

國立政治大學統計學研究所

碩士學位論文

利用資料驅動方法解決汽車服務系統的  
位區途程問題

A Data Driven Approach for Solving the Location-Routing  
Problem in Vehicle Service Systems

指導教授：洪英超 博士

研究生：林育丞 撰

中華民國一零八年六月

## 謝誌

歷經兩年的碩士生活，我要感謝洪英超老師在學業與論文上的指導，並時常提點我未來的方向與社會的趨勢，讓我了解自己未來出社會的優勢與不足之處。感謝系上各位老師對我的教導與同學在課業、報告上的幫助，讓我能夠順利銜接統計所的課程並踏實的學習。也感謝我的家人與朋友在這段日子中的陪伴與鼓勵，這段日子過得很充實，學習到不管是課業上或課業以外的知識，最終也順利完成學業。



## Abstract

Developing efficient routing strategies for vehicles as well as determining the optimal facility (such as the gasoline or charging station) locations is an important component of the service infrastructure. In this thesis, we introduce a location-routing problem for a general vehicle service system with stochastic demand arrivals and locations. The objective is to find the optimal routing strategy and the facility locations so as to minimize the mean response time (including travel, waiting and service time) of demands under some regulation conditions. Specifically, we have shown that under the stability and heavy traffic assumption, the optimization problem can be approximately formulated as a well-known K-medoids clustering problem based on a fairly large number of observed demand data. With such a formulation, a data driven approach is then proposed to estimate the “medoids” that correspond to the optimal facility locations, while the associated clustering boundaries constitute a routing strategy that directs the within-cluster demands (i.e. demands in a sub-region) to the service station located at the medoid. However, solving the clustering problem is not an easy task since the  $L^2$ -norm distance is considered and a size constraint is placed on each cluster by the stability assumption. In order to solve the desired clustering problem with size constraints, we have introduced two algorithms – one is designed based on gradient search for finding the medoids and the other is designed for adjusting the cluster size so as to meet the constraint. In addition, computer simulations show promising results for systems with various demand inter-arrival time distributions and demand location densities when the vehicle speed is not particularly fast.

Index Terms—Location-routing problem, EV charging infrastructure, mean response time, queueing system, heavy traffic approximation, clustering with size constraints

## 摘要

汽車在行駛過程中會不斷消耗能源，由於車內能裝載的能源容量有限，且我們期望當有服務需求時盡量縮短服務的花費時間，因此開發汽車服務系統的位區途程策略（Location-Routing Problem, LRP）是一項重要的目標。本文為第一篇利用資料驅動方法結合統計機器學習的概念來解決這個既重要又複雜的數學問題，我們介紹了如何在一固定區域內，根據服務需求的歷史資料來建構位區途程策略，找到最佳路由策略與最佳設施位置，並達成極小化平均反應時間（包含平均移動時間、平均等待時間、平均服務時間）的目標。在交通繁忙定理與穩定性條件下，若服務需求地點夠多時，結果顯示此最佳化問題可近似於有各群點數限制之“K-medoids”分群問題，其中的中心點為服務設施位置，而分群結果即為路由策略，位於群內的服務需求地點會被路由策略引導至位於群中心的服務設施。然而此解決此分群問題並不是件容易的事，因為考慮的是  $L^2$ -norm 且穩定性條件限制了各群內的點數多寡。為了解決此問題，我們設計了兩個演算法，一個是利用梯度下降法尋找最佳服務設施位置，另一個調整群內點數以達到穩定性條件。此外，藉由電腦模擬結果可得知當車速不超過某一臨界值時，不同分佈的服務需求地點與不同分配的服務需求間隔時間，皆可找出最佳的服務設施地點與對應的最佳路由策略。

關鍵詞：位區途程問題、電動汽車充電設施、平均反應時間、等候理論，交通繁忙定理、有尺寸限制的分群問題

# 目錄

第一章 研究動機.....	1
第二章 汽車服務系統與穩定性問題.....	3
第一節 汽車服務系統簡介.....	3
第二節 系統穩定性.....	5
第三章 最佳化問題.....	8
第一節 路由策略.....	8
第二節 位區途程的最佳化問題.....	10
第三節 平均等待時間的估計.....	13
第四節 將位區途程問題轉為分群問題.....	14
第五節 設施地點成本和資源配置上限之考量.....	20
第四章 電腦模擬.....	22
第一節 均勻分配之需求地點分佈.....	23
一、 需求間隔時間服從伽馬分配.....	23
二、 需求間隔時間服從指數分配.....	26
三、 最佳位區途程策略.....	28
第二節 截斷常態分配之需求地點分佈.....	30
一、 需求間隔時間服從伽馬分配.....	30
二、 需求間隔時間服從指數分配.....	32
三、 最佳位區途程策略.....	34
第五章 結論與探討.....	37
參考資料.....	39

## 圖目錄

圖 2-1. 服務需求地點產生示意圖 .....	3
圖 2-2. 車輛服務系統的運作示意圖 .....	7
圖 3-1. 路由策略示意圖 .....	9
圖 3-2. 邊界調整示意圖 1 .....	17
圖 3-3. 邊界調整示意圖 2 .....	17
圖 3-4. 服務需求地區 $G$ 內的供電區示意圖 .....	21
<b>需求分配服從均勻分配</b>	
圖 4-1. 以均勻分配模擬出的獨立服務需求地點 .....	23
圖 4-2. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均移動時間 .....	24
圖 4-3. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均等待時間 .....	25
圖 4-4. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均反應時間 .....	25
圖 4-5. $\text{Exponential}(5.94)$ 需求間隔時間下的平均移動時間 .....	26
圖 4-6. $\text{Exponential}(5.94)$ 需求間隔時間下的平均等待時間 .....	27
圖 4-7. $\text{Exponential}(5.94)$ 需求間隔時間下的平均反應時間 .....	27
圖 4-8. 演算法 2 的第一次迭代分群結果 .....	28
圖 4-9. 演算法 2 估計出的最佳分群結果 .....	29
<b>需求分配服從截斷常態分配</b>	
圖 4-10. 以截斷常態分配模擬出的獨立服務需求地點 .....	30
圖 4-11. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均移動時間 .....	31
圖 4-12. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均等待時間 .....	31
圖 4-13. $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ 需求間隔時間下的平均反應時間 .....	32

圖 4-14. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均移動時間.....	33
圖 4-15. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均等待時間.....	33
圖 4-16. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均反應時間.....	34
圖 4-17. 演算法 2 的第一次迭代分群結果.....	35
圖 4-18. 演算法 2 估計出的最佳分群結果.....	35



# 第一章 研究動機

近年電動汽車的製造量與銷售量皆逐年增加，在 2018 年全世界的電動汽車已超過 100 萬輛，由於環保意識提升，使用電動汽車能有效降低空氣污染，因此如何研發、改良與製造電動汽車已成為一個熱門的主題，在製造技術愈來愈成熟之下，可預期未來的製造量與銷售量仍會不斷提高，根據一項研究報告，2020 年電動汽車可望超過 450 萬輛[1]。電動汽車在行駛過程中需要消耗電力，無論是電動汽車或是一般的燃油汽車都會有補充能源的服務需求，兩者不同的是電動汽車可在家中設置充電器來補充電力，但家中的充電設備往往較簡易，需要花費的充電時間較長，將電池完全充滿需耗費超過六小時的時間。而在實務上，當汽車在行駛中出現服務需求時，要立即返回家中充電基本上是不可行的，因此如何在公共區域部署服務設施成為很重要的課題。從供應商角度，設置良好的服務設施位置可以增加服務量並提高利潤，從需求者角度，期望能夠快速到達服務設施並滿足其服務需求，則其目標為如何設置良好的服務設施位置來縮短服務需求需要花費的時間。並且當服務設施被設立後，應將有服務需求之汽車按比例分配至各服務設施，以免造成某些服務設施出現擁擠現象。而此問題關係到路由策略的設計，一個好的路由策略能夠讓供應商在單位時間內提供較多的服務，在利潤提高之餘也縮短服務需求者等待的時間。

目前有愈來愈多研究是與電動汽車的服務設施相關的問題，稱為設施區位問題（Facility Location Problem），包含以配電系統為基礎的研究[2]-[4]，以及與電動汽車有關的各類問題[5]-[8]，也提供很多演算法來解決[12][13]。許多文章考慮了服務設施與配電網絡的影響[11]-[14]，有些則關於路由策略問題（Routing Problem）[15]-[22]，也有些文章考慮了路由策略對充電成本的影響[23][24]。實務上，目前



Google Map 可以藉由給定的起始點與終點篩選較為順暢的路線，並告訴駕駛需要花多久的時間可以到達目的地，利用這些由 Google 網站提供的行車資訊（如車速或行車時間），我們可以設計出好的路由策略告訴駕駛應該前往哪一個服務設施接受服務的效率最高。

本文的主題是想要結合服務設施地點與路由策略兩大問題，稱為位區途程問題（Location-Routing Problem, LRP），這是一項重要又有趣的數學問題[25]，在各個領域也有許多不同的解法，本文主要是以“資料驅動分法”來找出最佳策略，將資料科學結合統計機器學習的概念來解決非常重要的位區途程問題。利用服務需求分佈地點、長期平均車速以及服務設施的容量限制的資料特性，同時找出服務設施設置的理想位置與對應的最佳路由策略。在交通繁忙定理與一些假設條件之下，最佳化問題可被簡化為分群問題，但各群的大小將受到限制，我們利用排隊理論來模擬以解決參數假設的複雜性，最後設計了一套演算法來解決分群問題，並利用電腦模擬的方式，在假設一些基本條件下，得到最終的位區途程策略。

在接下來的第二章會介紹汽車服務系統的架構，定義服務需求出現地點服從隨機分配、汽車的車速與服務設施個數等，並且服務設施的服務需求量必須滿足穩定性條件。在第三章會將設施區位問題與路由策略問題合併為一個最佳化問題，目標是讓平均反應時間最短，在交通繁忙定理的假設下估計平均等候時間，並將最佳化問題轉為分群問題，且具有各群大小的限制，而最終我們設計兩個演算法來解出此分群問題的解。第四章將利用電腦模擬的方式，模擬需求地點並套用第三章的假設，輔助說明我們找尋位區途程問題的方法，最後在第五章得出結論。

## 第二章 汽車服務系統與穩定性問題

### 第一節 汽車服務系統簡介

本節會介紹整個汽車服務系統的運作過程，並對系統的變量做一些基本假設。首先假設位於平面上的服務需求地區  $G \subset \mathbb{R}^2$  且  $G$  有界，在此區域內的汽車出現服務需求，而服務需求將會受到服務需求地區  $G$  內的人口分佈特性而改變，人口分佈較密的地方汽車量也較多，服務需求出現量也會增加，在此我們假設服務需求出現地點服從獨立隨機分配  $F$ ，其機率密度函數為  $f(x)$ ， $\int_G f(x) dx = 1$ 。如圖 2-1 所示，服務需求地區  $G$  內的每一點都是一個服務需求，由一個機率密度函數  $f$  生成，但這些點並不是同一時間產生，由於有服務需求的汽車隨時都會產生，因此我們假設服務需求產生間隔時間服從獨立隨機分配  $\Gamma$ ，則可算出單位時間的服務需求量为：

$$\lambda = \frac{1}{E(\Gamma)}, \quad (1)$$

則  $G$  內每單位時間會由函數  $f$  產生  $\lambda$  單位的服務需求地點。

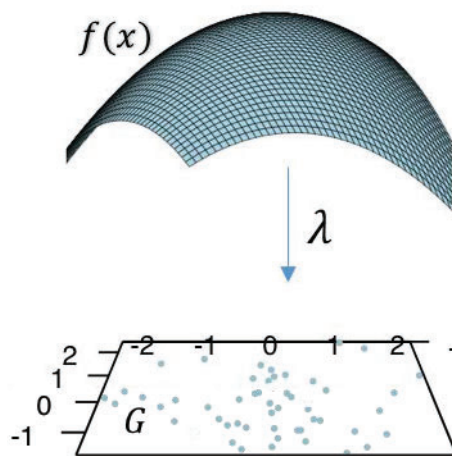


圖 2-1. 服務需求地點產生示意圖。

供應商為了滿足服務需求，會在服務需求地區  $G$  內設置相對應得服務設施，假設總共設立  $K$  個服務設施，各服務設施的座標表示為  $S_1, S_2, \dots, S_K$ 。每個服務設施受服務供應商的配置、地理條件上的限制，甚至是電信公司的配電問題或石油公司的儲油槽容量的限制，皆會有其對應的服務單位個數，即  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$ ，如果每個服務單位的服務量皆相同時（假設為 1），代表  $S_k$  服務設施可同時提供  $\mu_k$  單位的服務量。根據此假設，每個服務設施  $S_k$  擁有  $\mu_k$  個並行服務器（parallel servers），如果每個服務器單位時間可提供 1 輛汽車的服務需求，對整個系統而言，單位時間系統可提供的汽車總服務量為  $\mu = \sum_{i=1}^K \mu_i$ 。

