airiti Library

本文章已註冊DOI數位物件識別碼

簡單通往複雜之路－科學家對成長函數超過一甲子的狂熱

doi:10.6851/MSHCM.201701_(11).0005

數理人文, (11), 2017

”Mathematics, Science, History, and Culture” Magazine, (11), 2017

作者/Author： 班榮超

頁數/Page： 20-31

出版日期/Publication Date：2017/01

引用本篇文獻時，請提供DOI資訊，並透過DOI永久網址取得最正確的書目資訊。

To cite this Article, please include the DOI name in your reference data.

請使用本篇文獻DOI永久網址進行連結:

To link to this Article:

http://dx.doi.org/10.6851/MSHCM.201701_(11).0005

DOI Enhanced

DOI是數位物件識別碼（Digital Object Identifier, DOI）的簡稱，
是這篇文章在網路上的唯一識別碼，
用於永久連結及引用該篇文章。

若想得知更多DOI使用資訊，

請參考 http://doi.airiti.com

For more information,

Please see: http://doi.airiti.com

請往下捲動至下一頁，開始閱讀本篇文獻

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

最完整的學術整合查詢平台—華藝線上圖書館 ● http://www.airitilibrary.com ● Find more academic articles on Airiti Library

專題

簡單通往複雜之路

科學家對成長函數超過一甲子的狂熱

作者：班榮超

班榮超為東華大學應用數學系教授，主要研究領域為微分方程、動力系統、遍歷理論。

近年來臺灣多了不少連續假期。放假時全家大小出門走走，呼吸新鮮空氣的同時也欣賞著青山綠水，好不愜意。但你是否曾經注意到美麗的大自然中，藏著一些看來複雜卻又似乎暗藏規則的現象或模式（pattern），例如雪花、雲朵、蕨類、針葉、甚至海岸線等？好奇心驅使我們在欣賞大自然瑰藏的同時，也想知道它們是如何出現的。

首先，我們想知道究竟是甚麼機制讓它們變成現在的模樣？接下來也想知道如果給定某個複雜現象，我們是否能重新構造或解釋這個複雜現象背後的生成機制？透過這個生成機制，又能夠理解多少類似的複雜現象？「複雜」這個詞是這篇文章的核心，本文大半篇幅將說明數學家如何詮釋「複雜」這個詞。儘管如此，我們將盡量避免艱澀的數學語彙，希望能用更淺白的語言，闡述這些現象背後的機制。

本文將先提供一些從簡單機制產生複雜模式的方法，包括 L 系統與迭代函數系統（iterated function system，簡稱 IFS），也包含生物數學家梅（Robert May）引介的成長函數（logistic function）❶。成長函數的研究提供混沌理論許多放諸四海皆準的概念，而函數本身又十分簡單，是從簡單機制生成複雜現象的經典範例，因此獲得許多科學家與數學家的喜愛。筆者曾在《數理人文》第六期的〈淺談動力系統中的禍福相倚〉談過成長函數，但那篇文章著重近年對於該函數較進階的研究結果，本文的主軸則鎖定從 1972 年開始，由梅、李天岩、約克（James Yorke）研究這類函數所揭開的混沌理論，再順道介紹試圖釐清系統混亂程度的各種混沌定義。筆者希望這兩篇文章有互補的效果，讀者可以參酌併讀，一窺大自然提供的有趣謎團。

三分之一康特爾集

要說明複雜的模式，一個知名的例子是康托集（Cantor set），這是康托（Georg Cantor ）[1] 在 1883 年介紹的一種點集。建構康托集的方法非常簡單。首先從閉區間 $[0,1]$ 開始，先挖掉中間的三分之一，亦即 $(1/3,2/3)$。注意因為挖掉的是開區間，所以端點 $1/3$ 和 $2/3$ 會留下；接下來，在剩下左右各三分之一的兩區間，再分別執行同樣的操作（圖 1）；然後以此類推，一直不斷執行挖掉的操作，最後剩下的集合稱為康托集。由於每次挖掉的都是開區間，不包含區間的端點，於是每階段剩下的集合都是閉集（closed set），這就保證最後剩下來的康托集不是空集合。

康托集很有趣。首先，它的勒貝格測度（Lebesgue measure）是零，也就是它不占長度，感覺上像是很多孤立點的組合，但其實康托集任一點旁邊，總是有其他的點相隨，感覺又不孤單（專業術語稱為完美集，perfect set）。甚且，它的豪斯朵夫維度（Hausdorff dimension）是正數，這表示它的點數非常多，事實上康托集的點數是不可數的無窮多，就像實數一樣。

更特別的是，如果將最開始左邊三分之一區間中的康托集部分放大三倍，很容易就知道它和原來的康托集是全等的，這稱為自相似性（self-similarity）。事實上，如果將任一階段任一小區間中的康托集部分放大足夠的倍數，都會和原康托集一致。這種自相似性是某些複雜現象的特徵。

