversky (1979) 中相關問題及實驗的數據。

[4] 《快思慢想》(Kahneman, 2011/2013, p. 365)一書中，提出之兩個問題為，問題一：確定拿到 900 元或有 90%的機會贏得 1,000 元；問題二：確定失去 900 元，或有 90%的機會失去 1,000 元。

DOI:10.6814/NCCU201900637

接著以上述問題，使用先前提及的四種理論來進行討論。

一、期望值理論的分析

問題三中，若人的思維方式是採取「期望值理論」，則上述問題他將會以期望值的大小，來選擇應該採取的決策。H、I 兩個選項的期望值為：

$$E(H) = 0.8 \times 4{,}000 = 3{,}200 \quad (4\text{-}1a)$$

$$E(I) = 1.0 \times 3{,}000 = 3{,}000 \quad (4\text{-}1b)$$

H、I 兩種情況的期望值分別為 3,200 及 3,000，對於採用這項理論的人而言，H 選項應該優於 I 選項。但是大多數人以厭惡風險居多，雖然 H 選項的期望值明顯大於 I，仍會偏好確定拿到 3,000 元這個選項。

而在問題四中，由於必然的損失是非常讓人厭惡的，所以大多數人在面對這類選擇時，大多數人會偏向賭一把，進而選擇「80%的機會失去 4,000 元」這個選項。同樣的如果我們用「期望值理論」來分析，與（4.1a）、（4.1b）式相同但改為損失的情況下，會得到 J、K 的期望值為：

$$E(J) = 0.8 \times (-4{,}000) = -3{,}200 \quad (4\text{-}1c)$$

$$E(K) = 1.0 \times (-3{,}000) = -3{,}000 \quad (4\text{-}1d)$$

採用此種思維應該選擇損失小的 K 選項，與實驗的結果不一致。所以就這兩個實驗而言，「期望值理論」並不符合一般人的思維方式。

二、預期效用理論的分析（極大化預期總效用模型）

在預期效用理論中，獲利的效用是用各種狀況下的總財富的總效用，搭配上機率的概念來評定。對於問題三，為方便分析起見，假設起始財富為w，且w不小於0。「80%的機會贏得 4,000 元」及「確定拿到 3,000 元」這兩種選項，以效用函數可分別表示為：

$$U(H) = 0.8 \times u(w + 4{,}000) + 0.2 \times u(w) \quad (4\text{-}2a)$$

$$U(I) = u(w + 3{,}000) \quad (4\text{-}2b)$$

我們在此假設此人為風險趨避，以符合邊際效用遞減的效用函數：$u(x) = \sqrt{x}$為例，代

DOI:10.6814/NCCU201900637

入計算可得：

$$0.8\sqrt{w+4{,}000}+0.2\sqrt{w}=\sqrt{w+3{,}000}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{64w^2+256{,}000w}=\sqrt{64w^2+176000w+11{,}000^2} \Rightarrow w=1512.5$$

$\Rightarrow \quad U(H)=U(I)$，當$w=1512.5$

$U(H)<U(I)$，當$0\leq w<1512.5$

$U(H)>U(I)$，當$w>1512.5$ （4-2c）

由（4.2c）式可知隨著w的不同，$U(H)$和$U(I)$之間的相對大小也不同，因此最後的選擇也不同，因此沒辦法表達大多數人選擇「確定拿到 3,000 元」的結果。

同樣在問題四中，假設起始財富為w，且w不小於0。「80%的機會失去 4,000 元」及「確定失去 3,000 元」這兩種選項，以效用函數可分別表示為：

$$U(J)=0.8\times u(w-4000)+0.2\times u(w) \quad （4\text{-}2d）$$

$$U(K)=u(w-3{,}000) \quad （4\text{-}2e）$$

為方便分析，同樣假設此人為風險趨避，用符合邊際效用遞減，且不使計算過程產生虛數之總效用函數：$u(x)=\sqrt{x+4000}$，並數字代入計算，可得：

$$0.8\sqrt{w}+0.2\sqrt{w+4{,}000}<\sqrt{w+1{,}000}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{64w^2+256{,}000w}<\sqrt{64w^2+336000w+21{,}000^2}$，當$w\geq 0$時

$\Rightarrow \quad U(J)<U(K)$，當$w\geq 0$時 （4-2f）

由（4-2f）式可知$U(J)<U(K)$，K 選項的預期效用大於 J 選項，在此理論下應該選擇「確定損失 3,000」，卻與我們大多數人的選擇相違背。在面對損失的情況下，一般人會更願意冒險，正好跟前面選擇規避風險的解釋相反。由這兩個問題可知，預期效用理論並無法真實反映出在此例子下我們一般人的決策行為。

三、展望理論的分析

在展望理論中，效用是用相對於參考點得到或損失的財富來評定的，而非總財富的效用。而且獲利與損失的效用一樣有邊際遞減的情形，只是對「失」的反應強過對「得」

DOI:10.6814/NCCU201900637

的反應。另外我們可以發現當預期效用理論其起始財富為零時，其財富的總量和展望理論中是一致的。

在此我們以當時起始財富狀況為參考點，在問題三中，展望理論同樣可把兩種選項分別表示為：

$$V(H) = \pi(0.8) \times v(4{,}000) \quad \text{（4-3a）}$$

$$V(I) = \pi(1.0) \times v(3{,}000) \quad \text{（4-3b）}$$

以符合展望理論在獲利區間為風險趨避其邊際效用遞減，損失區間為風險愛好其邊際效用遞增的價值函數：$v(x) = \sqrt{x}$，當 $x \geq 0$；$v(-x) = -\sqrt{x}$，當$x < 0$，並且為了分析方便，令權數函數為$\pi(p) = p$時[5]，可得：

$$0.8\sqrt{4{,}000} < \sqrt{3{,}000} \Rightarrow \sqrt{2560} < \sqrt{3{,}000} \Leftrightarrow V(H) < V(I) \quad \text{（4-3c）}$$

