第二章　推廣一

考慮有n支隊伍，每隊有r名隊員，欲從這n隊中選m隊出來比賽，且選中的隊伍每隊只派一人，問有多少種不同的選取方法？

[法一]：

先從n隊中選出m隊，有$\binom{n}{m}$種，接著被選出的m隊，各自都有$\binom{r}{1}=r$種方法派遣隊員，有$\underbrace{r\cdot r\cdot\cdots\cdots\cdot r}_{m個}=r^m$種，所以總共是$\binom{n}{m}r^m$種不同的選取方法。

[法二]：

把各隊的r名隊員都編號(1 號、2 號、……、r 號)，以有派出 1 號隊員的隊伍數目分別討論：

當被選出參加比賽的隊伍中有k隊派出 1 號隊員時，相當於是從全部n位 1 號隊員裡選出k位，有$\binom{n}{k}$種，因為總共要選出m隊來比賽，所以還要再從剩下的$(n-k)$隊中選出$(m-k)$隊，有$\binom{n-k}{m-k}$種，而這$(m-k)$隊都不能派出 1 號隊員，都只剩下$(r-1)$種方法派遣隊員，有$\underbrace{(r-1)\cdot(r-1)\cdot\cdots\cdots\cdot(r-1)}_{m-k個}=(r-1)^{m-k}$種，所以總共有$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}(r-1)^{m-k}$種選取方法，其中$0\le k\le m$，而全部有$k=0,1,\ldots\ldots,m$共$(m+1)$種情況，且都不會同時發生，故我們得知全部的選取方法數為 $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}(r-1)^{m-k}$ 種。

所以由[法一]及[法二]我們可以證出：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}(r-1)^{m-k}=\binom{n}{m}r^{m} \qquad \begin{matrix} r>0 \\ 0\le m\le n \\ m,n,r\in Z \end{matrix}$$

在推廣一中，我們已經將原本的每隊二人，推廣至每隊r人的情況$\left(r>0,r\in Z\right)$，但卻侷限於每隊只能派出一人的情形，在實際的生活例子中，不同的比賽需要的人數各自不同，不可能都只需派出一人，像棒球比賽一隊要九人，籃球比賽一隊要五人，排球比賽一隊要六人，所以接下來在推廣二中，我們想要努力的目標是將每隊只派出一人推廣至每隊派出s人的情形，其中$0<s\le r$，$s\in Z$。