總之，康托集正是透過簡單機制就可造成複雜模

圖 1 康托集由上而下的構造過程。

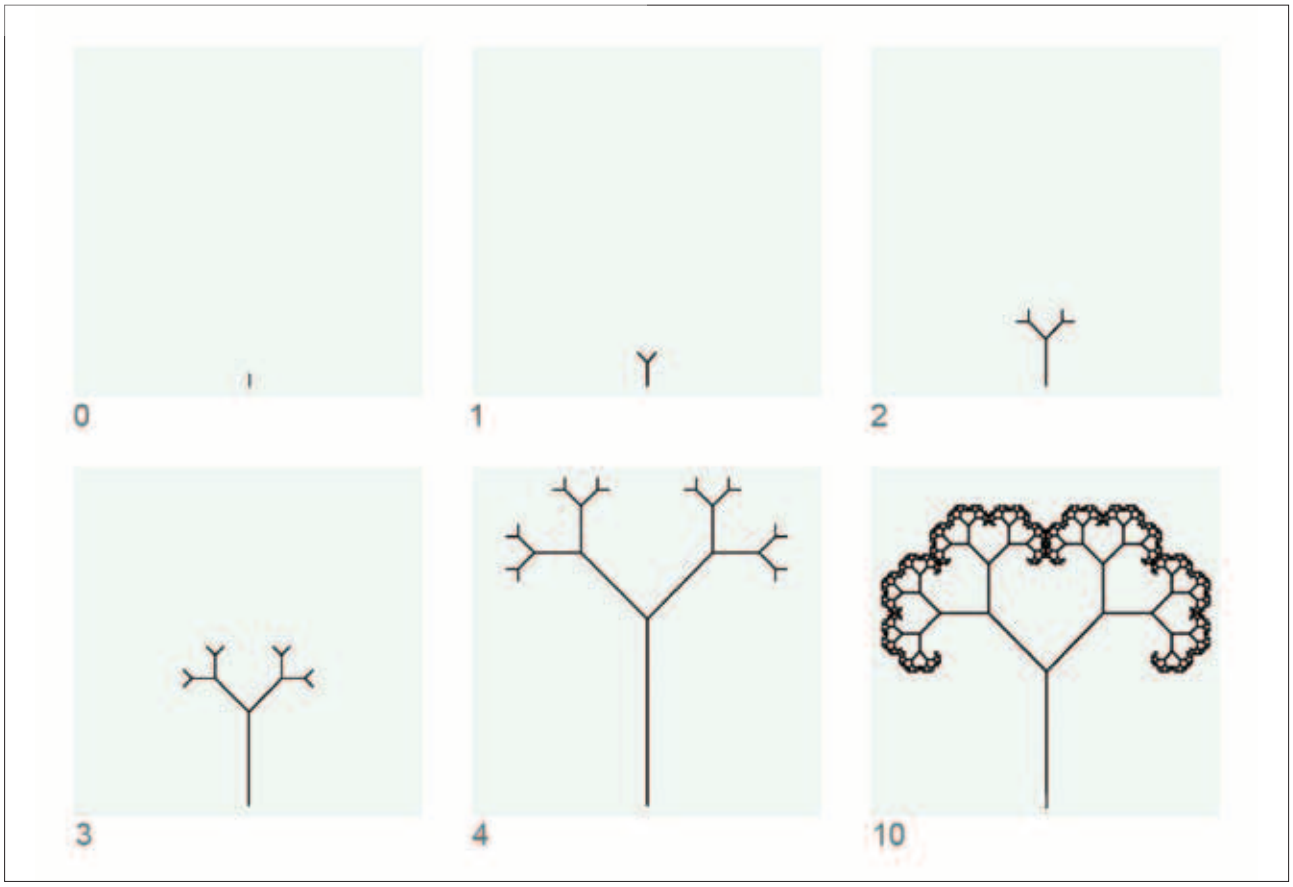

圖 2 一個 L 系統的例子，左下角是迭代的次數。0 表示起始態。第 10 代的圖已縮小。（重製自維基）

式最簡單的模型。

L 系統

接下來介紹的 L 系統，也是經由固定操作程序便可造出複雜模式的模型。這是由荷蘭烏特列茲（Utrecht）大學的生物學家、匈牙利裔的林登麥爾（Aristid Lindenmayer）於 1968 年提出的一類系統 [2]，所以稱為 L 系統。這個系統本來是模擬生長細胞交互作用的一套數學模型，之後廣泛應用於植物生長過程的相關研究。

L 系統主要是透過一套簡單文法來建構模式。其建構的文法有三種要素，即字元集、起始態和生產規則。舉例來說，假設只有兩個字元 0 和 1，起始點是 0，生長規則有兩個：（0 → 01）和（1 → 0），也就是字元 0 演變成 01，字元 1 演變成 0。根據這個文法規則就產生一種語言系統，其演變過程如下：

0（起始點）→ 01 → 010 → 01001 → 01001010

❶ 編註：這裡沿用《數理人文》第六期的譯名。

airiti

圖 3 另一個效果如針葉的 L 系統。（維基）

→ 0100101001001 → ……

這個語法可以這樣理解：想像 0 代表某物種的成年態，1 代表未成年態；起始點 0 表示一開始由一個成年物種開始；規則（0 → 01）表示除了 0 繼續留存之外，還生出一個未成年物種；規則（1 → 0）則表示未成年物種下一次會長大成年。於是由 0 出發，透過這個規則不斷演變，就可以大致判斷該物種在多年後的演變狀態，甚至物種個數等，這就是最早的 L 系統概念，

不限於生物學，物理、數學也借用 L 系統來模擬高維度複雜模式的演變機制。圖 2 是一個例子，從起始點開始，本系統的簡單規則就是將一個小支分岔，局部看起來像 Y 字形，之後就是在新生的枝枒再持續一直分岔，這也是一類 L 系統。請注意，這些系統都是透過簡單幾個基本「字元」，從起始點開始，依照很簡單的規則去生成，但最後形成的系統或圖形卻非常複雜。例如圖 3 就是透過簡單文法規則形成的 L 系統，是不是很像松柏之類的針葉呢？

前文提到的康托集也可以用 L 系統來描述。假設字元是 A 和 B，起始點是 A，生成規則是（A → ABA）、（B → BBB）。這個 L 系統和康托集是這樣對應的：字元 A 代表一整個區間（一開始的 A 是 $[0, 1]$），字元 B 代表空白，也就是挖去的部分。規則（A → ABA）表示將原本的區間分成三段，由左到右 ABA 表示區間 / 空白 / 區間，這正是康托集挖去中間三分之一的規則；而（B → BBB）代表空白的部分維持空白（挖掉就

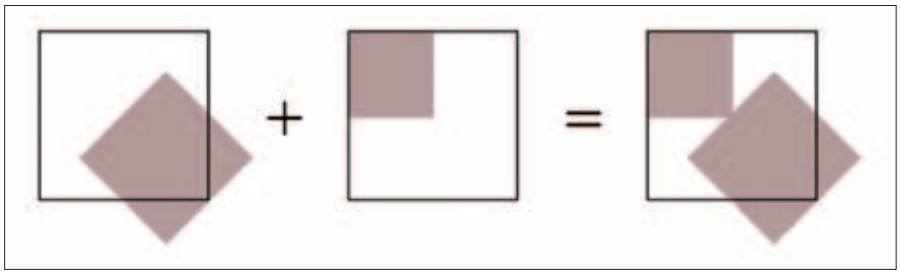

圖 4 兩個映射的組合構成一個迭代函數系統。

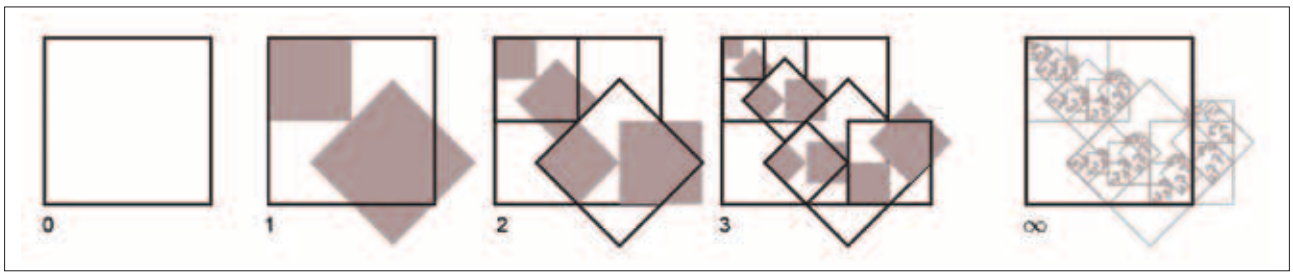

圖 5 連續迭代，圖形越來越複雜，後來趨近於一個碎形吸引子。

airiti

不用再挖了！）。透過這樣的文法規則，由字元 A 出發形成的 L 系統正好對應到康托集的構造過程。

迭代函數系統

再來介紹另一種生成複雜模式的標準機制。數學家很喜歡這種機制，因為可以引入數學語言來研究複雜模式的內部結構，例如豪斯朵夫維度和自相似性等。這類機制稱為迭代函數系統（IFS）。