由（4-3c）式可知$V(H) < V(I)$，其分析結果與展望理論一致。

但在問題四的情況中，這兩種選項以展望理論可分別表示為：

$$V(J) = \pi(0.8) \times v(-4{,}000) \quad \text{（4-3d）}$$

$$V(K) = \pi(1.0) \times v(-3{,}000) \quad \text{（4-3e）}$$

同樣以符合展望理論在獲利區間為風險趨避其邊際效用遞減，損失區間為風險愛好其邊際效用遞增的價值函數：$v(x) = \sqrt{x}$，當 $x \geq 0$；$v(-x) = -\sqrt{x}$，當$x < 0$，及權數函數為$\pi(p) = p$，將數字代入經過計算可得：

$$-0.8\sqrt{4{,}000} > -\sqrt{3{,}000} \Rightarrow -\sqrt{2560} > -\sqrt{3{,}000} \Leftrightarrow V(J) > V(K) \quad \text{（4-3f）}$$

在展望理論下會選擇 K 選項，得出與展望理論相同的結果，也就是在面對損失的情況下更樂於承擔風險，與我們大多數人的思維一致。

因此展望理論和預期效用理論比較起來，更能正確表達我們一般人對於這類問題的

[5] 因為在展望理論中，權數函數$\pi(p)$主要在p靠近 0 時會嚴重高估，因此在本問題p為 0.8 及 1.0 的情況下，$\pi(p)$會接近p，因此$\pi(p) = p$的假設應不影響分析結果。

DOI:10.6814/NCCU201900637

決策行為。但是只能得出單一的結果，並非所有人的行為或選擇都能夠加以解釋。

四、在序數邊際效用理論下的分析

跟展望理論相同，序數邊際效用理論也是用得與失來評定效用，但最大的不同之處在於，展望理論仍舊是建立在基數總效用這個有缺陷的架構下進行分析，而序數邊際效用理論則是以序數邊際效用而非總效用來進行思考。

對於問題一，在序數邊際效用理論的分析架構中，我們使用先前在第三章的彩券特性c的分析方式，只是在此我們將彩券特性c改為發生的機率a及贏得的金錢z。進行一單位的選擇，因此$x = 1$：在符合一般人的思維方式下假設$g_z^x > 0$，也就是可以贏得的金錢越多，邊際效用會越高；同樣的對於發生的機率a，發生的機率越大邊際效用越高，因此$g_a^x > 0$。

和展望理論參考點相同的概念，我們將原始的財富狀態作為一個基準點，將問題三中的兩個選項，分別表示為利得函數如下：

$$g^x(H) = g^x(x = 1; a = 0.8, z = 4{,}000) \qquad (4\text{-}4a)$$

$$g^x(I) = g^x(x = 1; a = 1.0, z = 3{,}000) \qquad (4\text{-}4b)$$

由於$g_z^x > 0$，我們可以知道贏得的金錢z越高，會讓g^x越高，但g_a^x同樣讓發生的機率a對g^x產生影響，兩種力量交錯導致三種不同的結論。我們會偏好選擇利得越高的選項，將上述參數對於$g^x(H)$和$g^x(I)$的影響簡單列表如（表 4-1）：

表 4-1：尋求或規避風險-序數邊際效用對於問題三的三種可能性

a和z對$g^x(H)$和$g^x(I)$的影響	$g^x(H)$和$g^x(I)$的大小	最後選擇的選項
機率a影響<贏得金錢z	$g^x(H) > g^x(I)$	(H)80%的機會贏得 4,000 元
機率a影響=贏得金錢z	$g^x(H) = g^x(I)$	(H)80%的機會贏得 4,000 元或(I)確定拿到 3,000 元皆可
機率a影響>贏得金錢z	$g^x(H) < g^x(I)$	(I)確定拿到 3,000 元

DOI:10.6814/NCCU201900637

（表 4-1）說明了發生機率a及贏得金錢z對於$g^x(H)$和$g^x(I)$的影響。當機率a的大小對兩個利得函數的影響小於贏得金錢z時，會讓$g^x(H)$相對$g^x(I)$大，因此最後會選擇「(H)80%的機會贏得 4,000 元」的選項，其他兩種情況的分析亦同。

對於問題四，在同樣的分析架構中,我們令失去的機率為a、失去的金錢為z，進行一單位的選擇因此$x = 1$，在符合一般人的思維方式下假設$l_z^x < 0$，也就是失去的金錢越多，邊際損失會越高；同樣的對於發生的機率a，發生的機率越大邊際損失越高，因此$l_a^x > 0$。

同樣我們將問題四的兩個選項，分別表示為損失：

$$l^x(J) = l^x(x = 1; a = 0.8; z = -4{,}000) \tag{4-4c}$$

$$l^x(K) = l^x(x = 1; a = 1.0; z = -3{,}000) \tag{4-4d}$$

由於$l_p^x > 0$，我們可以知道失去的金錢z越多，會讓l^x越高。但l_a^x同樣讓發生的機率a對l^x產生影響，兩種力量交錯導致三種不同的結論。我們會偏好損失較小的選項，將上述參數對於$l^x(J)$和$l^x(K)$的影響列表如（表 4-2）：

表 4-2：尋求或規避風險-序數邊際效用對於問題四的三種可能性

a和z對$l^x(J)$和$l^x(K)$的影響	$l^x(J)$和$l^x(K)$的大小	最後選擇的選項
機率a影響 <失去金錢z影響	$l^x(J) > l^x(K)$	(K)確定失去 3,000 元
機率a影響 =失去金錢z影響	$l^x(J) = l^x(K)$	(J)80%的機會失去 4,000 元或 (K)確定失去 3,000 元皆可
機率a影響>失去金錢z影響	$l^x(J) < l^x(K)$	(J)80%的機會失去 4,000 元