當服務需求產生時，有服務需求的汽車便進入了服務系統中，第  $i$  輛汽車依據「路由策略」的指示，立即從服務需求地點  $x_i$  前往指定的第  $i$  服務設施，假設  $t_i$  為需求發生時間，則前往服務設施過程中的車速可表示為  $v(t_i, x_i, S_i)$ 。這邊會演伸出兩個問題：第一是第  $i$  服務設施地點  $S_i$  設置在何處；第二是哪一種路由策略會是最有效率的（例如：能讓駕駛花最少的時間來完成服務），而這兩個問題是會相互影響的，我們將在第三章解決此問題。由於每一輛前往服務設施的汽車車速  $v(t_i, x_i, S_i)$  我們無法得知，加上汽車行駛均會受到道路最高車速  $\bar{v}$  的限制，因此在區域  $G$  內，我們將車輛在道路上行駛車速  $v$  以長期系統平均車速來估計，即

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v(t_i, x_i, S_{(i)}) \leq \bar{v}, \quad (2)$$

$S_{(i)} \in \{S_1, \dots, S_K\}$ ， $i = 1, \dots, K$ 。接著，假設某一服務需求地點  $x$  在路由策略  $\pi$  的引導下行駛至  $S_k$ ，則汽車從服務需求地點到服務設施平均所花費的時間稱為平均移動時間（Mean travel time），即：

$$\text{平均移動時間} = \frac{\|x - S_k\|}{v}. \quad (3)$$

在汽車到達指定服務的第  $k$  服務設施後，該服務設施的服務量為  $\mu_k$ ，若此時正在接受服務的車輛小於  $\mu_k$  輛車，則此汽車可立即接受服務，反之，若車輛數目大於  $\mu_k$  時，代表此服務設施已經客滿，汽車必須依照到達該設施的先後順序進行排隊，並採取先到先接受服務的策略（first-come first-served, FCFS）。接著我們對汽車的服務時間做假設，第  $k$  服務設施中的第  $j$  個服務器之服務時間（service time）表示為  $\sigma_k^j$ ，滿足：

$$\sigma_k^j \text{ 皆相互獨立，對所有 } j, k, \quad (4)$$

$$E(\sigma_k^j) \equiv 1, \text{ 對所有 } j, k, \quad (5)$$

$$\text{Var}(\sigma_k^1) = \text{Var}(\sigma_k^2) = \dots = \text{Var}(\sigma_k^{\mu_k}), \text{ 對所有 } k, \quad (6)$$

其中  $j = 1, \dots, \mu_k, k = 1, \dots, K$ 。假設每一個服務器皆是獨立的運作且服務速率皆相同，則每一個服務設施的服務器服務時間機率分配皆相互獨立，並假設每個服務設施的服務單位的服務時間之期望值與變異數皆相同。最後當汽車完成服務後，便會立即離開服務系統，排隊中的車輛便會按排隊先後順序遞補接受服務。

## 第二節 系統穩定性

前一節提到當第  $k$  服務設施中，正在接受服務的汽車數大於  $\mu_k$  輛車時，在此之後到達的汽車便會依照到達的先後順序近於排隊，如果每單位時間被路由策略  $\pi$  引導至服務設施的汽車數大於該服務設施的服務量，面臨到的問題是排隊隊伍會無限增長，等待時間會無限增大。發生此問題的主要原因是因為系統容量（capacity）不足，此時供應商可藉由增加服務設施數目或增加服務單位數來解決，若單位時間的服務量已經足夠，則另一個原因就是路由策略沒有將車輛以正確比例分配至各個服務設施，進而造成某幾個服務設施爆滿的情況，而這兩個問題我們必須先克服，才能進入第三章的位區路由選擇問題。

首先，當服務需求地區  $G$  內有多少量的服務需求，供應商就應提供相對應的服務量來滿足需求，以獲取最高利潤，因此單位時間的系統服務量要高於單位時間的系統總需求量，以達成系統穩定性：

$$\lambda < \mu = \sum_{i=1}^K \mu_i, \quad (7)$$

若滿足(7)則單位時間的服務量已經足夠，接下來要解決路由策略的分配比例問題。

在此我們將路由策略表示成函數  $h_k$ ，假設在服務需求地區  $G$  內有  $n$  個服務需求地點  $x_1, \dots, x_n$ ，並假設在此區上設立  $K$  個服務設施，在路由策略  $\pi$  的引導下，定義函數  $h_k$ ：

$$h_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{當服務需求地點 } x \text{ 被引導至服務設施 } S_k, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad (8)$$

$k = 1, \dots, K$ 。由此函數可知當服務需求地點  $x_i$  被路由策略引導至第  $k$  服務設施時，則函數值  $h_k(x_i)$  等於 1，否則為 0。並藉由函數  $h_k$  可進一步算出長時間汽車被送往  $S_k$  的比例 (long-term proportion)：

$$r_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n h_k(x_i)}{n}, \quad (9)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。代表長期下來會有多少比例的车辆被引導至第  $k$  服務設施，則  $r_k$  會滿足以下條件：

$$0 < r_k < 1, \text{ 其中 } k = 1, \dots, K, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^K r_k = 1. \quad (11)$$

我們以圖像說明服務系統的運作 (圖 2-2)，假設共有  $K$  個服務設施，每單位時間會有服務需求量  $\lambda$ ，假設這些需求按照(9)的比例被分配到各服務設施，每個服

務設施有 $\mu_k$ 個並行的服務器提供 $\mu_k$ 單位的服務量，且進入服務設施需要排隊，並按先到先服務的策略進行。

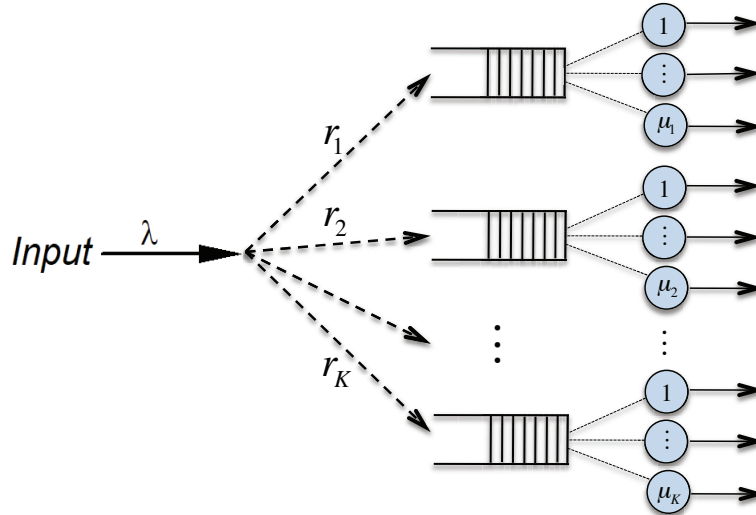


圖 2-2. 車輛服務系統的運作示意圖。

接著我們需要控制每一個服務設施的服務需求量，使每一個服務設施都滿足所謂的“穩定性條件”，即每一個服務設施的單位時間服務量要高於其單位時間受路由策略  $\pi$  引導而來的需求量：

$$r_k \lambda < \mu_k, \quad (12)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。在滿足(12)的情況下，整個服務系統便可順暢運行，不會出現無限排隊與等待時間無限大的情形。藉由(12)可定義服務設施  $S_k$  的服務設施系統強度  $\rho_k$ ：

$$0 < \rho_k = \frac{r_k \lambda}{\mu_k} < 1, \quad (13)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ ，參數  $\rho_k$  是由第  $k$  服務設施的單位時間需求量除以單位時間提供的服務量，也就是代表第  $k$  服務設施的擁擠程度，當  $\rho_k < 1$  代表符合系統穩定性條件，並且當  $\rho_k$  愈接近 1 則服務設施越接近飽和，系統的擁擠程度愈高。

在實務上由於供應商會依據服務需求量決定服務供應量，因此在滿足穩定性條件下（ $\rho_k < 1$ ）， $\rho_k$  很接近 1 為合理且常有的現象，也就是說每個服務設施幾乎常常是飽和的。

### 第三章 最佳化問題

前一章我們已對服務系統做了描述，在維持穩定性條件下，便可開始討論如何選擇服務設施地點與對應的路由策略問題。我們關心的是當車輛出現服務需求後，由於車輛儲存電量有限，並且駕駛人在電量缺乏下會產生焦慮感，服務設施地點的設置應該要使系統的平均反應時間盡量縮短，讓有服務需求的車輛能夠愈快速完成服務需求，減少駕駛花費的時間。而路由策略  $\pi$  可將有服務需求之車輛引導至相應的服務設施，因此在滿足系統穩定性條件下，要找到一個最佳路由策略  $\pi$ （相當於找到一個函數  $h_k$ ），使服務系統最有效率的解決服務需求，也就是使平均反應時間最短。服務設施地點的部署加上路由策略的選擇可寫成一個標準的最佳化問題，藉由一連串的近似過程，本文將此問題轉化為“分群問題（Clustering）”，並設計新的演算法來解出最佳服務設施位置與對應的最佳路由策略。

#### 第一節 路由策略

路由策略可將有服務需求的汽車指派到相對應的服務設施，在車速變動不大的情況下，車輛與服務站的距離遠近將會影響反應時間，因此服務需求合理上應該被引導至距離最近的服務設施  $S_k$ ，如此才能使反應時間最小，因此如何劃分邊界線讓汽車駕駛了解在該地點應該前往哪一服務設施就成為我們要探討的問題。若當服務設施地點已知，此問題轉換為將服務需求地區分成  $K$  的區塊

$G_1, \dots, G_K$  (如圖 3-1), 在區塊  $G_k$  內的服務需求會被路由策略引導至第  $k$  服務設施, 而我們此時要決定的是邊界線如何劃定。

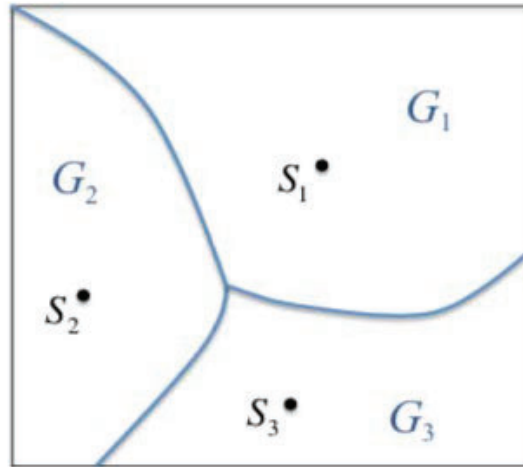


圖 3-1. 路由策略示意圖 (假設共設立 3 個服務設施  $S_1, S_2, S_3$ , 因此將服務需求地區分割成 3 個對應的區塊  $G_1, G_2, G_3$ )。

由式(8), 此時的路由策略  $\pi$  可由  $h_k$  表示為:

$$h_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{當服務需求地點 } x \in G_k, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad (14)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。根據(14), 如同(9)式之長期比例 (long-term proportion) 可表示為:

$$r_k = \int_{x \in G_k} f(x) dx, k = 1, \dots, K, \quad (15)$$

其中  $r_1, \dots, r_K$  會受到穩定性條件的限制。

當我們固定服務設施地點以後, 可藉此調整分界線來找出滿足穩定性的相對最佳路由策略, 但此路由策略只針對我們原先固定的那組服務設施地點而已, 當服務設施地點改變後, 邊界也會跟著改變, 則相對最佳路由策略也會再跟著改變, 因此接下來要討論服務設施地點的選擇與路由策略的連動關係。