IFS 是有限個映射 G_1、⋯、G_k 所成的集合 G，其中每一映射 G_1 都必須是收縮映射，每個映射可能也包括旋轉和平移這兩類映射的成分。例如圖 4 中的 G 包含兩個映射，第一個映射 G_1 的效果將正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 經過收縮、旋轉、平移，映到右下角的灰紅色部分，第二個映射 G_2 將 $[0,1]\times[0,1]$ 經過收縮、平移，映到左上角的灰紅色部分。

$\{G_1, G_2\}$ 這組 IFS 的第一次迭代將正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 映到兩個灰紅色正方形（見圖 5），接下來第二次迭代，得到四個更小的灰紅色正方形，不斷迭代這個操作，因為兩個映射都是收縮映射，陰影部分的面積越來越小，越來越細，最後的極限則形成所謂的吸引子（attractor）。

1981 年，哈金森（John E. Hutchinson）證明對於一組 IFS，總會存在唯一的吸引子。這類吸引子可以描述相當多種碎形（fractal）集合的內部結構。此外如同前面提到的，數學家很樂於引入數學語言來研究吸引子。

就像 L 系統一樣，我們也可以用 IFS 來建構康托集。取一組 IFS 如下

$$G=\left\{G_1=\frac{1}{3}x,\ G_2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right\}$$

讀者可自行檢查，這兩個函數所形成的吸引子就是康托集。再根據迭代函數系統理論的一個性質，此康托集的豪斯朵夫維數 $\log 2/\log 3$ 剛好就是滿足底下方程式的根 s：

$$(\frac{1}{3})^s+(\frac{1}{3})^s=1$$

其中方程式中的兩個 $1/3$ 恰恰就是 G 中兩個函數的收縮率，可以看出豪斯朵夫維數和這兩個映射的平移量無關。不過這是因這兩個映射將 $[0,1]$ 區間迭代一次後沒有重疊，若發生重疊，就需要另一套理論了。

成長函數的家族

前文介紹了兩類由簡單機制產生複雜模式的系統，接下來我們要介紹另一類系統——成長函數，透過迭代後這類系統也會產生複雜現象。成長函數形如$F_r(x)=rx(1-x)$，是一組帶參數 r 的二次函數，其函數圖形如圖 6，是開口向下的拋物線。