在現實生活中面對上述問題，往往因人而異有許多種不同的結論，而非單一一個最佳的選擇。而序數邊際效用理論恰好提供了足夠的自由度，可以允許不同人做不同的選

DOI:10.6814/NCCU201900637

擇，在不失去任何經濟意涵的情況下，充份表達各種不同的可能性。在沒有對個人的偏好進行進一步的假設的情況下，新理論的優點是能夠對所有人所做出的各種可能的決策進行解釋，但缺點是無法預測大多數人偏好的選擇。

第二節　參考點的不同

討論過人在面對利得及損失的情況下面對風險的反應，接著進一步探討不同的參考點所帶來的影響。由於不同參考點的關係，將相同的最後總財富，轉換為利得及損失兩種不同的情況，進一步導致不同的決策。Kahneman and Tversky （1979）提出下列兩個問題及實驗的數據（引自 Kahneman，2011）：

問題五：不論你原來有多少錢，你現在又多了 1,000 元。

請你從下面兩個選項中做出選擇：

Q：「50%機會贏得 1,000 元」或 R：「確定拿到 500 元」。實驗結果如下：

Q：(1,000 , 0.5)　and　R：(500 , 1)

N = 70　[16]　[84]*

在這個問題中，實驗的結果有 84%的人採取「確定拿到 500 元」的決策。

問題六：不管你原來有多少錢，你現在又多了 2,000 元。

你要從下面兩個選項中做出選擇：

S：「50%的機會失去 1,000 元」或 T：「確定少 500 元」。

實驗結果如下：

S：(-1,000 , 0.5)　and　T：(-500 , 1)

N = 68　[69]*　[31]

在這個問題中，實驗的結果有 69%的人採取「50%的機會失去 1,000 元」的決策。

由以上兩個問題，我們可看出同樣的選項，在不同的參考點上，會造成不同的決策結果。同樣的我們接著以上述問題，使用四種理論來進行討論。

一、期望值理論的分析

若人的思維方式是採取「期望值理論」，則上述問題他將會以期望值的大小來選擇

DOI:10.6814/NCCU201900637

採取的決策。問題五跟問題六中 Q、R、S、T 四個選項的期望值可分別表示為：

$$E(Q) = 0.5 \times 1{,}000 = 500 \quad (4\text{-}5a)$$

$$E(R) = 500 \quad (4\text{-}5b)$$

$$E(S) = -0.5 \times 1{,}000 = -500 \quad (4\text{-}5c)$$

$$E(T) = -500 \quad (4\text{-}5d)$$

由上可知 Q、R 金錢期望值皆為 500，而 S、T 金錢期望值皆為-500 元，對於採用這項理論的思維方式的人而言，問題五中的兩個選擇應該是沒有差異，問題六的兩個選項亦同。

但是從實驗的結果我們可以觀察到，經過不同參考點的轉換，將情境轉變為獲利（問題五）及損失（問題六），人們會有兩種截然不同的反應。由前段問題三跟四的實驗結果可知，在面對獲利時人比較會偏好確定的結果；而在面臨損失時，轉變為比較願意承擔風險。但同樣的如果我們用「期望值理論」來分析，會得到兩個問題中的選擇，期望值同為 1,500 元，因而導致無差異的結果，所以「期望值理論」不符合一般人的思維方式。

二、預期效用理論的分析（極大化預期總效用模型）

若人的思維方式是採用「預期效用理論」，就最後的總財富狀況來說，問題五你可以選擇參與賭局有各半的機會得到 2,000 元或 1,000 元，或確定得到 1,500。兩個選擇可分別表示為：

$$U(Q) = 0.5 \times u(w + 2000) + 0.5 \times u(w + 1{,}000) \quad (4\text{-}6a)$$

$$U(R) = u(w + 1{,}500) \quad (4\text{-}6b)$$

我們繼續探討問題六，可得到：

$$U(S) = 0.5 \times u(w + 2000) + 0.5 \times u(w + 1{,}000) \quad (4\text{-}6c)$$

$$U(T) = u(w + 1{,}500) \quad (4\text{-}6d)$$

會發現問題六中的兩個選項竟得到和問題五一模一樣的預期效用函數。

DOI:10.6814/NCCU201900637

我們可以發現這兩個不同情境下的問題，在「預期效用理論」這個分析架構下卻會導出相同的效用，進而得到同樣的結果。此時我們可以簡單的用自己的思維方式，去思考這兩個問題對於我們來說真的是一致的嗎？

從實驗結果在不同起始財富的狀況下，我們可以觀察到在問題五中，以得到 1,000 元後的參考點為基準，在面對相對獲利時，絕大多數人喜歡確定的選項；但在問題六中，以得到 2,000 元後做為參考點，同樣的期望值轉換為面對損失的情況下，大多數人會傾向更願意冒險。這邊印證了前面一節的分析，由此可知，以總財富狀態作為一般人決策的方式，並無法反映出我們大部份人進行邊際思考的決策行為。也就是預期效用理論在這兩個問題下，並無法得出正確的分析結果。

三、展望理論的分析

在展望理論中，效用是用得到或損失的財富與「參考點」的差距來評定，其中牽涉到所謂「參考點」的問題，而 1,000 元或 2,000 元這樣額外的財富，和一般人原有的財富相比，比率可以說是微乎其微，不致於影響對於之後對於其它財富的評價。以先得到 1,000 元或 2,000 元額外財富後的狀況，做為參考點來進行分析，會得到跟前面預期效用理論完全不同的分析結果。