## 第二節 位區途程的最佳化問題

我們有興趣的問題是如何找到合適服務設施地點 $S_1, \dots, S_K$ ，這是非常有名的設施區位問題 (facility location problem) [26]-[29]，並由服務設施地點找出服務需求地區內對應的一種分割 $G_1, G_2, \dots, G_K$  (即路由策略)，使得服務需求的「平均反應時間 (Mean response time)」為最小化。所謂反應時間是系統內所有服務需求從進入服務系統到離開所需花費的時間的總和，因此讓反應時間最短的意思就是讓所有車輛花最少的時間來完成服務需求。我們可將反應時間拆解成三個階段，首先是移動時間 (travel time)  $t_k$ ，它是汽車從服務需求地點到服務設施花費的時間。等待時間 (waiting time)  $w_k$ ，當到達服務設施後，該服務設施可能已經客滿，則排隊等候的時間需要被算入反應時間內。服務時間 (service time)  $\sigma_k$  是從汽車等候完並開始接受服務以後，到服務完成所花費的時間。

藉由(14)定義的路由策略函數 $h_k$ ，在服務需求地點 $x$ 的反應時間表示為：

$$T(x) = \sum_{k=1}^K h_k(x) \cdot (t_k + w_k + \sigma_k) \quad (16)$$

假設服務設施地點 $S = \{S_1, \dots, S_K\}$ 與服務需求地區 $G$ 上的分割 $P = \{G_1, \dots, G_K\}$ ，由於 $T(x)$ 是一個隨機變數，會受到服務設施地點 $S$ 、分割 $P$ 與車速 $v$ 的影響，因此我們要觀察的是反應時間的期望值，稱其為平均反應時間，則由(3)、(4)、(5)、(6)的假設，服務需求地點 $x$ 的平均反應時間可表示為：

$$\begin{aligned} E_{S,P}(T(x)) &= \sum_{k=1}^K h_k(x) (E_{S,P}(t_k) + E_{S,P}(w_k) + E_{S,P}(\sigma_k)) \\ &= \sum_{k=1}^K h_k(x) \left( \frac{\|x - S_k\|}{v} + E_{S,P}(w_k) + 1 \right) \quad (17) \end{aligned}$$

接著我們考慮系統中的所有服務需求，可以算出系統的平均反應時間：

$$\begin{aligned}
 & E_{S,P}(T(X)) \\
 &= \int_G \sum_{k=1}^K h_k(x) \left( \frac{\|x - S_k\|}{v} + E_{S,P}(w_k) + 1 \right) f(x) dx \\
 &= \sum_{k=1}^K \int_{G_k} \left( \frac{\|x - S_k\|}{v} + E_{S,P}(w_k) + 1 \right) f(x) dx \quad . \quad (18)
 \end{aligned}$$

上述的平均反應時間即為我們要極小化的目標函式，我們希望在滿足穩定性的條件之下，找到一組服務需求地點與對應的最佳路由策略使得系統的平均反應時間最小化，此問題即可表示成以下之最佳化問題：

$$\begin{aligned}
 & \underset{S,P}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{G_k} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx + r_k E_{S,P}(w_k) \right\} \\
 & \text{s. t.} \quad 0 \leq r_k \leq 1, \text{ 其中 } k = 1, \dots, K, \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^K r_i = 1, \\
 & \quad \quad r_k \lambda < \mu_k, \text{ 其中 } k = 1, \dots, K. \quad (19)
 \end{aligned}$$

雖然我們已經將位區途程策略寫成以上之最佳化問題(19)，但要解出此最佳化問題的解仍非常困難，因此接下來我們要對目標函式進行簡化與近似，讓此問題比較容易解決。在此之前我們先介紹以下定理：

**定理 1:**

假設  $S^* = \{S_1^*, \dots, S_K^*\}$  與  $P^* = \{G_1^*, \dots, G_K^*\}$  為最佳化問題(19)的解，當給定任意  $v \leq \bar{v}$  與任意符合穩定性條件的  $(S, P)$ ，皆可滿足：

$$\begin{aligned}
 & r_k | E_{S^*,P^*}(w_k) - E_{S,P}(w_k) | \\
 & \leq \int_{G_k} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx - \int_{G_k^*} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx, \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。則最佳化問題(19)可被簡化為：

$$\begin{aligned} & \underset{S, P}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{G_k} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx \right\} \\ & \text{s. t.} \quad 0 \leq r_k \leq 1, \text{ 其中 } k = 1, \dots, K, \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^K r_k = 1, \\ & \quad \quad r_k \lambda < \mu_k, \text{ 其中 } k = 1, \dots, K. \end{aligned} \tag{21}$$

證明：

因為  $S^* = \{S_1^*, \dots, S_K^*\}$  與  $P^* = \{G_1^*, \dots, G_K^*\}$  為問題的(19)解，則

$$\begin{aligned} & \int_{G_k^*} \frac{\|x - S_k^*\|}{v} f(x) dx + r_k E_{S^*, P^*}(w_k) \\ & \leq \int_{G_k} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx + r_k E_{S, P}(w_k), \end{aligned} \tag{22}$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。移項後可得：

$$\begin{aligned} & r_k |E_{S^*, P^*}(w_k) - E_{S, P}(w_k)| \\ & \leq \int_{G_k} \frac{\|x - S_k\|}{v} f(x) dx - \int_{G_k^*} \frac{\|x - S_k^*\|}{v} f(x) dx, \end{aligned} \tag{23}$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。

當服從定理 1 之假設 ( $v \leq \bar{v}$ ) 時，最佳化問題會由(19)變為(21)，對於任意的  $(S, P)$  與最佳解  $(S^*, P^*)$ ，平均等候時間的差異均會小於平均移動時間的差異，代表平均移動時間相較於平均等候時間對平均反應時間的影響較大，且當車速  $v$  愈小時，平均移動時間與平均等候時間對平均反應時間的影響會差距愈大。由於定理 1 中限制車速  $v$  必須小於上界  $\bar{v}$ ，則平均反應時間受平均移動時間的影響就會較大，因此將目標函式簡化由(19)簡化為(21)解出的最佳解的變動可忽略，

這個簡化結果可以讓我們較容易的尋找最佳服務設施地點與對應的最佳路由策略。

### 第三節 平均等待時間的估計

先前我們已經對平均移動時間(3)與平均服務時間(5)做了假設，本節要對平均等待時間進行估計，前面已經提到對於服務供應商而言，單位時間提供的服務量多寡會受到需求量的影響，單位時間的服務供應量應該要高於需求量才能滿足穩定性。在滿足穩定性條件下，可能會有另一種情形是服務供應量遠大於需求量，但這會使服務器材閒置、折舊，造成供應上花費成本提高，因此在實務上這種可能性通常是不會發生的，供應量應會與服務需求量相近。因此假設在滿足穩定性條件下，讓系統的服務需求量達到最大吞吐量，也就是「供需平衡」的情形：

$$r_k \lambda \lesssim \mu_k, \quad (24)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ ，則同樣的我們可以計算各服務設施的服務強度：

$$\rho_k = \frac{r_k \lambda}{\mu_k} \lesssim 1, \quad (25)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ ，則每個服務設施皆達到最大吞吐量。

當第  $k$  服務設施的服務強度  $\rho_k \approx 1$ ，這會造成服務需求地區  $G$  內非常擁擠，整個服務系統強度  $\rho = \lambda/\mu \approx 1$ ，系統達到最大吞吐量，使得此區域內的車輛之車速  $v$  不至於太快，因此在定理 1 中的假設  $v \leq \bar{v}$  成立。並且由交通繁忙定理可知，當第  $k$  服務設施的服務強度  $\rho_k \approx 1$  且服從  $G/G/\mu_k$  等候理論時，服務設施的平均等待時間可近似為[30]：

$$E(w_k) \approx \frac{1}{\mu_k} \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \left( \frac{C_{\tau_k}^2 + C_{\sigma_k}^2}{2} \right), \quad (26)$$

其中  $C_{\tau_k}^2 = \frac{\text{Var}(\tau_k)}{E(\tau_k)^2}$  ( $\tau_k$  的變異係數平方),  $C_{\sigma_k}^2 = \frac{\text{Var}(\sigma_k)}{E(\sigma_k)^2}$  ( $\sigma_k$  的變異係數平方),

$k = 1, \dots, K$ 。  $C_{\sigma_k}^2$  通常已知 (可由(5)、(6)解出), 而  $\tau_k$  是第  $k$  服務設施中, 前後兩輛車到達服務設施的間隔時間, 由於影響  $\tau_k$  的因素非常多, 包括服務需求產生的母體分配、車速、服務設施地點與路由策略等, 因此在第五章我們將採用電腦模擬的方式來估計變數  $\tau_k$ 。

#### 第四節 將位區途程問題轉為分群問題

本節我們想要找出最佳化問題(21)的解, 假設有服務需求地點  $x_1, \dots, x_n$  相互獨立且服從機率密度函數  $f(x)$ , 給定任意的  $(S, P)$ , 由弱大數法 (WLLN) 則可得:

$$\frac{\sum_{k=1}^K \sum_{x_i \in G_k} \|x_i - S_k\|}{n} \xrightarrow{p} \sum_{k=1}^K \int_{G_k} \|x - S_k\| f(x) dx, \quad (27)$$

其中 “ $\xrightarrow{p}$ ” 代表 “機率收斂”。也就是當服務需求很大且長期系統平均車速  $v$  給定之下, 最佳化問題可近似為:

$$\begin{aligned} & \underset{S, P}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{x_i \in G_k} \|x_i - S_k\| \\ & \text{s.t.} \quad |G_k| = n_k = [r_k n], \text{ 其中 } k = 1, \dots, K, \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^K n_k = n. \end{aligned} \quad (28)$$

由弱大數法則在樣本數很大之下, 樣本平均數會機率收斂至母體平均數, 所以如果服務需求地點很多時, 最佳化問題就會從(21)變為(28), 由原本的積分變為較容易計算的加總。

我們可以發現(28)與K-medoids [31][32]分群問題的目標函式是相同的，因此我們已將原本的最佳化問題轉為分群問題（K-medoids），其中設立  $K$  個服務設施代表分為  $K$  群，最佳服務設施地點  $\widetilde{S}^* = \{\widetilde{S}_1^*, \dots, \widetilde{S}_K^*\}$  代表分群的中心點座標，路由策略  $\widetilde{P}^* = \{\widetilde{P}_1^*, \dots, \widetilde{P}_K^*\}$  代表分群結果。但(28)與K-medoids分群問題的差異在於(28)多了限制式，為了要滿足穩定性，每個服務設施的單位時間服務需求量必須小於供應量，也就相當於分群問題加上了各群大小限制  $|\widetilde{G}_k^*| = n_k$ ，其中  $k = 1, \dots, K$ 。

並且由於(28)的目標函式之  $\|x_i - S_k\|$  是  $x_i$  與  $S_k$  在  $\mathbb{R}^2$  空間中的歐式距離 ( $l_2 - norm$ )，因此要解決此分群問題仍然不容易，我們先考慮較簡單的情況，假設有  $n$  個服務需求地點座標  $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ ，其中  $i = 1, \dots, n$ 。我們想要找出這  $n$  個點的中心點位置，也就是最佳服務設施座標。對於任意的服務設施座標  $S = (a, b)$ ，定義函式：

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n \|x_i - S\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i1} - a)^2 + (x_{i2} - b)^2} \quad (29)$$

與(28)的目標意義相同，我們希望找到一個最佳的服務設施地點，也就是  $x_1, \dots, x_n$  的中心點  $S^* = (a^*, b^*)$ ，極小化目標函式  $F(a, b)$ 。首先將  $F(a, b)$  分別對  $a$  與  $b$  偏微分並令其為 0，即  $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$  與  $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$ ，可得：

