第一章　使用廣義二項式定理的方法，來證明$\sum_{i=0}^{k} C_i^{2i} C_{k-i}^{2k-2i} = 4^k$

介紹廣義二項式定理

$(1+x)(1+x)(1+x) = (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ 。

定義： $\forall n \in \mathbb{R}$

$$C_r^n = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} & 若\, r \geq 1 \\ 1 & 若 r = 0 \end{cases} 。$$

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots+x^n \\ &= C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_r^n x^r + \cdots + C_n^n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i \text{ 。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1} &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots \\ &= \sum_{k\geq 0} x^k \text{ 。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-4x)^{-1} &= \frac{1}{1-4x} \\ &= 1+4x+(4x)^2+\cdots+(4x)^r+\cdots \\ &= \sum_{k\geq 0} (4x)^k \text{ 。}\end{aligned}$$

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r\ge 0}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4x)^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots[\frac{(2r-1)}{2}]}{r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{4^r(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots[\frac{(2r-1)}{2}]}{r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{2^r[1\cdot 3\cdots(2r-1)]}{r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{(2^r\cdot r!)[1\cdot 3\cdots(2r-1)]}{r!r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{(2\cdot 4\cdots 2r)[1\cdot 3\cdots(2r-1)]}{r!r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}\frac{(2r)!}{r!r!}x^r$$

$$=\sum_{r\ge 0}C_r^{2r}x^r \quad ,$$

而 C_i^{2i} 是 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 中 x^i 項的係數，

而 C_{k-i}^{2k-2i} 是 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 中 x^{k-i} 項的係數，

$\therefore \sum_{i=0}^{k}C_i^{2i}C_{k-i}^{2k-2i}$ 是 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 中 x^k 項的係數；

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=(1-4x)^{-1}$$

$$=1+4x+(4x)^2+\cdots+(4x)^k+\cdots$$

$$=1+4x+4^2x^2+\cdots+4^kx^k+\cdots \;;$$

所以，我們得到 $\sum_{i=0}^{k}C_i^{2i}C_{k-i}^{2k-2i}=4^k$ 。