第一章　緒論

證明：$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m}2^{m}$　　$0\le m\le n$，$m,n\in Z$

[證一]：組合論證

考慮有 n 支隊伍，每隊兩名隊員，欲從這 n 隊中選 m 隊出來比賽，且選中的隊伍每隊只派一人，問有多少種不同的選取方法？

[法一]：

先從 n 隊中選出 m 隊，有 $\binom{n}{m}$ 種選法，接著，被選中的這 m 隊，每隊都有兩種選擇派遣自己隊上的隊員，有 $\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdot 2}_{m\text{個}}=2^{m}$ 種選法，所以總共是有 $\binom{n}{m}2^{m}$ 種不同的選取方法。

[法二]：

由於每支被選中的隊伍都只能派遣一名隊員出來比賽, 因此我們可以把各隊的隊員加以編號，分為 1 號隊員及 2 號隊員，並且以有派出隊上 1 號隊員的隊伍數目加以各別討論：

(1) 若沒有隊伍派出 1 號隊員，相當於從 n 名 1 號隊員中選出 0 人，有 $\binom{n}{0}$ 種方法，接著要從 n 隊中選 m 隊出來比賽，且這 m 隊都只能派出 2 號隊員 (這 m 隊皆只有一種派遣隊員的方法)，有 $\binom{n}{m}$ 種方法，所以在沒有隊伍派出 1

號隊員的情況下，有$\binom{n}{0}\binom{n}{m}$種選取方法。

(2)若有一支隊伍派出 1 號隊員，相當於從n名 1 號隊員中選出 1 人，有$\binom{n}{1}$種方法，再來，除了那支派出 1 號隊員的隊伍外，必須再從剩下的$(n-1)$隊中選出$(m-1)$隊，且這$(m-1)$隊皆只能派遣自己隊上的 2 號隊員，有$\binom{n-1}{m-1}$種方法，所以在有一支隊伍派出 1 號隊員的情況下，有$\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}$種選取方法。

(3)從前面的討論已經可以看出，若恰有k隊派出 1 號隊員，則在這樣的情況下，有$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$種選取方法，其中$0\le k\le m$。

總結(1) (2) (3)我們得知選取的方法數為$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$種

最後由[法一]及[法二]，可證得：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m}2^{m}\qquad \begin{matrix}0\le m\le n\\ m,n\in Z\end{matrix}$$

[證二]：代數證明

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$=\binom{n}{0}\binom{n}{m}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}+\cdots\cdots\cdots+\binom{n}{m}\binom{n-m}{0}$$

$$=\frac{n!}{0!n!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{0!(n-m)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\left[\frac{1}{0!n!}\cdot\frac{n!}{m!}+\frac{1}{1!(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(m-1)!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{0!}\right]$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\left[\frac{1}{0!m!}+\frac{1}{1!(m-1)!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{m!0!}\right]$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left[\frac{m!}{0!m!}+\frac{m!}{1!(m-1)!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{m!}{m!0!}\right]$$

$$=\binom{n}{m}\cdot\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\cdots\cdots\cdots+\binom{m}{m}\right]$$

$$=\binom{n}{m}2^{m}$$

在前面的[證一]中所考慮的問題，如果改成每隊有三人，並且依照同樣的方法去解，我們很容易可以得到：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}2^{m-k}=\binom{n}{m}3^{m} \qquad \begin{matrix} 0\le m\le n \\ m,n\in Z \end{matrix}$$

觀察每隊二人及每隊三人不同的情況下所得到的組合等式，我們比較有興趣的是在[證一]中所考慮的問題如果推廣至每隊 r 人時，是否能推導出：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}(r-1)^{m-k}=\binom{n}{m}r^{m} \qquad \begin{matrix} r>0 \\ 0\le m\le n \\ m,n,r\in Z \end{matrix}$$