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\prod_{j \neq i} \sqrt{(x_{j1} - a)^2 + (x_{j2} - b)^2}) \cdot x_{i1}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \sqrt{(x_{j1} - a)^2 + (x_{j2} - b)^2}} \quad (30)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (\prod_{j \neq i} \sqrt{(x_{j1} - a)^2 + (x_{j2} - b)^2}) \cdot x_{i2}}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \sqrt{(x_{j1} - a)^2 + (x_{j2} - b)^2}} \quad (31)$$

由(30)、(31)可以注意到，最佳服務設施座標可以看成是所有需求地點座標乘以一個權重（即加權平均數），與K-means分群微分得到的結果是不同的[33][34]。

由於式中的等號左右兩邊都有變數  $a$ 、 $b$ ，因此利用數值方法來求解  $S^*$ ，我們將使用梯度下降法[35][36]來解決此問題。

由上一段考慮一個中心點的情況後，我們將問題推廣至考慮設立  $K$  個中心點，如同設立一個中心點的解法一樣，分別對  $K$  個中心點座標偏微分，並使用梯度下降法找出中心點與分群結果。且在(28)的限制式中，各群的群內點數已設定，在此我們根據K-means(Lloyd)演算法的想法，設計以下兩個演算法來處理此問題。演算法1來調整各群內的點數，滿足限制適中的穩定性條件，演算2以梯度下降法尋找新的中心點位置，並利用新的中心點位置再使用演算法1調整各群的點數，將演算法1與梯度下降法交錯使用，直到找出最佳分群結果。

#### 演算法 1：調整群內點數大小

首先我們會有數量夠多的服務設施地點  $x_1, \dots, x_n$ ，才能符合弱大數法則假設，並給定一組中心點  $S_1, \dots, S_K$ 。

1. 將每一個服務需求  $x_i$  分至中心點與它距離最近的那一群，接著計算各群內的點數  $|G_k|$ ，其中  $k = 1, \dots, K$ 。
2. 計算各群與目標點數之差距  $d_k = \left| |G_k| - n_k \right|$ ，其中  $k = 1, \dots, K$ 。
3. For  $k = \text{rev}(\text{order}(d_1, \dots, d_K))$  由與目標點數差距最大的群到最小的群依序調整。
4. If  $|G_k| > n_k$ ，令  $r = \max_{x_i \in G_k} \|x_i - S_k\|$ 。

給定  $\varepsilon > 0$ ，若  $x_i \in G_k$  滿足  $\|x_i - S_k\| > r - \varepsilon$ ，則將  $x_i$  分到其餘（不包含已經被調整過的群）距離最近的群  $G_{k'}$  ( $k \neq k'$ )，最終找出合適  $\varepsilon$  使得剩餘的點數  $|G_k| = n_k$ 。（如圖3-2）

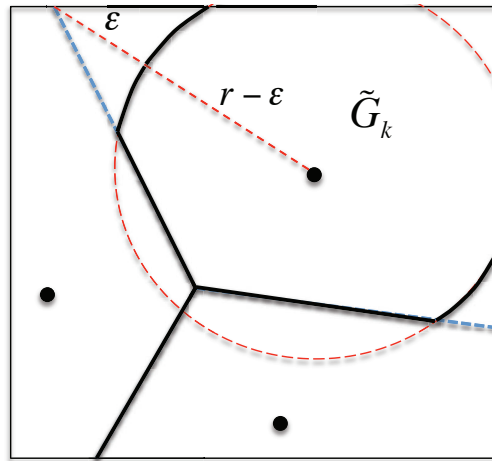


圖 3-2. 邊界調整示意圖 1。

5. If  $|G_k| < n_k$ , 令  $r = \min_{x_i \in G_k} \|x_i - S_k\|$ 。

給定  $\epsilon > 0$ ，若  $x_i$  在其餘的群中（不包含已經被調整過的群）且滿足  $\|x_i - S_k\| < r + \epsilon$ ，則將  $x_i$  分到  $G_k$  群中，接著重新算出群中心點與群內的點數，最終找出合適  $\epsilon$  使得剩餘的點數  $|G_k| = n_k$ 。（如圖3-3）

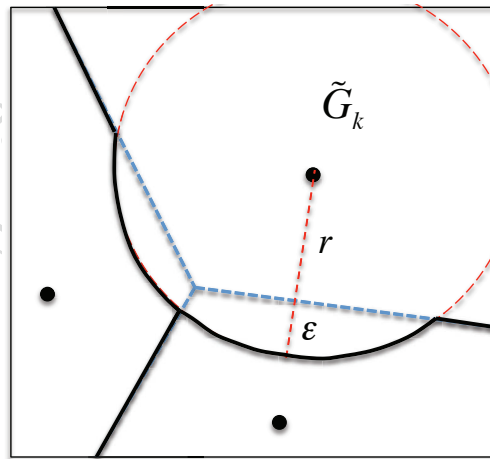


圖 3-3. 邊界調整示意圖 2。

6. 依序調整各群內點數後，儲存  $\tilde{G}_k$  與  $\tilde{P}$ ， $k = 1, \dots, K$ ，則可得到調整群內點數大小後的中心點與分群邊界。



在演算法1中，我們想要調整各群內的點數來達到原先限制式的設定，首先給定任意的中心點  $S$ ，並將所有服務需求地點進行分群，找出分群結果  $P$ 。接著開始進行調整點數的過程，採用的方式為群內點數愈多的群調整為原先設定點數最多的那一群，並按照大群調為大群、小群調為小群的方式對應。接著依據群內點數與目標點數差距最大的一群開始調整，採取由大到小的方式依序調整群內的點數。假設點數差距最大為第  $m_1$  群則由此群開始最調整，若第  $m_1$  群點數較原先設定的量還多時，將從此群中距離中心點  $G_{m_1}$  最遠的點開始移動至其餘（不包含已經被調整過的群，才不會使調整過的群之點數又被打亂）距離此點最近的中心點那一群中，直到點數符合限制式  $|G_{m_1}| = n_{m_1}$ 。相反的，當第  $m_1$  群點數過少時，將從其餘（不包含已經被調整過的群）的群中挑選與中心點  $G_{m_1}$  距離最近的點加入那一群中，直到點數符合限制式  $|G_{m_1}| = n_{m_1}$ 。經由以上的調整後，第  $m_1$  群的點數已符合原先的設定數，接著調整差距第二大的群，依序調整到最後所有群的點數都符合原先的設定。若由上述方法調整分群結果，可想而知演算法1找出的邊界基本上是弧形的，因為只以距離中心點的距離來決定分界線，則最終是一組非線性的邊界並且滿足  $|G_k| = n_k, k = 1, \dots, K$ 。因此當我們有任意一組  $(S, P)$  後，我們可藉由服務需求地點  $x_i$  來調整邊界，達到原先設定的群內點數大小限制條件來滿足穩定性條件。

### 演算法 2：尋找近似的中心點與分群結果 $(\bar{S}^*, \bar{P}^*)$

- 1: 隨機放置  $K$  個中心點。
- 2: 將需求地點  $x_i$  分配到與其距離最近的中心點該群。
- 3: 藉由演算法1調整各群的邊界，使各群內的點數符合限制條件。

4: 由梯度下降法找出能使(28)之目標函數的梯度減少最多的方向，並向此方向移動一步(步長取決於變數  $\alpha$ )。得到第  $J$  次迭代的新中心點  $\tilde{S}^J = \{\tilde{S}_1^J, \dots, \tilde{S}_K^J\}$ 。

5: 重複2~4步驟直到中心點和邊界收斂為止。將最後的中心點和邊界記為  $(\tilde{S}^*, \tilde{P}^*)$ 。

演算法2主要的目標是在演算法1的得到符合限制式的分群結果後，進行縮小目標函數的動作。藉由移動中心點來縮小目標函數，但既然中心點已被移動，原本透過演算法1達成的穩定性條件就可能不滿足，則將新的中心點重新透過演算法1調整分群。重複以上的兩個步驟直到中心點無法再移動使得目標函數繼續縮小，則該分群結果即為最佳的位區途程策略。演算法2中的梯度下降法是透過對  $x$  軸與  $y$  軸分別偏微分的方式求出對於每個中心點向下傾斜程度最大的方向，並向此方向移動一步，步長參數  $\alpha$  可自行給定但通常是很短的，因為  $K$  個中心點都向各自認為的方向移動，但這不一定是使整體目標函數最小化的方向，且傾斜程度最大方向是由前一步驟(步驟3)算出的分群結果而決定的，由於此分群結果並不是最佳分群，藉由它求出的最佳方向也只能參考用，因此中心點只能向此方向些微移動，經過多次的微調後，分群結果就會收斂。

由以上四個小節即可從既有的服務需求地點，透過一連串的簡化與近似過程，將最佳化問題轉換為一個分群問題，再經由演算法2得到最佳路由設施地點與相對應的最佳路由策略。

## 第五節 設施地點成本和資源配置上限之考量

在前一節我們已經找出最佳位區途程問題的解，本節要討論的是在實際問題中，可能有其他的條件會影響對服務設施的配置，而這些限制也能放入最佳化問題(28)的限制式中。例如服務設施的設置成本通常也會影響服務設施的地點選擇，令函數 $\theta(S)$ 代表服務需求地區 $G$ 內，在地點 $S$ 設置一個服務器的花費成本，則總成本表示為：

$$Cost(S) = \sum_{k=1}^K \mu_k \cdot \theta(S_k) \quad (32)$$

由於供應商在設置服務設施會有總成本的上限 $C_0$ ，因此可表示為：

$$\sum_{k=1}^K \mu_k \cdot \theta(S_k) \leq C_0 \quad (33)$$

則在(28)的限制式中加入(33)，接著再利用演算法2來求解就可以找出在有成本考量之下的最佳設施地點與對應的最佳路由策略。

對於充電站的配置會有另一項限制條件，由於充電站不像加油站是透過運輸工具來運送石油，而運送量可配合服務需求量的多寡自行調整，充電站的設置需要考量電力公司對每一小區域的配電多寡而決定。假設服務需求地區 $G$ 被分為 $M$ 塊供電區（如圖3-4），每一塊供電區的配電量會受到最大配電量 $\bar{u}_i$ 的限制，若電量超出上界可能會發生跳電或是短路等危險，我們定義函數：

$$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{當 } S_k \in G_i \text{ ,} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (34)$$

其中 $k = 1, \dots, K$ ， $i = 1, \dots, M$ 。則限制式可表示為：

$$\sum_{k=1}^K I_{ik} \cdot \mu_k \leq \bar{u}_i, \quad (35)$$

其中  $i = 1, \dots, M$ 。

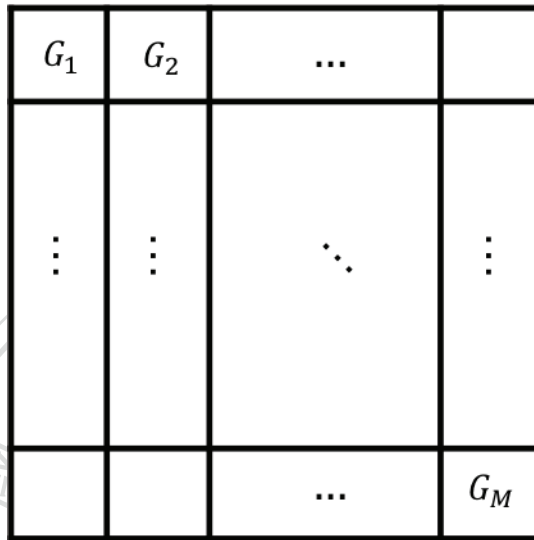


圖 3-4. 服務需求地區  $G$  內的供電區示意圖。

因此針對充電站配置問題，則在(28)中的限制式加上每一供電去的配電上限(35)，經由演算法2即可解出位區途程策略。

## 第四章 電腦模擬

本章會藉由電腦模擬的方式驗證前一章的內容，從一開始的模型假設，到最終的分群結果並解出最佳服務設施地點與路由策略，另外也能藉由模擬結果證實定理 1 與模型簡化過程是可行的。