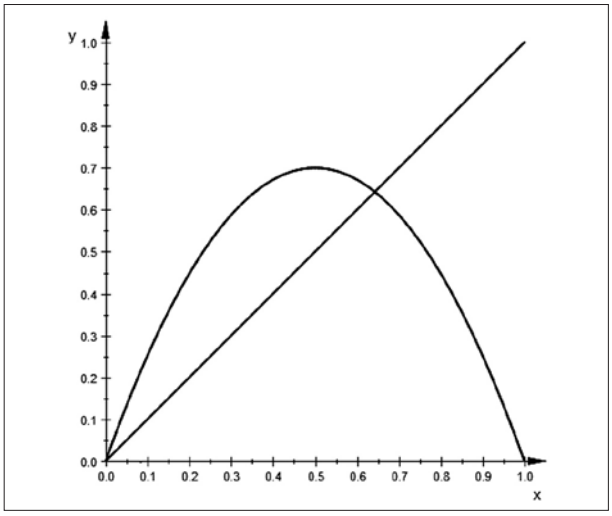

圖 6 生長函數的函數圖形，參數值大概是 2.8。（維基）

airiti

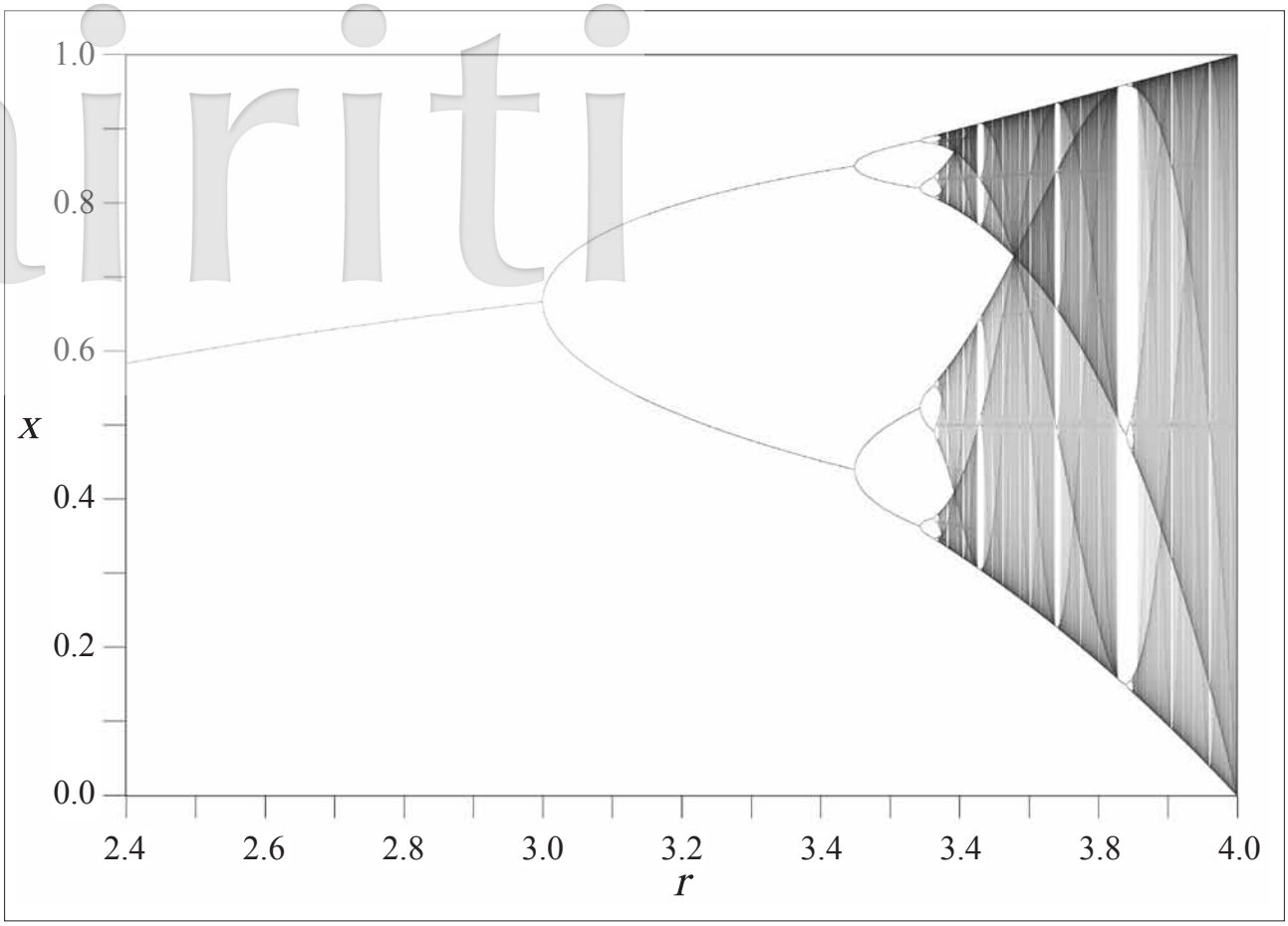

圖 7 生長函數的分歧圖。（維基）

為了解釋成長函數如何產生豐富的混沌現象與迷人的自相似性，需要透過分歧圖（bifurcation diagram）來說明（圖 7）。分歧圖展現了成長函數豐富的自相似性。這個領域的許多漂亮研究結果，都是為了釐清分歧圖結構問題而衍生出來的。

為了解釋分歧圖，我們再說明一下何謂迭代：給定成長函數 $F_r(x)$ 與 $[0,1]$ 中一點 a，則 a 的一次迭代是 $F_r(a) \equiv F_r^1(a)$，二次迭代是 $F_r(F_r(a)) \equiv F_r^2(a)$，以此類推。如果從幾何觀點，可用 $F_r(x)$ 的函數圖形來檢視：由 x - 軸 $[0,1]$ 中的 a 開始，它的一次迭代就是將 a 先垂直往上到達函數曲線上，再水平移到對角線上，這一點的 x 分量（投影到 x - 軸的點）就是 $F_r(a)$。接下來從對角線上這一點，垂直移到函數曲線，再到對角線上，這個新點的 x 分量就是二次迭代 $F_r^2(a)$，一直這樣下去（如圖 8），就會得到 $O(a) = \{a, F_r^1(a), F_r^2(a), \ldots\}$，稱為 a 點的軌道集合。研究 a 的軌道就可以知道它的最終行為。

研究一點的軌道是動力系統（dynamical system）領域的重要課題。例如給定一個成長函數

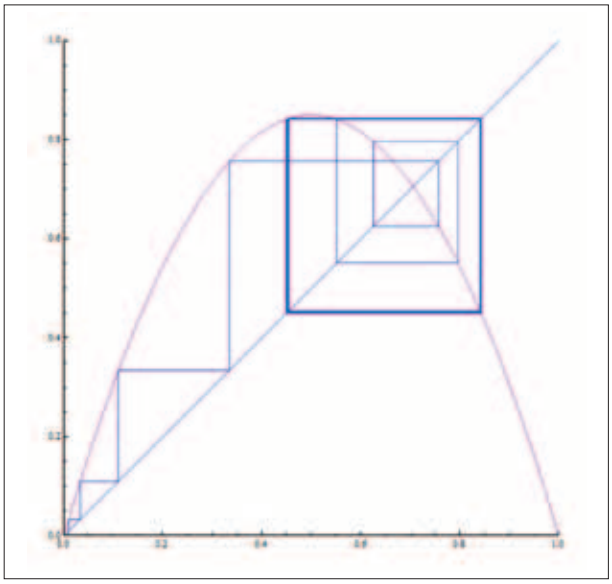

圖 8 用函數圖形來觀察一點的迭代行為或軌道，此點後來進入一週期二的週期點。（Amazoti, math.stackchange）

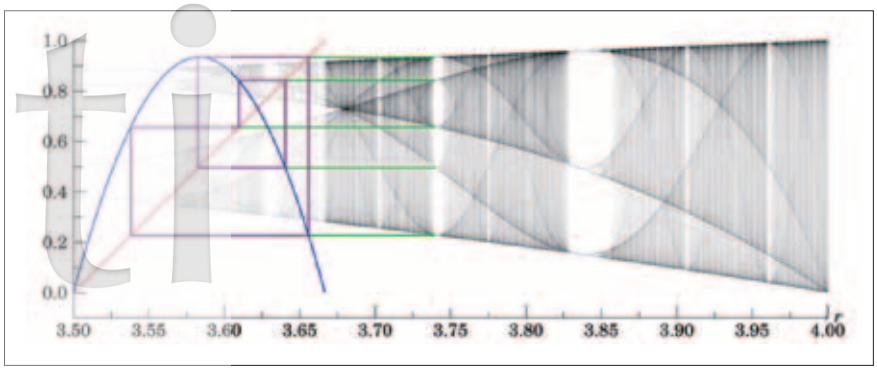

圖 9 特別放大分歧圖右側比較混亂的區域。左邊有一個週期五點的對應。（維基）

F_r，就會在相空間 $[0,1]$ 上形成一個動力系統，我們最想理解的是：可否知道 $[0,1]$ 中所有點的終極行為？

所謂動力系統，是隨時間（連續或離散）而演變的系統。例如太平洋上的颱風，受到高壓帶、季風、環流等各種因素的聯合影響，決定了颱風隔天（下一小時、下一秒等）的行進軌跡。科學家在實際研究時，常去除影響小的因素，套入一個動力系統或微分方程的模型來預測颱風的動態，這是氣象學家很關心的課題 ❷。我們現在考慮的系統也是如此。把迭代的次數想成離散的時間，所有的 $F_r^i(a)$ 便是任一起始狀態 a 隨時間演變的過程，構成一個動力系統。