在問題五中，以得到額外財富後的狀況做為參考點，把兩種選項分別表示為：

$$V(Q) = \pi(0.5) \times v(1{,}000) + \pi(0.5) \times v(0) \qquad (4\text{-}7a)$$

$$V(R) = \pi(1.0) \times v(500) \qquad (4\text{-}7b)$$

以符合展望理論在獲利區間為風險趨避其邊際效用遞減，損失區間為風險愛好其邊際效用遞增的價值函數$v(x) = \sqrt{x}$，當 $x \geq 0$；$v(-x) = -\sqrt{x}$，當$x < 0$，並且為了分析方便，令權數函數為$\pi(p) = p$，將數字代入可得到：

$$0.5\sqrt{1{,}000} < \sqrt{500} \;\Rightarrow\; \sqrt{250} < \sqrt{500} \;\Leftrightarrow\; V(Q) < V(R) \qquad (4\text{-}7c)$$

由於$V(Q) < V(R)$，因此人會偏好選擇 R 選項，其分析結果與實驗結果一致。

DOI:10.6814/NCCU201900637

但在問題六的情況中，這兩種選項以展望理論的效用函數可分別表示為：

$$V(S) = \pi(0.5) \times v(-1{,}000) + \pi(0.5) \times v(0) \quad (4\text{-}7d)$$

$$V(T) = \pi(1.0) \times v(-500) \quad (4\text{-}7e)$$

以符合展望理論在獲利區間為風險趨避其邊際效用遞減，損失區間為風險愛好其邊際效用遞增的價值函數$v(x) = \sqrt{x}$，當 $x \geq 0$；$v(-x) = -\sqrt{x}$，當$x < 0$，並且為了分析方便，令權數函數為$\pi(p) = p$，將數字代入可得到：

$$-0.5\sqrt{1{,}000} > -\sqrt{500} \ \Rightarrow\ -\sqrt{250} > -\sqrt{500} \ \Leftrightarrow\ V(S) > V(T) \quad (4\text{-}7f)$$

在展望理論下會選擇 S 選項，得出與預期效用理論相反的結果，也就是在面對損失的情況下更樂於承擔風險，與我們大多數人的思維一致。

因此展望理論和預期效用理論比較起來，更能正確表達我們一般人對於這類問題的決策行為。但是同樣的只能得出單一的結果反應多數人的選擇，並非所有人的行為或選擇都能夠加以解釋。

四、序數邊際效用理論的分析

跟展望理論相同，序數邊際效用理論是用得與失來評定效用，因其能包含豐富的經濟意涵，因此我們同樣也能在適當假設下得到相同「參考點」的觀念。但是展望理論是在總效用的架構下分析，而序數邊際效用理論則是以邊際效用而非總效用來進行思考。

對於問題五，在序數邊際效用理論的分析架構中，我們令發生的機率為a、贏得的金錢為z，一開始額外得到的錢為e，進行一單位的選擇因此$x = 1$。在符合一般人的思維方式下假設$g_z^x > 0$，也就是可以贏得的金錢越多，邊際利得會越高；同樣的對於發生的機率a，發生的機率越大邊際利得越高，因此$g_a^x > 0$；一開始得到的額外金錢e，令$g_e^x = 0$，也就是無論大小為何，皆不對$g^x(Q)$和$g^x(R)$的相對大小產生影響。

接著我們將問題五的兩個選項，分別表示為：

$$g^x(Q) = g^x(x = 1; a = 0.5, z = 1{,}000, e = 1{,}000) \quad (4\text{-}8a)$$

$$g^x(R) = g^x(x = 1; a = 1.0, z = 500, e = 1{,}000) \quad (4\text{-}8b)$$

DOI:10.6814/NCCU201900637

由於$g_z^x > 0$，我們可以知道贏得的金錢z越高會讓g^x越高，但g_a^x同樣讓發生的機率a對g^x產生影響，而一開始得到的額外金錢e，不對$g^x(Q)$和$g^x(R\ )$的相對大小產生影響。同樣的會產生影響的兩種力量交錯導致三種不同的結論。我們會偏好選擇利得越高的選項，將上述參數對於$g^x(Q)$和$g^x(R\ )$的影響簡單列表如（表 4-3）：

表 4-3：參考點的不同-序數邊際效用對於問題五的三種可能性

a和z對$g^x(Q)$和$g^x(R)$的影響	$g^x(Q)$和$g^x(R\ )$的大小	最後選擇的選項
機率a影響<贏得金錢z影響	$g^x(Q) > g^x(R)$	(Q)50%機會贏得 1,000 元
機率a影響=贏得金錢z影響	$g^x(Q) = g^x(R)$	(Q)50%機會贏得 1,000 元或(R)確定拿到 500 元皆可
機率a影響>贏得金錢z影響	$g^x(Q) < g^x(R\ )$	(R)確定拿到 500 元

對於問題六，在同樣的分析架構中，我們令失去的機率為a、失去的金錢為z，進行一單位的選擇因此$x = 1$，在符合一般人的思維方式下假設$l_z^x < 0$，也就是失去的金錢越少，邊際損失會越小；同樣的對於發生的機率a，發生的機率越大邊際損失越高，因此$l_a^x > 0$；一開始得到的額外金錢e，由於 S 及 T 同樣為$1{,}000$，所以無論l_e^x的大小為何，皆不對l^x和$\hat{l}^x$的相對大小產生影響。

同樣我們將問題四的兩個選項，分別表示為：

$$l^x(S) = l^x(x = 1; a = 0.5, z = -1{,}000, e = 2{,}000) \quad (4\text{-}8c)$$

$$l^x(T) = l^x(x = 1; a = 1.0, z = -500, e = 2{,}000) \quad (4\text{-}8d)$$

由於$l_z^x < 0$，我們可以知道失去的金錢z越多會讓l^x越高，但l_a^x同樣讓發生的機率a對l^x產生影響，而一開始得到的額外金錢e，不對$l^x(S)$和$l^x(T)$的相對大小產生影響，剩餘的兩種力量交錯導致三種不同的結論。我們會偏好選擇損失較小的選項，將上述參數對於$l^x(S)$及$l^x(T)$的影響列表如下：