首先，假設一個方形的服務需求地區  $G = [0,10] \times [0,10]$ ，在此區域中設置 3 個服務設施 ( $K = 3$ )，其中各服務設施的服務器數量為  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1$ 。由於此服務系統的單位時間服務量的  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 6$ ，我們假設單位時間的服務需求量  $\lambda = 5.94$ ，使得此服務系統強度  $\rho = \frac{6}{5.94} = 0.99$ ，滿足交通繁忙定理的假設。接著我們需要模擬出服務需求出現位置的分佈，一種簡單的假設是汽車均勻地分佈在服務需求地區  $G$  內，因此我們以均勻分配 (Uniform Distribution) 來模擬服務需求地點。但一般來說，一地區會有市區與郊區之分，市區的汽車數會比較多，造成汽車不均勻的分佈在地區內，且市區不一定會在正中心位置上，對此我們假設一種極端的情況，將市區假設在服務需求地區  $G$  的右上角，使得服務需求地點不對稱於中心點，因此我們以截斷常態分配 (Truncated Normal Distribution) 來模擬此種情況下的服務需求出現地點。下面兩節會分別藉由以上兩種分配，分別模擬出的服務需求地點 (均勻分配與截斷常態分配)，並接著模擬位區途程的最佳化結果。

此外，這些服務需求地點並不是同一時間產生的，我們還需對服務需求間隔時間做假設，藉由等候理論可知等候一台車出現服務需求所需的等待時間會服從指數分配 (Exponential Distribution)，因此我們以指數分配模擬服務需求間隔時間，其中參數  $\lambda = 5.94$ 。從另一個角度來而言，由於我們假設單位時間的服務需求為 5.94 輛汽車，我們將它視為一個事件，如同上述這個事件發生所需等候的

時間服從指數分配，則等候單一輛汽車出現服務需求的等待時間服從伽馬分配 (Gamma Distribution)，其中參數為  $\alpha = \frac{1}{5.94}, \lambda = 1$ 。因此接下來在均勻分配與截斷常態分配的服務需求地點下，分別都加入了指數分配與伽馬分配兩種服務間隔時間，並比較兩種不同分配之間的差異，我們使用 RStudio (Version 1.1.442) 軟體以及 MacOS High Sierra 系統與 2.3 GHz Intel Core i5 處理器來進行以下的模擬。

## 第一節 均勻分配之需求地點分佈

首先以均勻分配模擬出服務需求地點，如圖 4-1 是 5000 個由均勻分配模擬出的需求地點  $x_1, \dots, x_{5000}$ ，圖中的點均勻的分佈在服務需求地區  $G$  上，每一點代表一輛汽車，也就是一個服務需求。

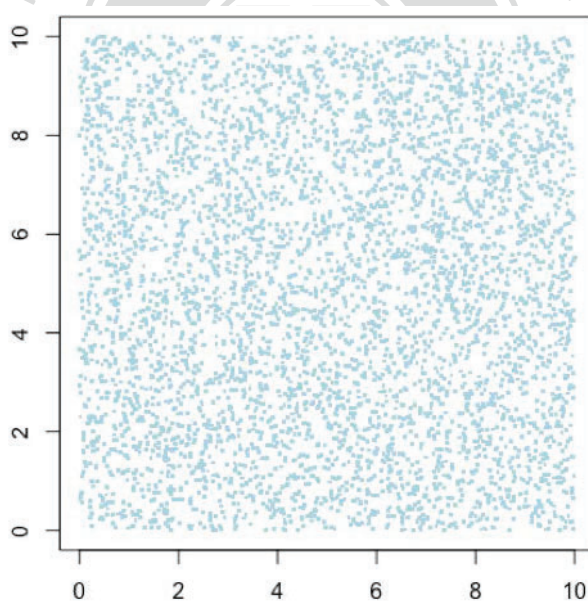


圖 4-1. 以均勻分配模擬出的獨立服務需求地點。

### 一、需求間隔時間服從伽馬分配

假設服務需求間隔時間服從  $\text{Gamma}(1/5.94, 1)$ ，從演算法 2 取出其中取出某幾次迭代的結果，這些均為滿足限制式，但不一定能極小化目標函式的分群，並

藉由上述對參數的假設，可算出每次迭代下的平均移動時間、平均等待時間、平均反應時間（由於平均服務時間已由 (5) 假設，所以無需討論），如圖 4-2, 4-3, 4-4。這三張圖中也都放入了 4 種不同的車速，討論車速隊平均移動時間、平均等待時間與平均反應時間的關聯性。圖 4-2 是幾次迭代的平均移動時間變化，隨著演算法 2 不斷地調整與更新中心點與分群邊界，平均移動時間在不同的車速下，都會隨著迭代的次數增加而下降，且遞減至最終的最佳設施地點  $\tilde{S}^*$ ，且當車速愈小時，平均移動時間的下降趨勢愈明顯，也可看出車速愈大，平均移動時間隨著迭代變化幅度愈不明顯。

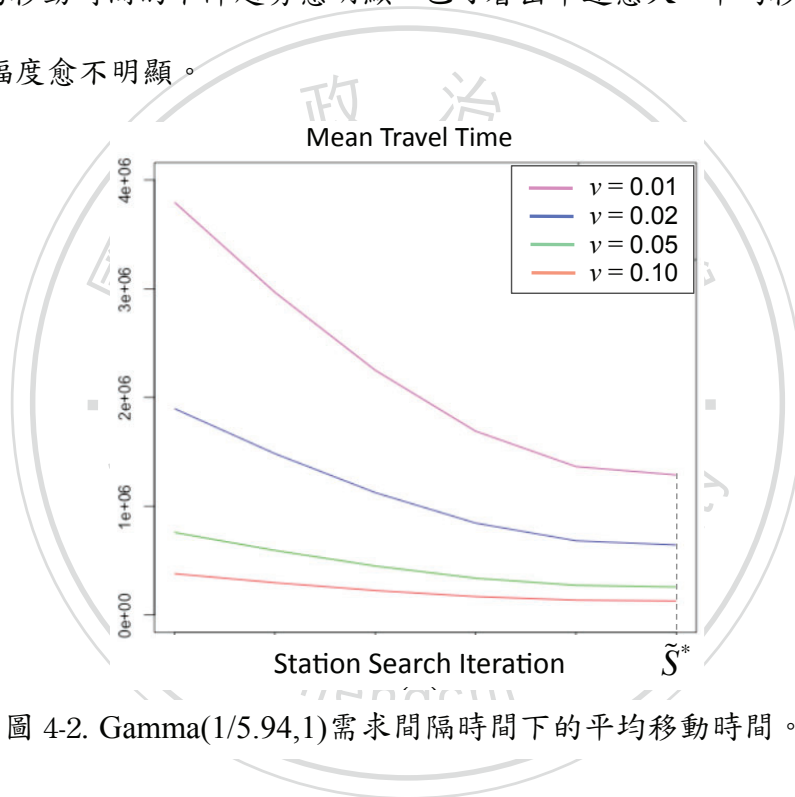


圖 4-2. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均移動時間。

圖 4-3 是這幾次迭代的平均等待時間變化，平均等待時間在不同的車速下，不會隨著迭代的次數增加而大幅度的變動，大致呈現水平趨勢。

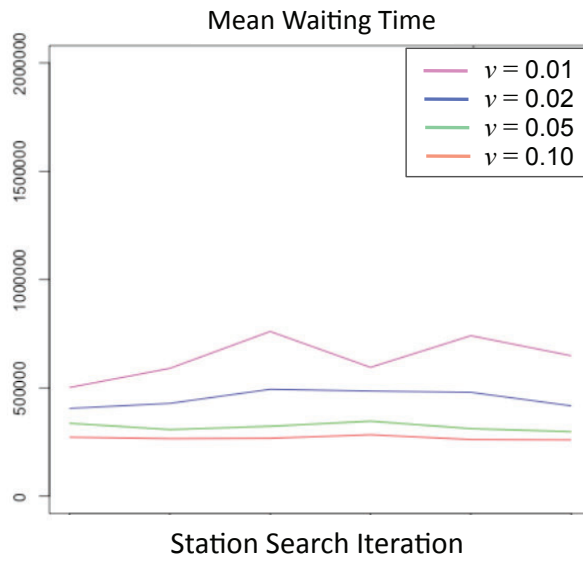


圖 4-3. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均等待時間。

圖 4-4 是這幾次迭代的平均反應時間變化，平均反應時間在不同的車速下，隨著迭代的次數增加而下降，遞減至最終的最佳設施地點 $\tilde{S}^*$ ，且如同平均移動時間相同，當車速愈小時，平均反應時間的下降趨勢愈明顯。

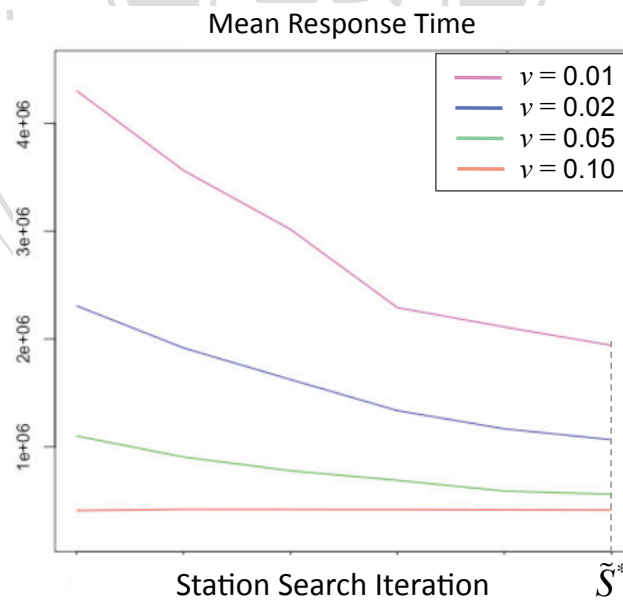


圖 4-4. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均反應時間。

由圖 4-2, 4-3, 4-4 可得到當平均移動時間下降時，平均反應時間也跟著下降，這可以顯示定理 1 的結果為正確，平均反應時間受平均移動時間的影響較大。



## 二、 需求間隔時間服從指數分配

假設服務需求間隔時間服從 Exponential(5.94)，從演算法 2 取出其中取出某幾次迭代的結果，這些均為滿足限制式，但不一定能極小化目標函式的分群。並藉由上述對參數的假設，可算出每次迭代下的平均移動時間、平均等待時間、平均反應時間，如圖 4-5, 4-6, 4-7。這三張圖都放入了 4 種不同的車速，討論車速隊平均移動時間、平均等待時間與平均反應時間的關聯性。圖 4-5 是幾次迭代的平均移動時間變化，隨著演算法 2 不斷地調整與更新中心點與分群邊界，平均移動時間在不同的車速下，都會隨著迭代的次數增加而下降，且遞減至最終的最佳設施地點  $\tilde{S}^*$ ，且當車速愈小時，平均移動時間的下降趨勢愈明顯，車速愈大，平均移動時間隨著迭代變化幅度愈不明顯。