細看分歧圖

回到成長函數，先固定一個參數 r，想把點 a 迭代的軌跡集合 $O(a)$ 標示出來，不過因為一般主要關心的是迭代的最終行為，因此捨棄前 10 萬點，將第 10 萬到第 50 萬點的軌跡標示在 $[0,1]$ 上。依此類推，畫出所有參數的軌跡圖。以 $[0,1]$ 為縱軸，參數為橫軸，所得的整體圖形稱為分歧圖。

如果在某個參數 r，$[0,1]$ 上的點迭代後都趨近於特定的點（稱為吸引不動點），則對任何點 x，$O(x)$ 最終都集中在不動點上，於是分歧圖在此參數對應的點只有吸引不動點一點。同理，當某參數 r 的成長函數出現吸引雙週期點時，也就是所有點迭代後都趨近於特定兩點，而這兩點本身迭代時則是交互震盪（所以週期是二），則分歧圖上此參數對應的就是這兩個點，以此類推。圖 9 中給出一個週期五週期點例子。

仔細觀察分歧圖，當參數 r 比較小時，對應到的是一條線，表示成長函數在小參數時只有吸引不動點。但大約在 $r=3$ 附近開始產生分歧，出現週期二的擺盪週期點，之後在 3.43 附近它會再分歧成四個點、八個點，之後一直以二的倍數增加。但是在參數大概介於 3.55 與 4 之間出現一些相當有趣、奇怪的嶄新行為，只見圖上黑白交錯，談不上黑也說不上白。

再繼續下去到了 3.83 附近，可以看到一大塊白色區域，此時系統在該參數上出現週期三的點，再往右移動仔細看，發現週期三的每一線又再分歧產生週期二（就整個函數是週期六）、週期四等的現象。如果挑上面那一小塊，將它局部適當放大與調整，會發現這一小部分和本來的圖形幾乎完全一致。若將放大後的圖形中間類似原來那塊白色區域的上半支再度局部放大，會很驚訝的發現他和最原始的圖形又有驚人的吻合。事實上，你若挑黑色區域放大檢視，也會發現它有無窮多個微小區域是原來部分的複製。也就是說，分歧圖有著驚人的自相似性。我們要強調的是，$F_r(x)$ 是一個再簡單不過的函數，而點 a 的選取也沒有任何獨特性，事實上，$[0,1]$ 裡幾乎所有點 a 畫出來的都是一樣的分歧圖，這相當令人驚訝，但故事還沒結束！

❷ 颱風來時，常可看到美國、中國、日本、臺灣的颱風分析路徑圖，路徑圖的準確性基本上和投入氣象研究的資金成正比。因為預測準確依賴置入更多的可能變數，更多變數的龐大計算需要效能更好的計算機，也就需要更多資金。

airiti

費根堡常數

1978 年，美國洛沙拉摩斯國家實驗室的物理學家費根堡（Mitchell Feigenbaum）[3] 觀察到一個現象，若將分歧圖上週期一（吸引不動點）變成週期二的分歧點參數命名為 r_1，週期二變成週期四的分歧點參數為 r_2，以此類推，週期 2^{n-1} 變成週期 2^n 的分歧點參數為 r_n。然後費根堡考慮比值

$$\frac{r_{n-1}-r_{n-2}}{r_n-r_{n-1}}$$

發現隨著 n 變大，比值會趨近 4.669220 ⋯。

這個比值有極限或許還不算太了不起，然而費根堡把相同程序用到另一組二次函數 $Q_a(x)=1-ax^2$ 時，也得到一樣的數值 ❸。事實上，如果在所謂單峰（unimodal）映射上進行一樣的操作，大部分都有完全相同的極限值。這表示對大部分單峰映射來說，週期 2^n 週期點成長到週期 2^{n+1} 的週期點的過程，所對應的參數 r 近乎有一定的增長速率，且這個速率放諸四海皆準。後來發現，對於複數平面上的二次函數 $g_c(z)=z^2+c$ 這個現象也成立。基於這是一個有趣、重要又具有普適性的發現，這個常數就命名為費根堡常數。

看到這麼驚人的圖形以及內藏的結構，數學家提出更深入的問題：有沒有一個參數對應的集合是全黑的？如果有，黑色部分的參數集合是否有正測度？白色部分的參數看似很多，但它是否有滿測度？這些問題的討論，筆者在《數理人文》第六期有進一步的解釋，本文不再贅述。

再探分歧圖：拓樸熵

為了和後續的混沌概念接軌，我們要再提供一個觀點——熵（entropy）——來分析分歧。熵是源於熱力學的概念，用來研究一個系統的複雜性。數學上對於熵的定義很多元，細節也相當複雜。為了避免干擾或混淆讀者，我們介紹一個比較容易理解的定義，也就是拓樸熵（topological entropy）。

給定一個定義在 $[0,1]$ 上的連續函數 F，定義 F 的拓樸熵如下：

$$h(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log|G_n(F)|}{n}$$

其中 $|G_n(F)|$ 表示 F 在 $[0,1]$ 上 n 週期點軌道的個數。如果 F 的拓樸熵 $h(F)>0$，代表函數 F 在 $[0,1]$ 內的 n 週期點軌道數隨著 n 增加，呈現指數增加，相當程度透露該系統十分複雜。

下文會提及當系統只有吸引週期 2^n 週期點時，除了 $2^k(k\le n)$ 的週期點外，不會有其他週期點，這時系統拓樸熵為零，表示系統相對單純，軌道變化的花樣不夠豐富。

1977 年，兩位費爾茲獎得主米爾諾（John Milnor）以及瑟斯頓（William Thurston）❹ 透過所謂揉捏理論（kneading theory）的方法，證明拓樸熵函數隨著參數 r 呈現所謂「魔鬼階梯」（devil's staircase）的函數結構 [4]，亦即這函數是連續、遞增，而且函數值是常數的部分，是一個稠密在 $[0,1]$ 區間的開集 ❺。這個結果的意義是，參數在一段緊連著白色部分的熵都是常數，而且這些無窮多個熵為常數的小平台佔據了大部分的參數集。由於魔鬼階梯函數有自相似性，因此相當程度顯示，成長函數在熵的意義下有自相似性。

airiti

從李 / 約克混沌談起

道生一，一生二，二生三，三生萬物

——《老子道德經四十二章》

雖然我們談到複雜的系統，但還沒有真正碰觸到混沌的課題。描述混沌或各種混亂程度的說法並未完全統一。我們先介紹幾個描述混亂的拓樸性質，試著揭開這類混沌的面紗。

混沌相關的定義最早出現在李天岩和約克 1975 年發表的知名文章上 [5]。這篇文章的源起是希望理解當時勞倫茲（E. N. Lorentz）關於氣象預測的相關工作。他們在審閱勞倫茲的文章時，發覺該系統違背傳統微分方程理論，一般相信任一軌道（解）終究趨近的歸宿，是像不動點或週期點這類比較規則的東西。但是勞倫茲的結果卻顯示從某個點出發的軌跡有相當程度的不可預測性。為了更清楚的理解這個現象，李天岩和約克將焦點放在比較簡單的成長函數上，尤其是週期三吸引週期點的參數 3.83 附近（可回顧圖 7）。