DOI:10.6814/NCCU201900637

表 4-4：參考點的不同-序數邊際效用對於問題六的三種可能性

a和z對$l^x(S)$和$l^x(T)$的影響	$l^x(S)$和$l^x(T)$的大小	最後選擇的選項
機率a影響 <失去金錢z影響	$l^x(S) > l^x(T)$	(T)確定失去 500 元
機率a影響 =失去金錢z影響	$l^x(S) = l^x(T)$	(S)50%的機會失去 1,000 元或 (T)確定失去 500 元皆可
機率a影響>失去金錢z影響	$l^x(S) < l^x(T)$	(S)50%的機會失去 1,000 元

同樣的序數邊際效用充份的表達了各種不同的可能性，能夠包含所有在現實生活中，因人而異不同的結論，而非單一一個最佳的選擇。其豐富的經濟意涵，充份的表達了與展望理相同參考點的概念，也隱含了面對其它不同的問題下，能夠用不同的g_e^x、l_e^x衍生出其它解答的可能性。

第三節　損失厭惡

我們大多數人對於損失都是相當厭惡的，Kahneman 提到面臨損失，一般人需要大約相當於損失兩倍的獲利，才能平衡損失的感覺。以下便是一個相當具代表性的問題：

問題七：你被邀請去參加一個拋銅板的賭局。這個賭局吸引你嗎？你會接受嗎？

假如是反面，你輸 100 元。假如是正面，你贏 150 元。

E：接受賭局。

F：拒絕賭局。

一個期望值明顯是正數的賭局，卻仍然有許多人不願意參與[6]。對於其中的原因，同樣的我們使用前述的四種理論來進行討論。

一、期望值理論的分析

若人的思維方式是採取「期望值理論」，則上述問題他將會以期望值的大小來選擇

[6] Kahnema (2011) 未提到此實驗之實驗數據，僅提及大多數人不願意參與。

DOI:10.6814/NCCU201900637

採取的決策。在問題七中，賭局的期望值為獲得 25 元，對於採用這項理論做為思維方式的人而言，應該都會接受這項賭局才對。但是實際結果卻出人意外，大多數人都不願意參與。

關於不參與賭局的原因，如先前 Kahneman 提到，在好幾個實驗中發現，「損失規避的比例」（loss aversion ratio）大約介於 1.5 到 2.5 之間。所以在這個問題中，比例為 1.5，正好處於大多數人不願意承受的範圍內，而期望值理論的分析結果並不符合大多數人的思維方式。

二、預期效用理論的分析（極大化預期總效用模型）

在預期效用理論中，獲利的效用是用各種狀況下的總財富的總效用，搭配上機率的概念來評定。對於問題七，假設起始財富為w，且w不小於0。接受（E）及拒絕賭局（F）的效用函數可分別表示為：

$$U(E) = 0.5 \times u(w + 150) + 0.5 \times u(w - 100) \tag{4-9a}$$

$$U(F) = u(w) \tag{4-9b}$$

我們在此假設此人為風險趨避，以符合邊際效用遞減且計算過程不產生虛數之效用函數：$u(x) = \sqrt{x + 100}$為例，代入計算可得：

$$0.5\sqrt{(w + 100) + 150} + 0.5\sqrt{(w + 100) - 100} = \sqrt{w + 100}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4w^2 + 1{,}000w} = \sqrt{4w^2 - 600w + 22500} \Rightarrow w = 56.25$$

$$\Rightarrow \quad U(E) = U(F)，當w = 56.25$$

$$U(E) < U(F)，當0 \leq w < 56.25$$

$$U(E) > U(F)，當w > 56.25 \tag{4-9c}$$

我們可以看出在問題七中，隨著w值的不同，預期效用理論會得出不一樣的分析結果，無法表現出我們大多數人無論起始財富為多少，都會規避風險的行為。對大部分人來說，失去 100 元的恐懼大於得到 150 元的快樂。唯有當可能獲得的利得大於可能損失一定比率時，才能夠蓋過失去的恐懼，因此預期效用理論並無法真實反映出，在此例子下我們一般人的決策行為。

DOI:10.6814/NCCU201900637

三、展望理論的分析

在展望理論中，效用是用相對於參考點得到或損失的財富來評定的。在獲利區間為風險趨避其邊際效用遞減，損失區間為風險愛好其邊際效用遞增，只是對「失」的反應強過對「得」的反應，也就是利得區間的價值函數斜率的絕對值小於損失區間。我們在此假設在利得區間的價值函數$v(x) = \sqrt{x}/2$，當 $x \geq 0$；在損失區間的價值函數為$v(-x) = -\sqrt{x}$，當$x < 0$，為了分析方便，令權數函數為$\pi(p) = p$。將數字代入，問題七可表示為：

$$V(E) = 0.5 \times v(150) + 0.5 \times v(-100) \quad \text{（4-10a）}$$

$$V(F) = v(0) \quad \text{（4-10b）}$$

經過簡單的計算可得：

$$0.25\sqrt{150} - 0.5\sqrt{100} < 0 \Rightarrow \sqrt{9.375} - \sqrt{25} < 0 \quad \Leftrightarrow V(E) < V(F) \quad \text{（4-10c）}$$

其分析結果為拒絕賭局，與我們大多數人的反應一致。

因此展望理論和預期效用理論比較起來，更能正確表達我們一般人對於這類問題的決策行為。但是這個理論依舊是建構在「基數總效用」這個有缺陷的架構下，所衍生出的理論。

四、序數邊際效用理論的分析

對於問題七，在新理論的分析架構中，進行一單位的選擇因此$x = 1$。在這邊我們假設獲得 150 元的情境對邊際利得的影響為α，且α為ρ_α的函數，其中ρ_α代表獲得 150 元發生的機率；同樣的將得 0 元及損失 100 元的情境對邊際利得的影響分別表示為β及γ，且兩者分別為ρ_β和ρ_γ的函數，ρ_β和ρ_γ分別表示兩者的機率。接著以直觀的感覺，得到 150 元的情境對於利得的影響為正、得到 0 元的情境對於利得的影響為 0 及損失 100 元的情境對邊際利得的影響為負，因此$g_\alpha^x > 0$、$g_\beta^x = 0$及$g_\gamma^x < 0$。而發生的機率越高，其影響的程度就越強烈，因此$d\alpha/d\rho_\alpha$、$d\beta/d\rho_\beta$及$d\gamma/d\rho_\gamma$皆為正。接受及拒絕賭局可分別表示為：