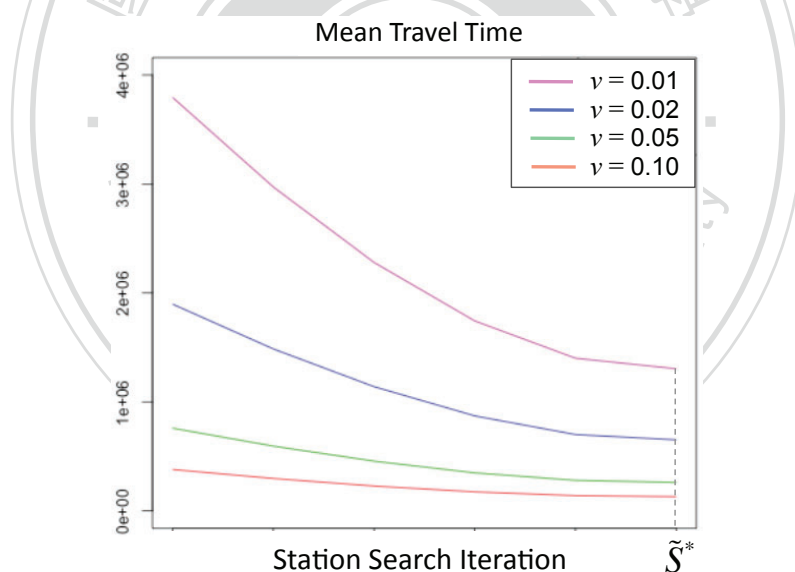


圖 4-5. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均移動時間。

圖 4-6 是這幾次迭代的平均等待時間變化，平均等待時間在不同的車速下，不會隨著迭代的次數增加而大幅度的變動，大致呈現水平趨勢。

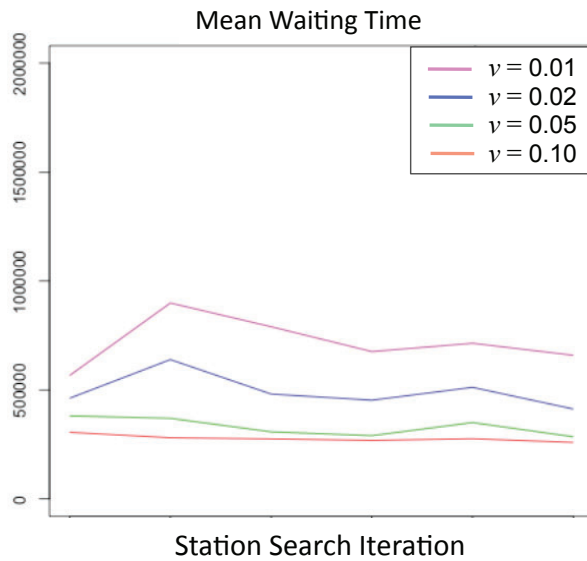


圖 4-6. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均等待時間。

圖 4-7 是這幾次迭代的平均反應時間變化，平均反應時間在不同的車速下，隨著迭代的次數增加而下降，遞減至最終的最佳設施地點 $\tilde{S}^*$ ，且如同平均移動時間相同，當車速愈小時，平均反應時間的下降趨勢愈明顯。

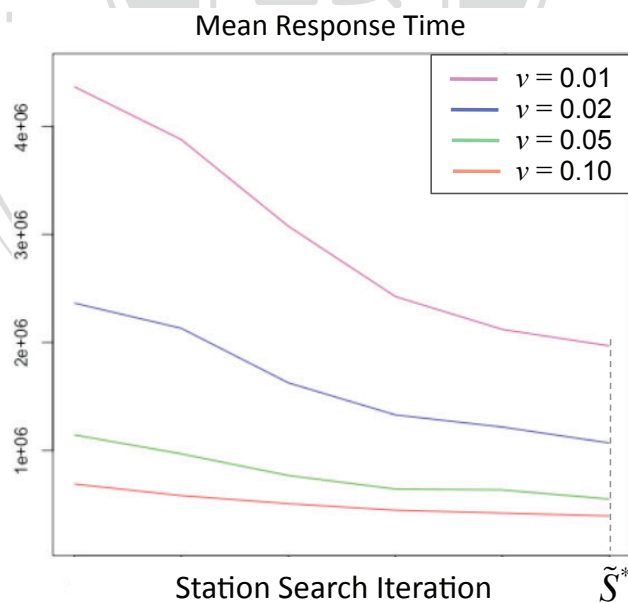


圖 4-7. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均反應時間。

由圖 4-5, 4-6, 4-7 可得到當平均移動時間下降時，平均反應時間也跟著下降，這可以顯示定理一的結果為正確，平均反應時間受平均移動時間的影響較大。

### 三、最佳位區途程策略

由以上兩小節可發現，兩種服務需求間隔時間模擬出結果皆非常相似，可推估服務需求間隔時間的變化，不影響最佳解的位置。我們利用演算法 2 解出位區途程策略的最佳解，假設起始中心點座標  $S_1 = (0.514, 0.539)$ 、 $S_2 = (0.506, 0.537)$ 、 $S_3 = (0.533, 0.504)$ ，與梯度下降法的變數  $\alpha = 0.0005$ ，如圖 4-8 是經由演算法 2 第一次迭代得到的結果，其中各群的中心點  $\tilde{S}_1 = (1.583, 1.252)$ 、 $\tilde{S}_2 = (0.808, 1.173)$ 、 $\tilde{S}_3 = (0.893, 0.698)$ ，三群內的點數調整為符合穩定性條件，但由圖可知  $\tilde{G}_1$  區域內的服務需求被路由策略分派至位於  $\tilde{S}_1$  的服務設施，而服務設施  $\tilde{S}_1$  不在  $\tilde{G}_1$  區域內，因此無法達到最短的平均反應時間。

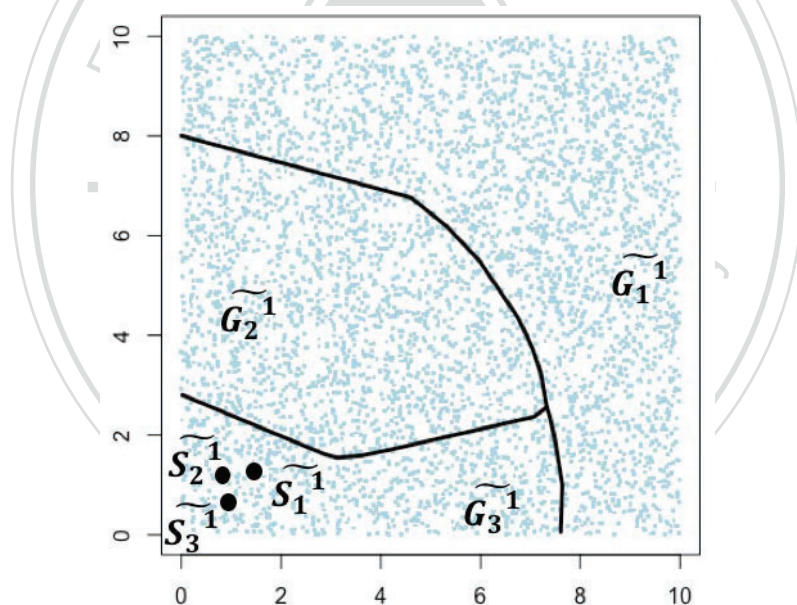


圖 4-8. 演算法 2 的第一次迭代分群結果。

最終經過 152 次迭代後得到最終分群結果如圖 4-9，約花費 97 秒，其中最佳設施地點  $\tilde{S}_1^* = (7.398, 5.348)$ 、 $\tilde{S}_2^* = (2.682, 2.798)$ 、 $\tilde{S}_3^* = (2.343, 8.419)$ 。而在  $\tilde{G}_1^*$  區域內的服務需求會被路由策略分派至位於  $\tilde{S}_1^*$  的服務設施， $\tilde{G}_2^*$  區域內的服務需求則被路由策略分派至位於  $\tilde{S}_2^*$  的服務設施， $\tilde{G}_3^*$  區域內的服務需求被路由策略分派至位於  $\tilde{S}_3^*$  的服務設施。

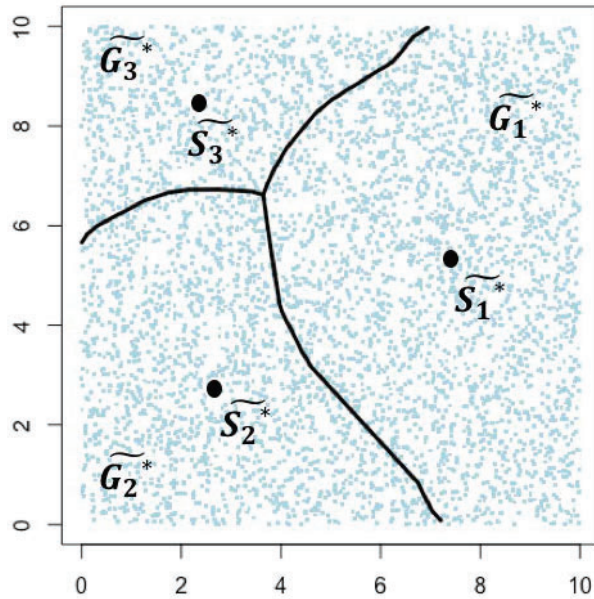


圖 4-9. 演算法 2 估計出的最佳分群結果。

由於均勻分配具有對稱於中心點的性質，理論上可藉由旋轉等方式找出其他不同的中心點組合，因此在均勻分配上，部署中心點與路由策略的方法並不唯一。由於演算法的第一步是隨機放置起始中心點，當起始點的選擇不同，最終的收斂結果也會跟著不同，它會包含旋轉、鏡射等結果。總之，演算法 2 提供了一種合適的方法找出分群結果，若要明確地選出在各種旋轉與鏡射之間的最佳解，我們可以加入其他的限制式，當限制條件增加後，不同分群之間的差異會更顯著，就能在這些互為旋轉、鏡射的分群結果中，找出最佳位區途程策略。

## 第二節 截斷常態分配之需求地點分佈

本結以截斷常態分配模擬出服務需求地點，如圖 4-10 是 5000 個由均勻分配模擬出的需求地點  $x_1, \dots, x_{5000}$ ，其中 X 座標與 Y 座標是獨立且服從  $\text{Normal}(10,30)$ ，每一點代表一輛汽車的服務需求。

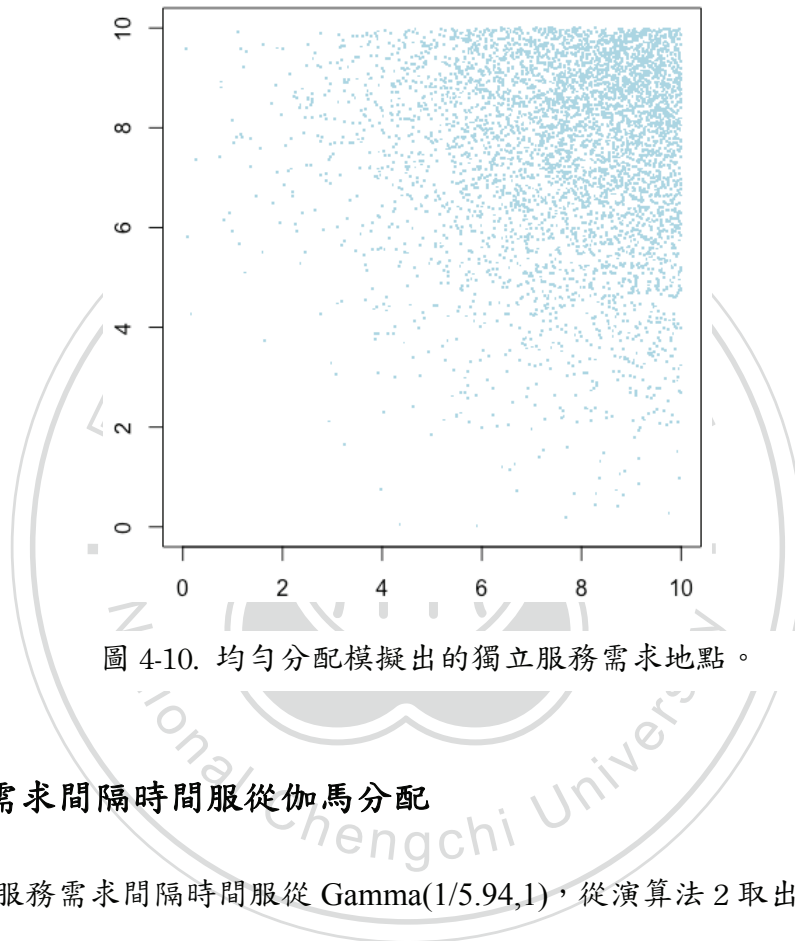


圖 4-10. 均勻分配模擬出的獨立服務需求地點。

### 一、需求間隔時間服從伽馬分配

假設服務需求間隔時間服從  $\text{Gamma}(1/5.94,1)$ ，從演算法 2 取出其中取出某幾次迭代的結果，這些均為滿足限制式，但不一定能極小化目標函式的分群，並藉由上述對參數的假設，可算出每次迭代下的平均移動時間、平均等待時間、平均反應時間（由於平均服務時間已由(5)假設，所以無需討論），如圖 4-11, 4-12, 4-13。這三張圖中也都放入了 4 種不同的車速，討論車速隊平均移動時間、平均等待時間與平均反應時間的關聯性。圖 4-11 是幾次迭代的平均移動時間變化，隨著演算法 2 不斷地調整與更新中心點與分群邊界，平均移動時間在不同的車速下，都會隨著迭代的次數增加而下降，且遞減至最終的最佳設施地點  $\tilde{S}^*$ ，且當車