首先，在這個參數，幾乎所有點都被這三個週期點吸引。用嚴格一點的說法，就是在勒貝格測度的意義下，絕大部分的點都被吸引到週期三的三點附近。然而李天岩和約克觀察到另一個事實，就是剩下的點（勒貝格測度意義下為零）有著十分奇怪而不可預測的特性。我們將其定理敘述如下：

若 F 是定義在實數上的實連續函數，且 F 有一個週期三的點，則我們有三個結論

（1）對任何自然數 n，F 都有週期 n 的點。

（2）存在一個不可數的子集 S，其中任兩點 x 和 y，都滿足 $\liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| = 0$ 和

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| > 0 \text{ 。}$$

（3）對任何一個週期點 P 以及 S 內的點 x，我們有

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| > 0 \text{。}$$

定理第一點說，F 一旦有週期三的點，就會有任意 n 的週期點。第二點說存在一個不大不小的奇怪集合 S。你在其中任選兩點，它們在不斷迭代的過程裡，總是有時靠近（而且只要時間夠久，想多靠近就可以多靠近），有時分開，一直這樣下去。第二點和第三點合起來的結論是，S 和被吸引到週期三週期點的那些點完全是兩回事。

總的來說，就是 S 內每一點的最終行為沒有那麼容易描述，因為其中任兩點的軌跡都可近可遠，最終也不會被吸引到週期點，形成一個非常複雜的圖像。滿足（2）的不可數集一般稱為混亂集（scrambled set），一個系統若存在混亂集，就稱該系統有李 / 約克混沌（Li-Yorke chaos）。簡而言之，一旦系統中有李 / 約克混沌，就表示系統內部存在相當多（不可數）無法預測其終極行為的點。當然這表示該系統內含一定程度的混亂。

讀者或許會好奇，週期三參數時的混亂集倒底在 $[0, 1]$ 中的哪裡？如果它的勒貝格測度為零，李天岩和約克要如何找到它？我們不彷用康托集來做類比。請讀者想像在形成康托集時要挖掉的那些部

❸ 這個帶參數 a 的二次函數，也可建立類似成長函數的分歧圖，因此也可定義類似比值。

❹ 1977 年，瑟斯頓尚未得獎，不過等這篇文章 1988 年出版時，他已經得獎了。

❺ 這種函數就像微積分課堂學的康托函數（Cantor function）一樣。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 3 & \succ & 5 & \succ & 7 & \succ & \cdots & \succ & (2n+1)\times 2^0 & \succ & \cdots \\
\succ & 3\times 2 & \succ & 5\times 2 & \succ & 7\times 2 & \succ & \cdots & \succ & (2n+1)\times 2^1 & \succ & \cdots \\
\succ & 3\times 2^2 & \succ & 5\times 2^2 & \succ & 7\times 2^2 & \succ & \cdots & \succ & (2n+1)\times 2^2 & \succ & \cdots \\
 & & & & & & & \cdots & & & & \\
\succ & 2^n & \succ & \cdots & \succ & 8 & \succ & 4 & \succ & 2 & \succ & 1
\end{array}
$$

圖 10 沙可夫斯基所定義的大小關係圖

分，就是會被吸引到週期點上的點，而不斷操作最後留下來的點（也就是康托集）則能證明不會被吸引到週期點。康托集的確是不可數的。事實上李天岩和約克正是這樣找到這些點，它們雖然不容易被看到，但若透過剛剛的想法，都可以清楚建構出來。由於康托集有一種符號動力學（symbolic dynamics）的描述方式，因此上述想法的術語是「將系統共軛至符號系統」。混沌系統的研究絕大部分都需要做這種共軛轉換，在某類符號系統中細部刻劃後，再轉換回原系統。符號動力學是研究混沌不可或缺的理論工具。

沙可夫斯基排序

最後，關於李 / 約克定理的（1）還有一個很有趣的故事。事實上，早在 1960 年代，烏克蘭數學家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovsky）就已經知道（1）的現象 [6]。首先我們定義一種特別的大小關係（見圖 10）：

對於定義在 $[0,1]$ 上的連續函數，沙可夫斯基證明若該函數有週期 k 週期點，則必有比 k 「小」的週期點。由於在這個特別的大小關係裡，三是最大的正整數，所以當一連續函數有週期三週期點，就保證存在任何週期的週期點，這正是李 / 約克定理的（1）。

沙可夫斯基定理雖然比李 / 約克定理更早出現，但在當時美蘇冷戰的背景下，蘇聯論文很少在學術環境流傳，所以被重新發現了一次。不過由於沙可夫斯基的定理更早也更具一般性，所以日後稱之為沙可夫斯基排序（Sharkovsky ordering）。

德凡尼混沌

在李 / 約克混沌出現之後，不僅在數學圈，在科學界更掀起一股巨大風潮，舉凡自然科學，不管是物理、化學、生物、經濟、電機、氣象學，甚至人文科學，都發現有類似混沌的現象，所以許多科學家紛紛將研究重心轉到混沌系統，數學界也沒有缺席。數學家德凡尼（Robert Devaney）觀察許多混亂的系統，他抽取出三項性質來定義「混沌系統」——對初始條件敏感、拓樸傳遞、週期點稠密。

初始條件敏感

德凡尼首先定義一個混沌系統必須對初始條件敏感：在一個（物理）系統裡，取盡量接近的兩個初始點來做迭代（離散）或求解（連續）時，兩點後來的軌跡卻可能大不相同！

底下透過分歧圖來闡述對初始條件敏感的意義。當初製作分歧圖，我們用的是固定一點 a 的迭代軌跡，並觀察它的最終行為。如果換另一個點 b，會發生什麼事呢？在 r 小的時候，兩者差不多，最後都會跑到週期點附近。但是當 r 足夠大（例如比 3.89 大一點），儘管 b 和 a 很靠近（多近都可以），但是經過幾次迭代之後，就會發現它們漸行漸遠。背後的原因是因為：當 r 夠大時，成長函數的系統是擴張映射，任兩點迭代後的距離會拉開，但是軌道 $O(a)$ 和 $O(b)$ 又只能落在 $[0,1]$，所以距離大到一定程度後又會慢慢接近，但接下來又會再分開，如此一來，隨著時間拉長，兩點迭代軌跡的關係越來越難掌握，造成系統的不可預測性。