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$g^x(E) = g^x\big(x = 1\,;\alpha(\rho_\alpha = 0.5), \beta\big(\rho_\beta = 0\big), \gamma(\rho_\gamma = 0.5)\big) \tag{4-11a}$$

$$g^x(F) = g^x\big(x = 1\,;\alpha(\rho_\alpha = 0), \beta\big(\rho_\beta = 1\big), \gamma\,(\rho_\gamma = 0)\big) \tag{4-11b}$$

我們可以看出除β不影響外，α及γ兩種影響力量交錯，可能導致三種不同的結論。我們會偏好選擇利得越高的選項，將上述參數對於$g^x(E)$和$g^x(F)$的影響列表如下：

表 4-5：損失厭惡-序數邊際效用對於問題七的三種可能性

ρ_α透過α和ρ_γ透過γ對$g^x(E)$和$g^x(F)$的影響	$g^x(E)$和$g^x(F)$的大小	最後選擇的選項
贏得 150 元的情境α的影響>損失 100 元的情境γ的影響	$g^x(E) > g^x(F)$	(E)參與賭局
贏得 150 元的情境α的影響=損失 100 元的情境γ的影響	$g^x(E) = g^x(F)$	(E)參與或(F)拒絕賭局皆可
贏得 150 元的情境α的影響<損失 100 元的情境γ的影響	$g^x(E) < g^x(F)$	(F)拒絕賭局

首先從贏 150 元的情境α的角度來看，(E)選項比(F) 選項來的好；而從得 0 元的情境β的角度來看，(E)選項跟(F)選項沒有差異；最後從輸 100 元的情境γ的角度來看，(E)選項比(F)選項來的差。因此當贏得 150 元的情境α的影響大於損失 100 元的情境γ的影響時，$g^x(E)$大於$g^x(F)$，因此會選擇參與賭局，其他兩種選擇結果的分析亦同。我們發現序數邊際效用理論，隨著各個參數影響程度的不同，而有不同的答案，能充分表達所有人所有可能的選擇。我們在這裡面也能看出在和展望理論相同的規避損失的假設下，贏得 150 元的機率ρ_α透過α的影響小於損失 100 元的機率ρ_γ透過γ的影響時，可得出和展望理論相同的結論。和展望理論的結果相同，但卻是在一個更為正確的架構下做出的分析，能通過正向單調轉換的檢驗。

第四節　序數邊際效用理論解決聖彼得堡悖論及阿萊悖論

一、序數邊際效用理論解決聖彼得堡悖論

在本小節中，我們試著用序數邊際效用理論來解決聖彼得堡悖論的問題，跟展望理論相同，序數邊際效用理論也是用得與失來評定效用，但最大的不同之處在於，展望理論仍舊是建立在基數總效用這個有缺陷的架構下進行分析，而序數邊際效用理論則是以

DOI:10.6814/NCCU201900637

序數邊際效用而非總效用來進行思考。

對於聖彼得堡悖論的問題，在序數邊際效用理論的分析架構中，我們令各情況下的機率及利得分別為a_n及z_n；選擇的單位數為x，進行一單位的選擇因此$x=1$；令整個對利得的總影響函數為α，α為各種可能情形下a_n及z_n的函數。因此我們可以將邊際利得等於邊際損失表示如下：

$$g^x\left(x;\alpha\left(a_1=1,z_1=\frac{1}{2},a_2=2,z_2=\frac{1}{4},\dots\dots a_n=2^{n-1},z_n=\frac{1}{2^n}\dots\dots\right)\right)=l^p(p) \quad (4\text{-}12)$$

由（4-12）式中可以觀察出決策者將對全部的可能情形進行評價，得出了影響函數α的值，並用α的值來決定邊際利得，接著考慮$g^x=l^p(p)$來得出所願意支付的價格p。

從這邊我們可以觀察出，影響函數α以及願意支付的價格可以不是無窮大，因人而異隨著評價的不同會有不同的值。序數邊際效用理論能夠允許不同人做不同的選擇，在不失去任何經濟意涵的情況下，充份表達各種不同的可能性。

二、序數邊際效用理論解決阿萊悖論

同樣地在本小節中我們試著用序數邊際效用理論來解決阿萊悖論的問題。首先將先前阿萊悖論所提到的第一個問題再次列出如下：

問題一：A 跟 B 選項你會選那一個?

A：確定獲得 100 萬元。

B：10%的機率獲得 500 萬元，89%的機率獲得 100 萬元，1%的機率獲得 0 元。

對於問題一，在序數邊際效用理論的分析架構中，x為選擇的數量，進行一單位的選擇，因此$x=1$。在這邊我們假設獲得 500 萬的情境對邊際利得的影響為α，且α為ρ_α的函數，其中ρ_α代表獲得 500 萬發生的機率；同樣的將獲得 100 萬及 0 元的情境對邊際利得的影響分別表示為β及γ，且兩者分別是ρ_β和ρ_γ的函數，ρ_β和ρ_γ分別表示兩者的機率。兩個選項分別用序數邊際效用理論表達為：

$$g^x(A)=g^x\big(x=1;\alpha(\rho_\alpha=0),\beta(\rho_\beta=1),\gamma(\rho_\gamma=0)\big) \quad (4\text{-}13a)$$

$$g^x(B)=g^x\big(\hat{x}=1;\hat{\alpha}(\rho_{\hat{\alpha}}=0.1),\hat{\beta}(\rho_{\hat{\beta}}=0.89),\hat{\gamma}(\rho_{\hat{\gamma}}=0.01)\big) \quad (4\text{-}13b)$$