速愈小時，平均移動時間的下降趨勢愈明顯，也可看出車速愈大，平均移動時間隨著迭代變化幅度愈不明顯。

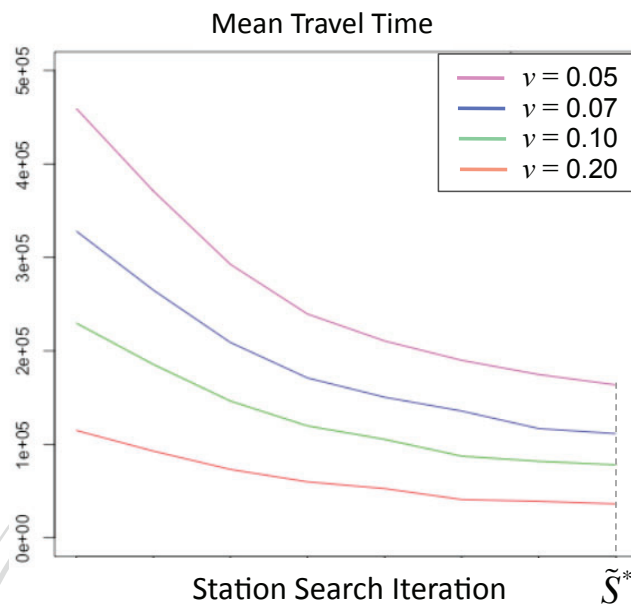


圖 4-11. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均移動時間。

圖 4-12 是這幾次迭代的平均等待時間變化，平均等待時間在不同的車速下，不會隨著迭代的次數增加而大幅度的變動，大致呈現水平趨勢。

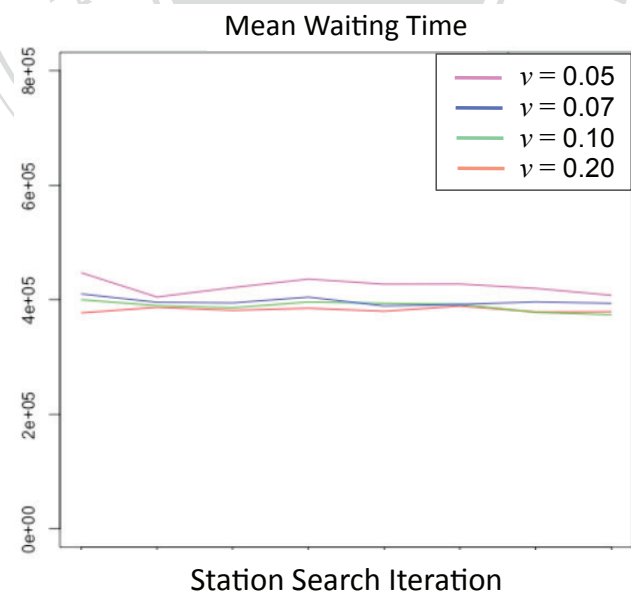


圖 4-12. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均等待時間。

圖 4-13 是這幾次迭代的平均反應時間變化，平均反應時間在不同的車速下，隨著迭代的次數增加而下降，遞減至最終的最佳設施地點 $\tilde{S}^*$ ，且如同平均移動時間相同，當車速愈小時，平均反應時間的下降趨勢愈明顯。

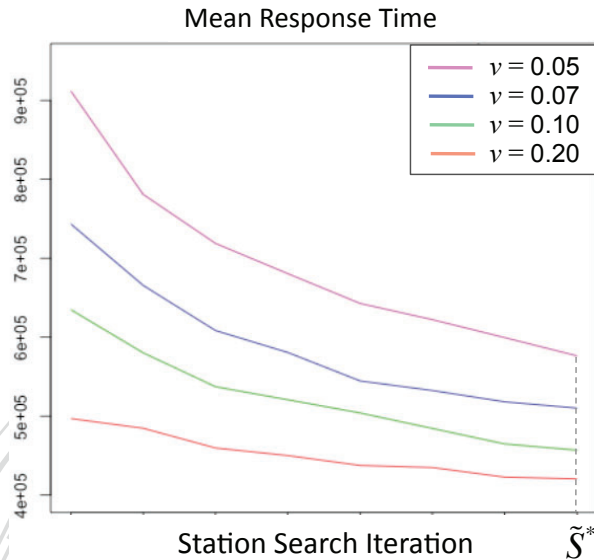


圖 4-13. Gamma(1/5.94,1)需求間隔時間下的平均反應時間。

由圖 4-11, 4-12, 4-13 可得到當平均移動時間下降時，平均反應時間也跟著下降，這可以顯示定理一的結果為正確，平均反應時間受平均移動時間的影響較大。

## 二、需求間隔時間服從指數分配

假設服務需求間隔時間服從 Exponential(5.94)，從演算法 2 取出其中取出某幾次迭代的結果，這些均為滿足限制式，但不一定能極小化目標函式的分群，並藉由上述對參數的假設，可算出每次迭代下的平均移動時間、平均等待時間、平均反應時間，如圖 4-14, 4-15, 4-16。這三張圖中也都放入了 4 種不同的車速，討論車速隊平均移動時間、平均等待時間與平均反應時間的關聯性。圖 4-14 是幾次迭代的平均移動時間變化，隨著演算法 2 不斷地調整與更新中心點與分群邊界，平均移動時間在不同的車速下，都會隨著迭代的次數增加而下降，且遞減至

最終的最佳設施地點  $\tilde{S}^*$ ，且當車速愈小時，平均移動時間的下降趨勢愈明顯，也可看出車速愈大，平均移動時間隨著迭代變化幅度愈不明顯。

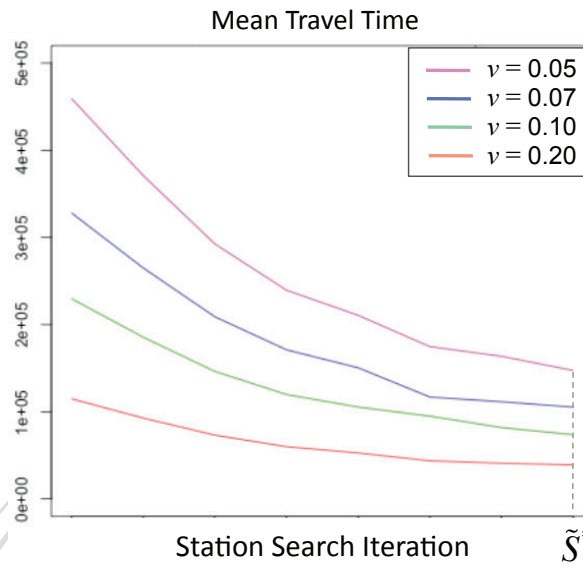


圖 4-14. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均移動時間。

圖 4-15 是這幾次迭代的平均等待時間變化，平均等待時間在不同的車速下，不會隨著迭代的次數增加而大幅度的變動，大致呈現水平趨勢。

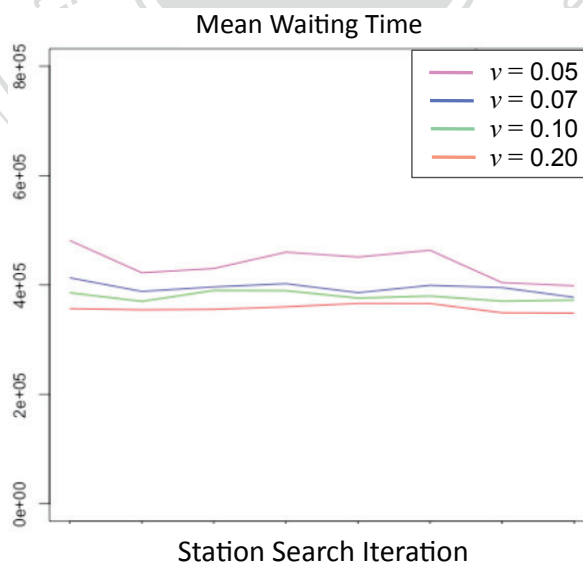


圖 4-15. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均等待時間。



圖 4-16 是這幾次迭代的平均反應時間變化，平均反應時間在不同的車速下，隨著迭代的次數增加而下降，遞減至最終的最佳設施地點  $\tilde{S}^*$ ，且如同平均移動時間相同，當車速愈小時，平均反應時間的下降趨勢愈明顯。

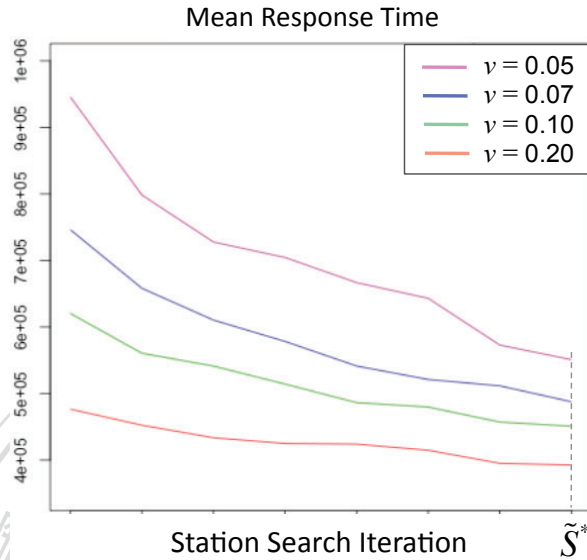


圖 4-16. Exponential(5.94)需求間隔時間下的平均反應時間。

由圖 4-14, 4-15, 4-16 可得到當平均移動時間下降時，平均反應時間也跟著下降，這可以顯示定理 1 的結果為正確，平均反應時間受平均移動時間的影響較大。

### 三、最佳位區途程策略

由以上兩小節可發現，兩種服務需求間隔時間模擬出結果皆非常相似，可推估服務需求間隔時間的變化，不影響最佳解的位置。我們利用演算法 2 解出位區途程策略的最佳解，假設起始中心點座標  $S_1 = (7.937, 5.806)$ 、 $S_2 = (5.922, 3.875)$ 、 $S_3 = (3.839, 2.193)$ ，與梯度下降法的變數  $\alpha = 0.0001$ ，如圖 4-17 是經由演算法 2 第一次迭代得到的結果，其中各群的中心點  $\tilde{S}_1 = (7.959, 6.030)$ 、 $\tilde{S}_2 = (6.003, 3.995)$ 、 $\tilde{S}_3 = (3.886, 2.248)$ ，三群內的點數調整為符合穩定性條件，但由圖可知  $\tilde{G}_1$  區域內的服務需求被路由策略分派至位於  $\tilde{S}_1$  的服務設施，而服務設施  $\tilde{S}_1$  不在  $\tilde{G}_1$  區域內，因此無法達到最短的平均反應時間。

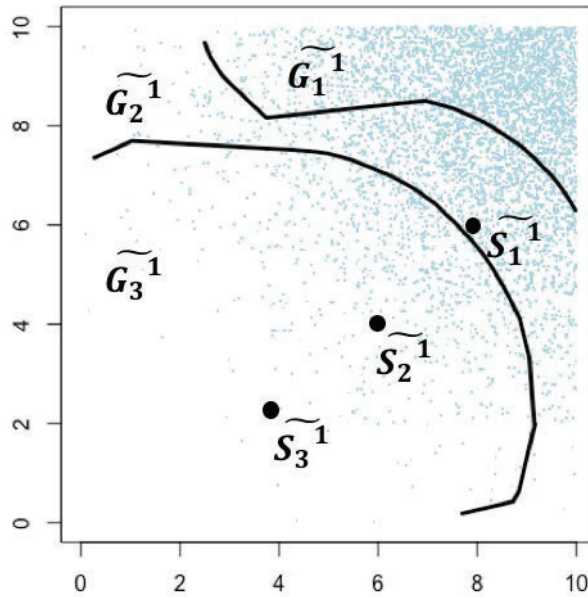


圖 4-17. 演算法 2 的第一次迭代分群結果。

最終經過 269 次迭代後得到最終分群結果（如圖 4-18），約花費 148 秒，其中最佳設施地點  $\widetilde{S}_1^* = (8.373, 8.820)$ 、 $\widetilde{S}_2^* = (8.310, 5.879)$ 、 $\widetilde{S}_3^* = (4.818, 8.121)$ 。而在  $\widetilde{G}_1^*$  區域內的服務需求會被路由策略分派至位於  $\widetilde{S}_1^*$  的服務設施， $\widetilde{G}_2^*$  區域內的服務需求則被路由策略分派至位於  $\widetilde{S}_2^*$  的服務設施， $\widetilde{G}_3^*$  區域內的服務需求被路由策略分派至位於  $\widetilde{S}_3^*$  的服務設施。