許多人第一次聽到「混沌」，可能都是透過電影

airiti

或其他媒體，他們最喜歡提到的主題就是「蝴蝶效應」，說臺灣一隻蝴蝶拍動一下翅膀，結果造成美洲一場颶風 ❻。也有人說，一個人在小時候莫名的小小抉擇，將會造成後來成就巨大的改變。說穿了這就是對初始條件的敏感性。

拓樸傳遞性

如果在某系統中任意找兩個集合 U 和 V，結果在足夠多次迭代後，它們總是會有交集，就稱這個系統具有拓樸傳遞性（topological transitivity），也是要傳達系統的運行很紊亂的意思。而且不難證明，這個概念相當於該系統中有一條稠密軌道。也就是說，有一個點 q，它的軌道可以接近系統中任何一點，而且要有多近就有多近。

再以分歧圖為例，如果參數 r 對應到的圖形是一整片黑色，就表示 a 的軌跡佈滿整個區間，也就是終究會拜訪區間內幾乎所有位置，這正是拓樸傳遞的意思。簡單來說，拓樸傳遞性表示這個系統在拓樸的意義下，各點彼此之間有不可分割的聯繫。

週期軌道稠密

系統週期軌道稠密的意思是說，系統中任何一點的附近一定有週期點，不管你對附近的標準多嚴格都一樣（當然不能只取自己這一點）。就某種意義來說，這表示系統亂中有序。因為週期軌道是相對簡單、有秩序的行為。

承上所述，在李 / 約克混沌之後，德凡尼定義一個系統若滿足上述三個性質，就是（德凡尼）混沌。根據上面的說明，這保證該系統總是具備不可預測性、不可分割性、亂中有序的特性。 ❼

讀者或許會好奇：李 / 約克混沌和德凡尼混沌是一樣的概念嗎？中國科技大學的葉向東與黃文已經證明德凡尼混沌一定是李 / 約克混沌 [9]。順帶一提，許多科學家也會用前文提到的拓樸熵來定義混沌，他們認為拓樸熵為正的系統就是混沌系統。事實上，正拓樸熵混沌、李 / 約克混沌、德凡尼混沌之間的關係密切，也是目前正熱門的研究主題，但因超過本文主旨，在此揭過。

存在 SBR 測度

上述的各種混沌定義比較是從拓樸觀點來思考，底下筆者再介紹一個和測度論有關的混沌定義——存在（好的）SBR 測度，可以彌補前述定義的不足。

在李 / 約克混沌的討論中，他們研究在參數 3.83 的情況，知道 $[0, 1]$ 中有混亂集，但這時的分歧圖上對應的卻是白色的部分。換句話說，這時大部分的點都還是被吸引到週期點附近。但是如果選擇的參數對應的圖形是一片黑色呢？前面我們用拓樸傳遞性說明這種現象，表示點 a 的軌跡沒有固定歸宿，會到各地流連拜訪。但是我們的問題更深入：在此參數下，點 a 的軌跡會進入某個小區間的頻率是多少呢？顯然兩種拓樸概念的混沌定義無法回答這個問題，必須引入機率的語言來處理。