DOI:10.6814/NCCU201900637

首先以直觀的感覺，得到 500 萬及 100 萬的情境對於利得的影響為正，而得到 0 元的情境對於利得的影響為零，因此$g_\alpha^x > 0$、$g_\beta^x > 0$及$g_\gamma^x = 0$。而發生的機率越高，其影響的程度就越強烈，因此$d\alpha/d\rho_\alpha$、$d\beta/d\rho_\beta$及$d\gamma/d\rho_\gamma$皆為正。我們可以得到α及β兩種力量互相交錯，並且導致三種不同的結論。我們會偏好選擇利得越高的選項，將上述參數對於$g^x(A)$和$g^x(B)$的影響，以及可能的結果簡單列表如下：

表 4-6：序數邊際效用對於阿萊悖論第一個問題的三種可能性

ρ_α透過α和ρ_β透過β對$g^x(A)$和$g^x(B)$的影響	$g^x(A)$和$g^x(B)$的大小	最後選擇的選項
贏得 500 萬的機率ρ_α的影響<得到 100 萬的機率ρ_β的影響	$g^x(A) > g^x(B)$	(A)確定獲得 100 萬元
贏得 500 萬的機率ρ_α的影響=得到 100 萬的機率ρ_β的影響	$g^x(A) = g^x(B)$	(A) 確定獲得 100 萬元或(B)10%的機率獲得 500 萬元，89%的機率獲得 100 萬元，1%的機率獲得 0 元
贏得 500 萬的機率ρ_α的影響>得到 100 萬的機率ρ_β的影響	$g^x(A) < g^x(B)$	(B)10%的機率獲得 500 萬元，89%的機率獲得 100 萬元，1%的機率獲得 0 元

首先從贏 500 萬α的角度來看，(A)選項比(B)選項來的好；而從得 100 萬β的角度來看，(A)選項比(B)選項差；最後從得 0 元γ的角度來看，(A)選項和(B)選項沒有差益。因此當贏得 500 萬的情境α的影響小於得 100 萬的情境β的影響時，$g^x(A)$大於$g^x(B)$，因此會選擇A選項，其他兩種選擇結果的分析亦同。不同的人可有不同的選擇，從（表 4-6）我們可以得知，在新理論的分析下可能有三種結果，包含了實驗中大部分人都選 A 的情形。

接著討論阿萊悖論所提到的第二個問題，同樣的先將問題列出如下：

問題二：C 跟 D 選項你會選那一個?

C：11%的機率獲得 100 萬元，89%的機率獲得 0 元。

D：10%的機會獲得 500 萬，90%的機會獲得 0 元。

在同樣的分析架構中，我們將兩個選項分別用序數邊際效用理論表達為：

$$g^x(C) = g^x\big(x = 1; \alpha(\rho_\alpha = 0), \beta\big(\rho_\beta = 0.11\big), \gamma(\rho_\gamma = 0.89)\big) \tag{4-13c}$$

DOI:10.6814/NCCU201900637

$$g^x(D) = g^x\left(\hat{x} = 1; \hat{\alpha}(\rho_{\hat{\alpha}} = 0.1), \hat{\beta}\left(\rho_{\hat{\beta}} = 0\right), \hat{\gamma}(\rho_{\hat{\gamma}} = 0.9)\right) \tag{4-13d}$$

同樣的以我們直觀感覺，可以知道 500 萬及 100 萬對於利得的影響為正，而得到 0 元對於利得的影響可能為零，因此$g_\alpha^x > 0$、$g_\beta^x > 0$及$g_\gamma^x = 0$。而發生的機率越高，其影響的程度就越強烈，因此$\frac{d\alpha}{d\rho_\alpha}$、$\frac{d\beta}{d\rho_\beta}$及$\frac{d\gamma}{d\rho_\gamma}$皆為正。我們一樣可以得到兩種力量互相交錯，並且導致三種不同的結論。我們會偏好選擇利得越高的選項，將上述參數對於$g^x(C)$和$g^x(D)$的影響，以及可能的結果列表如下：

表 4-7：序數邊際效用對於阿萊悖論第二個問題的三種可能性

ρ_α透過α和ρ_β透過β對$g^x(C)$和$g^x(D)$的影響	$g^x(C)$和$g^x(D)$的大小	最後選擇的選項
贏得 500 萬的情境α的影響<得到 100 萬的情境β的影響	$g^x(C) > g^x(D)$	(C) 11%的機率獲得 100 萬元，89%的機率獲得 0 元
贏得 500 萬的情境α的影響=得到 100 萬的情境β的影響	$g^x(C) = g^x(D)$	(C) 11%的機率獲得 100 萬元，89%的機率獲得 0 元或(D)10%的機會獲得 500 萬，90%的機會獲得 0 元
贏得 500 萬的情境α的影響>得到 100 萬的情境β的影響	$g^x(C) < g^x(D)$	(D)10%的機會獲得 500 萬，90%的機會獲得 0 元

首先從贏 500 萬的情境α的角度來看，(C)選項比(D)選項來的差；而從得 100 萬的情境β的角度來看，(C)選項比(D)選項來的好；最後從得 0 元的情境γ的角度來看，(C)選項和(D)選項沒有差益。因此當贏得 500 萬的情境α的影響大於得 100 萬的情境β的影響時，$g^x(C)$大於$g^x(D)$，因此會選擇C選項，其他兩種選擇結果的分析亦同。不同的人可有不同的選擇，從（表 4-7）我們可以得知，在新理論的分析下可能有三種結果，包含了實驗中大部分人都選(D)的情形。