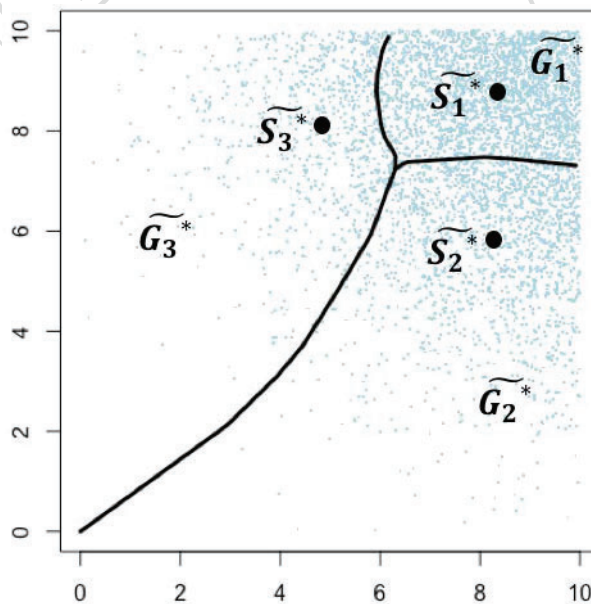


圖 4-18. 演算法 2 估計出的最佳分群結果。

截斷常態分配雖不像均勻分配圖形對稱於圖形的中心點座標 (5,5)，但會對稱於直線  $y=x$ ，因此部署中心點與路由策略的方法並不唯一，由於演算法的第一步是隨機放置起始中心點，當起始點的選擇不同，最終的收斂結果也會跟著不同，因此由演算法 2 在不同的起始中心點下也會得出不一樣的結果，若加入其他的限制條件，則可選出最佳的分群結果。

以上兩節分別在固定服務需求分配下，將不同車速與不同需求間隔時間的平均移動時間、平均等待時間與平均反應時間做比較，在不同的服務需求地點分配下，皆會滿足定理 1 的結論：平均反應時間主要受平均移動時間影響。並且我們藉由演算法 2 得到一組合適的位區途程策略，若再將服務設施設立成本或是電力配置等因素也放入限制式中，就能找出更精確的位區途程策略。



## 第五章 結論與探討

本文為第一篇利用資料驅動方式來解決複雜的位區途程問題，首先介紹了車輛服務系統的區位途程問題，在給定服務設施數量、各服務設施服務量與服務出現的間隔時間下，找出一個最佳服務設施地點與其對應的路由策略，使平均反應時間達到極小值。在穩定性條件與交通繁忙定理的假設下，將原本的最佳化問題近似為“K-medoids”分群問題，利用服務需求地點的資料特性來進行分群，其中分群的中心點即為服務設施設立地點，而每一群中的點可形成一個區塊，此區塊即是路由策略，若服務需求落在該區塊內，則路由策略會將它引導至位於該群的中心點的服務設施。但此問題並沒有想像中的容易解決，由於一般的分群問題並未考慮群內點數的多寡，相反的，對於服務系統會有穩定性因素，因此我們設計了兩個演算法來處理它。其中演算法 1 主要處理群內點數問題，將原有的分群結果之邊界微調，達到穩定性的限制演算法 2 利用梯度下降法尋找中心點，取得中心點便可再進行分群。之後藉由電腦模擬服務需求地點、服務出現間隔時間與汽車車速，便可藉由上述兩個演算法找出最佳服務設施地點與對應的最佳路由策略。

雖然在交通繁忙定理的假設下，汽車車速不至於太大，但若車速大時，服務系統的平均等待時間就不像車速較小能夠忽略，不過我們仍然能透過上述的分群方法尋找，最後再藉由微調中心點座標來找出最佳解。而設置服務設施必然有其他的限制條件，例如在不同地點會有不同租金費用，這也影響服務設施的設置地點選擇。對於其他的限制條件，我們可以在最佳化的限制式加上其他條件，再利用演算法 2 便可找出最佳解。接下來我們想解決的問題是在交通繁忙定理的假設條件無法達成時，也就是當服務系統沒有達到飽和（ $\rho \rightarrow 1$ ）之下，如何找出最

佳服務設施地點與最佳路由策略，因為在這樣的條件下，每個服務設施的平均等待時間估計式會變得更加複雜。



## 參考文獻

- [1] P. Hertzke, N. Müller, S. Schenk, and T. Wu. (2018) The global electric-vehicle market is amped up and on the rise. [Online]. Available: <https://www.mckinsey.com/industries/automotive-and-assembly/our-insights/the-global-electric-vehicle-market-is-amped-up-and-on-the-rise>
- [2] C. Luo, Y. F. Huang, and V. Gupta, “Placement of EV charging stations-balancing benefits among multiple entities,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 8, no. 2, pp. 759-768, 2017.
- [3] R. Mehta, D. Srinivasan, A. M. Khambadkone, J. Yang, and A. Trivedi, “Smart charging strategies for optimal integration of plug-in electric vehicles within existing distribution system infrastructure,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, no. 1, pp. 299-312, 2018.
- [4] H. Zhang, S. Moura, Z. Hu, and Y. Song, “PEV fast-charging station siting and sizing on coupled transportation and power networks,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, no. 4, pp. 2595-2605, 2018.
- [5] T. D. Chen, K. M. Kockelman, and M. Khan, “Locating electric vehicle charging stations: Parking-based assignment method for seattle, washington,” *Journal of the Transportation Research Board*, vol. 2385, no. 1, pp. 28-36, 2013.
- [6] A. Y. S. Lam, Y. W. Leung, and X. Chu, “Electric vehicle charging station placement: Formulation, complexity, and solutions,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 5, no. 6, pp. 2846-2856, 2014.
- [7] X. Wang, C. Yuen, N. U. Hassan, N. An, and W. Wu, “Electric vehicle charging station placement for urban public bus systems,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 128-139, 2017.
- [8] Q. Cui, Y. Weng, and C. W. Tan, “Electric vehicle charging station placement method for urban areas,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2019, doi: 10.1109/TSG.2019.2907262.

- [9] Y. Xiong, J. Gan, B. An, C. Miao, and A. L. C. Bazzan, "Optimal electric vehicle charging station placement," in *Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence*, Buenos Aires, 2015, pp. 2662-2668.
- [10] D. Efthymiou, K. Chrysostomou, M. Morfoulaki, and G. Aifantopoulou, "Electric vehicles charging infrastructure location: a genetic algorithm approach," *European Transport Research Review*, vol. 9, no. 27, 2017.
- [11] S. Deb, K. Kalita, and P. Mahanta, "Impact of electric vehicle charging station load on distribution network," *Energies*, vol. 11, no. 178, 2018.
- [12] Z. Jiang, H. Tian, M. J. Beshir, S. Vohra, and A. Mazloomzadeh, "Analysis of electric vehicle charging impact on the electric power grid: Based on smart grid regional demonstration project - Los Angeles," in *Proceedings of the IEEE PES Transmission & Distribution Conference and Exposition-Latin America (PES T&D-LA)*, Morelia, 2016.
- [13] W. Khan, F. Ahmad, and M. S. Alam, "Fast EV charging station integration with grid ensuring optimal and quality power exchange," *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 143-152, 2019.
- [14] Q. Kong, M. Fowler, E. Entchev, H. Ribberink, and R. McCallum, "The role of charging infrastructure in electric vehicle implementation within smart grids," *Energies*, vol. 11, no. 3362, 2018.
- [15] A. Arias, J. D. Sanchez, and M. Granada, "Integrated planning of electric vehicles routing and charging stations location considering transportation networks and power distribution systems," *International Journal of Industrial Engineering Computations*, vol. 9, no. 4, pp. 535-550, 2018.
- [16] R. T. Berger, C. R. Coullard, and M. S. Daskin, "Location-routing problems with distance constraints," *Transportation Science*, vol. 41, pp. 29-43, 2007.
- [17] T. W. Chien, "Heuristic procedures for practical-sized uncapacitated location-capacitated routing problems," *Decision Sciences*, vol. 24, pp. 995-1021, 1993.
- [18] J. Hof, M. Schneider, and D. Goeke, "Solving the battery swap station location-routing problem with capacitated electric vehicles using an AVNS algorithm for

- vehicle-routing problems with intermediate stops,” *Transportation Research Part B Methodological*, vol. 97, pp. 102-112, 2017.
- [19] Y. C. Hung and G. Michailidis, “Optimal routing for electric vehicle service systems,” *European Journal of Operational Research*, vol. 247, no. 2, pp. 515-524, 2015.
- [20] J. Paz, M. Granada-Echeverri, and J. Escobar, “The multi-depot electric vehicle location routing problem with time windows,” *International Journal of Industrial Engineering Computations*, vol. 9, no. 1, pp. 123-136, 2018.
- [21] J. Yang and H. Sun, “Battery swap station location-routing problem with capacitated electric vehicles,” *Computers and Operations Research*, vol. 55, no. C, pp. 217-232, 2015.
- [22] L. Wang and Y. B. Song, “Multiple charging station location-routing problem with time window of electric vehicle,” *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 5, pp. 190-201, 2015.
- [23] T. Chen, B. Zhang, H. Pourbabak, A. Kavousi-Fard, and W. Su, “Optimal routing and charging of an electric vehicle fleet for high-efficiency dynamic transit systems,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, no. 4, pp. 3563-3572, 2018.
- [24] W. Yuan, J. Huang, Y. Jun, and A. Zhang, “Competitive charging station pricing for plug-in electric vehicles,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 8, no. 2, pp. 627-639, 2017.
- [25] Y. Marinakis (2008) Location Routing Problem. In : Floudas C., Pardalos P. (eds) Encyclopedia of Optimization. Springer, Boston, MA.
- [26] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. New York: Chapman and Hall, 1986.
- [27] Z. Drezner and H. W. Hamacher, *Facility location: applications and theory*. New York: Springer, 2004.
- [28] H. Min, V. Jayaraman, and R. Srivastava, “Combined location-routing problems: A synthesis and future research directions,” *European Journal of Operational Research*, vol. 108, no. 1, pp. 1-15, 1998.



- [29] C. Ortiz-Astorquiza, I. Contreras, and G. Laporte, "Multi-level facility location problems," *European Journal of Operational Research*, vol. 267, no. 3, pp. 791–805, 2018.
- [30] W. Whitt, "Approximations for the GI/G/m queue," *Production and Operations Management*, vol. 2, no. 2, pp. 114–161, 1993.
- [31] L. Kaufman and P. J. Rousseeuw, *Clustering by means of Medoids*. Amsterdam: North-Holland, 1987.
- [32] E. Schubert and P. Rousseeuw, "Faster k-medoids clustering: Improving the PAM, CLARA, and CLARANS algorithms," *arXiv.org*, vol. cs.LG, 2018. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1810.05691>
- [33] S. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, no. 2, pp. 129–137, 1982.
- [34] J. B. MacQueen, "Some methods for classification and analysis of multivariate observations," in *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol.1. Berkeley: University of California Press, 1967, pp. 281–297.
- [35] C. Lemarecha, "Cauchy and the gradient method," *Documenta Mathematica Extra Volume ISMP*, pp. 251–254, 2012.
- [36] E. Polak, *Optimization : Algorithms and Consistent Approximations*. New York: Springer-Verlag, 1997.