為了理解這個想法，我們先做一個類比。讀者可能有搓麵糰的經驗，我們簡單將搓麵糰的動作分解成幾個步驟：首先將麵糰拉長，拉到一定長度後，

❻ 參見下期 CASE 系列陳義裕的文章。

❼ 後來有五位數學家證明拓樸傳遞性與週期軌道稠密，其實蘊含初始條件敏感性 [8]，將德凡尼混沌條件簡化成兩個。

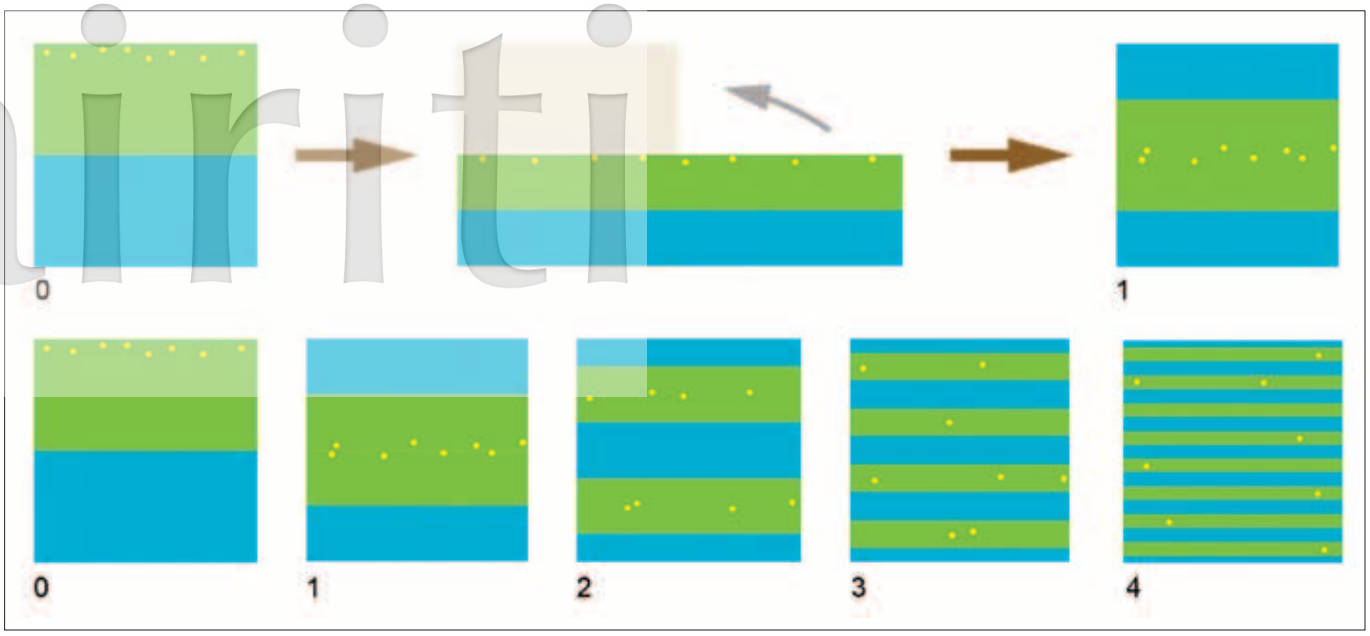

圖 11 上一列為麵包師映射的操作圖示。下一列顯示經過幾次迭代後，本來在「麵糰」上方的黃色「芝麻」，已經相當均勻的分布在麵糰中

將其中一半麵糰疊到上面，接下來再繼續拉長、疊上，拉長、疊上，反覆下去（見圖 11）。這個拉長疊上的映射稱為麵包師映射（baker's map）。❽

現在用這種方式來搓麵糰，只是先撒一把黑芝麻在麵糰上❾，想像我們將每顆黑芝麻編號。當麵糰搓了很多次時，你還能夠追蹤到 13 號黑芝麻的位置嗎？❿ 這無疑很困難。但換個角度想，麵糰搓得夠多次會越來越均勻，雖然追蹤一顆黑芝麻的下落不容易，但是直覺上黑芝麻一定會很均勻的散佈在麵糰中。這時麵包師可以這樣說：「麵糰中每單位體積大概有三粒芝麻。」⓫ 這種描述的語言就是數學的測度概念。所謂 SBR 測度則來自是三位數學家姓氏的縮寫：西奈（Yakov Sinai）、包溫（Rufus Bowen）、盧埃勒（David Ruelle）。他們建立的理論試圖利用測度語言來研究 a 軌跡在 $[0,1]$ 中是否有一個機率分布？能否寫下這個分布？比較這個分布和傳統勒貝格測度的差別。

當系統存在好的（嚴格來說，絕對連續的）SBR 測度，就存在一個機率密度函數將該測度和傳統勒貝格測度聯繫起來。這樣就可以知道點 a 的軌道進入 $[0,1]$ 中某個小區域的機率是多少，也就是 n 次迭代大概會有幾次進入這個小區間。這麼一來，在一個混沌系統中，雖然我們無法知道每一個點最終的行為，但是 SBR 測度提供一個統計式的看法，告訴我們在平均意義下，一個點的軌跡有多少機會進入某個特定區域。這樣多少為混沌系統提供一些定量的描述。

綜合上述，我們簡單透過三種定義：李 / 約克混沌、德凡尼混沌、存在 SBR 測度來粗淺解釋成長函數分歧圖所表達的深刻內涵。值得強調的是，分歧圖的參數不一定用這三種定義就可以完全描述。這三類定義解釋了大部分混沌參數的行為，但還有一些零熵系統（如參數發生 2^∞ 週期，也就是費根堡比值到極限的情況）也存在相當程度的混亂，但可能要用另一種語言來描述。

結語：混沌和秩序

對於混亂現象，本文提供了三種混沌的定義，分別提供對混沌系統的拓樸或機率描述。但是這種混亂並不是毫無秩序、全然隨機的狀態。

1936 年，數學家艾狄胥（Paul Erdös）和圖倫（Pál Turan）[10] 猜測，對任何正整數 k，在正密度的正整數子集裡，一定有一個長度 k 的等差級數。1975 年，沙邁雷迪（Endre Szemerédi）證明這個猜想 [11]。這個結果顯示，只要有些微的要求，就保證正整數列中一定隱藏著相當多「有規則的」子

airiti

數列。後來這個定理被葛林（Ben Green）和陶哲軒推廣到質數 [12]。

或許這意味著，對於混亂的理解不該局限於混亂這個概念本身，或許混亂到了一定地步，秩序就會在混沌的邊界悄然誕生。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉

http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

本文主要內容為 2016 年 4 月 9 日作者在臺灣大學科學教育發展中心「秩序與複雜的華爾滋」系列講座的演講稿，並做增補而成。

延伸閱讀

▶班榮超〈簡單的開始，卻通往複雜？！〉（2016/4/9），CASE 探索《秩序與複雜的華爾滋》系列講座第二講錄影：

https://www.youtube.com/watch?v=47CdFheDkw

▶ T.-Y. Li & Yorke, James "Period Three Implies Chaos" *The American Mathematical Monthly* 82 (1975) no.10。李天岩和 Yorke 的經典論文，發表在相對平易近人的 *AMM 雜誌*，只要會大學微積分就能讀懂。

http://goo.gl/N0ZH4d

▶李天岩〈關於 "Li-Yorke 混沌 " 的故事〉（1988），《數學傳播》第 12 卷第 3 期。可以看到這項發現無心插柳的有趣故事，網路版請見：

http://goo.gl/KJbZBT

也可參看

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_12_3_02/

---

❽ 麵包師映射有兩種疊法，其中一種和知名的馬蹄鐵映射類似，見本期〈在里約海灘發現馬蹄鐵〉。

❾ 這些黑芝麻可以想像成物理空間中的粒子，而麵包師映射的步驟則想成這空間形成的動力系統。

❿ 想像我們也將空間編碼，可以描述位置所在。

⓫ 到底是哪三粒？這次和下次同一位置的芝麻可能不一樣？這些都不重要。

與本次專題有關的臺灣科普書

◎ Ball, Philip *Critical Mass : How One Thing Leads to Another* 。臺灣譯本：鮑爾 《用物理學找到美麗新世界》（1998），謝伯讓譯，木馬文化。

◎ Briggs, John & Peat, David *Turbulent Mirror: An Illustrated Guide to Chaos Theory*。臺灣譯本：《渾沌魔鏡》（1993），王彥文譯，牛頓出版社。

◎ Brockman, John *The Third Culture: Beyond the Scientific Revolution*。臺灣譯本：布羅克曼 《第三種文化：跨越科學與人文的鴻溝》（1998），唐勤、梁錦鋆譯，天下文化。

◎ Buchanan, Mark *Nexus*。臺灣譯本：布侃南 《連結：讓 60 億人串在一起的無形網路》（1998），胡守仁譯，天下文化。

◎ Carroll, Sean B. *Endless forms most beautiful : the new science of evo devo*。臺灣譯本：卡洛《蝴蝶、斑馬與胚胎：探索演化發生學之美》（1998），王惟芬譯，商周出版社。

◎ Gleick, James *Chaos: Making a New Science*。臺灣譯本：葛雷易克《混沌：不測風雲的背後》（1991），林和譯，天下文化。

◎ Gribbin, John *Deep Simplicity: Chaos, Complexity and the Emergence of Life*。臺灣譯本：葛瑞賓 《深奧的簡潔——從混沌、複雜到地球生命的起源》（2006），馬自恆譯，商周出版社。

◎ Peterson, Ivars *Newton's Clock: Chaos in the Solar System*。臺灣譯本：皮特遜 《牛頓時鐘——渾沌太陽系》（1994），黃銘鏘、黃啟明譯，牛頓出版社。

◎ Waldrop, Mitchell *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*。臺灣譯本：葛瑞賓 《複雜：走在秩序與混沌邊緣》（1994），齊若蘭譯，天下文化。