由上面序數邊際效用的簡單模型，我們可以了解新理論能夠確實解讀阿萊悖論的實驗結果，而且不會產生阿萊悖論的矛盾。雖然模型未包含其它可能影響的因素，例如 500 萬對邊際利得產生的影響程度會大於 100 萬，但新理論仍舊不失為一個有潛力的分析方法。

DOI:10.6814/NCCU201900637

第五章　結論

本文採用期望值理論、預期效用理論、展望理論及林忠正提出的序數邊際效用理論，探討一個理性的決策者，面對各種不確定性的問題時如何做出決策。並使用 Kahneman《快思慢想》一書中的三個主題，比較在這四種理論的分析架構下，有何異同之處，並得出序數邊際效用理論面對上列問題時皆能合理解釋人們所做出的各種決策。

現代經濟理論在極大化總效用理論的架構下，採行兩套主要的消費者效用理論，分別為序數總效用理論以及基數總效用理論。在討論不確定性的問題時，當代最主流的預期效用理論以及展望理論，都是建立在基數總效用理論的基礎上。雖然避免了序數總效用理論，在正向單調轉換後二次微分項無法維持恆定，導致必需放棄間接衍生的經濟意義的問題；但基數總效用理論，本身卻也有添加的假設太過強烈，導致在現實生活中幾乎不可能成立的問題。故我們在此試著使用林忠正提出一套避免舊效用理論之缺點並能涵括其優點的新效用理論——序數邊際效用理論來進行分析。

研究個人面對各種不確定性的問題時如何進行決策，一直是經濟學上的一項重要問題。是以本文嘗試以三種重要的舊決策理論以及新理論分析之，這是歷年來首次使用新理論分析不確定性問題的文章。分析結果發現，面對「尋求或規避風險」、「參考點的不同」、「損失厭惡」、聖彼得堡悖論以及阿萊悖論等問題，從能夠解釋決策行為的程度來看，預期效用理論優於期望值理論，展望理論優於預期效用理論，而序數邊際效用理論的解釋能力又優於展望理論。

綜上所述，序數邊際效用理論或能成為分析不確定性的一套有潛力的方法，本文研究結果可作為進一步應用序數邊際效用理論探討不確定性的指南。

DOI:10.6814/NCCU201900637

參考文獻

林忠正，(2015a)，〈序數與基數總效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（1），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015b)，〈序數與基數總效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（2），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015c)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數總效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（3），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015d)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（5），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015e)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生(修正稿)〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（7b），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2017a)，〈季節性商品的需求理論 I：極大化總效用模型的無能之處〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（57），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2017b)，〈季節性商品的需求理論 II：序數邊際效用分析法的季節性商品基本模型〉，邁向需求理論的再次重建之路：跨界得與失的序數邊際效用分析法（58b），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2018a)，〈如何得到古典效用函數：隨身攜帶著一把標準效用單位的尺到處丈量〉，邁向需求理論的再次重建之路，跨界得與失的序數邊際效用分析法（109），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2018b)，〈什麼是序數總效用理論？一隻新怪獸：「正向單調轉換」究竟隱含什麼效用可測量性的意義〉，邁向需求理論的再次重建之路，跨界得與失的序數邊際效用分析法（110），台灣經濟學會研討論文。

DOI:10.6814/NCCU201900637

林忠正，(2018c)，〈什麼是基數總效用理論？另一隻新怪獸：「正向線性轉換」究竟隱含什麼效用可測量性的意義〉，邁向需求理論的再次重建之路，跨界得與失的序數邊際效用分析法（111），台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2019)，*極大化總效用理論的世界觀—一種國王新衣的理論*，未出版，台北市。

楊秉訓，(2013)，《不確定與訊息經濟學》，台北：翰蘆。

蔡禮鴻，(2009)，「框架理性：以展望理論檢驗預期效用理論的普遍性」，碩士論文，國立成功大學都市計畫學系。

關永強、張東剛，(2014)，〈英國經濟學的演變與經濟史學的形成(1870-1940)〉，中國社會科學，4，45-65。

Allen, R.G.D., 1935. "A Note on the Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 155-158.

Bernardelli, H., 1952. "A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility," *Economica*, 19:75, pp. 254-268.

Bernoulli, D. (1738/1954). "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk," *Econometrica*, 22(1): 23-36.

Edgeworth, F.Y. (1881) *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, London: Kegan Paul.

Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Economica*, NS, 1:52-76, 196-219.

Johnson, W.E. (1913) "The Pure Theory of Utility Curves," *The Economic Journal*, pp. 483-513.

Kahneman, D. and A. Tversky (1979). "Prospect Theory - Analysis of Decision Under Risk," *Econometrica*, 47(2): 263-291.

Kahneman, D. and A. Tversky (1984). "Choices, Values, and Frames," *American Psychologist* 39(4): 341-350.

DOI:10.6814/NCCU201900637

Kahneman, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*, New York: Farrar, Straus and Giroux. 洪蘭譯，2013，《快思慢想》，台北：天下文化。

Lin, C.C. and S.S. Peng (forthcoming), “The Role of Diminishing Marginal Utility in the Ordinal and Cardinal Utility Theories,” *Australian Economic Papers*.

Machina, M. J. (1987). “Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved,” *The Journal of Economic Perspectives,* 1(1): 121-154.

Marshall, A. (1920). *Principles of Economics: An Introductory Volume*, London; New York: Macmillan for the Royal Economic Society.

Pareto, V. ([1909] 1971). *Manual of Political Economy*, New York: Kelley.

Samuelson, P.A. (1938). “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65-70.

Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*. New York, Wiley.

Slutsky, E. (1915/1952), “Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore,” *Giornale degli economisti e rivista di statistica*, vol. 51, 1-26; translated by O. Ragusa as “On the Theory of the Budget of the Consumer” in G. J. Stigler and K. E. Boulding, eds., *Readings in Price Theory*, Homewood, Ill.: Irwin (1952), 27-56.

Von Neumann, J. and O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton, N.J., Princeton University Press.

DOI:10.6814/NCCU201900637