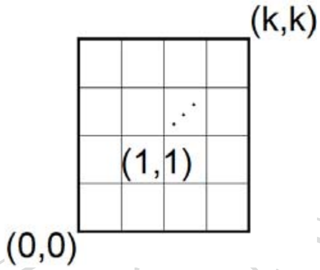
第二章　一些符號的定義及引理

定義 1 ：從座標 $(0,0)$ 開始(第 0 步)，經由每一步走”上”或”右”，且經過檢查點 (i,i) (必落在第 $2i$ 步上) $i=0,1,2,\cdots,k$ ，到達終點 (k,k) (總共 $2k$ 步)，



若 $S_{2k}=\left(s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$ ， $s_j=1$ 或 -1， $j=1,2,\cdots,2k$ ，

$$s_j=\begin{cases}1 & \text{代表第}j\text{步走上}\\ -1 & \text{代表第}j\text{步走右}\end{cases},$$

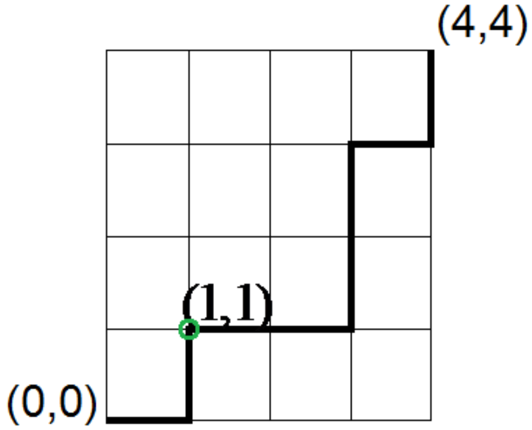
其中通過檢查點 (i,i) ，紀錄 $c=i+i=2i$ ，

則稱 $(c,S_{2k})=\left(c,s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$ 為 $k\times k$ 正方形的路徑，其中 c 為檢查點。

以正方形路徑 $(c,S_8)=(2,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1)$ 為例，

表示通過檢查點 $(1,1)$ ，走”右上右右上上右上”的正方形路徑，

所表示的圖形如下：



定義 2.1：若 $p_j = \begin{cases} s_1 + \cdots + s_j & , j = 1, 2, \cdots, 2k \\ 0 & , j = 0 \end{cases}$,

則稱 p_j 為 $S_{2k} = \left(s_1, s_2, \cdots, s_{2k}\right)$ 的部份和。

以正方形路徑 $(c, S_8) = (2, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$ 為例，

則 $p_0 = 0$ ， $p_1 = -1$ ， $p_2 = (-1) + 1 = 0$ ，⋯，

$p_8 = (-1) + 1 + (-1) + (-1) + 1 + 1 + (-1) + 1 = 0$ 。

定義 2.2：若 $P = (p_0, p_1, \cdots, p_{2k})$ ，

則稱 P 為 $S_{2k} = \left(s_1, s_2, \cdots, s_{2k}\right)$ 的部份和向量。

以正方形路徑 $(c, S_8) = (2, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$ 為例，

則 $P = (0, -1, 0, -1, -2, -1, 0, -1, 0)$ 。

定義 3.1：若 S_{2k} 的部份和 $p_{c+1} > 0$ 時， $M_+ = \max\limits_{j>c}\left\{p_j\right\}$ ，

則稱 M_+ 為 S_{2k} 的部份和 $p_{c+1} > 0$ 時的負載數。

註： $M_+ > 0 (\because p_{c+1} > 0 \Rightarrow M_+ = \max\limits_{j>c}\left\{p_j\right\} > 0)$ ，

並且 $0 < M_+ \le k$ $(\because S_{2k} = \left(s_1, s_2, \cdots, s_{2k}\right)$ 是由 k 個 1 和 k 個 -1 組成，

$\therefore M_+ = \max\limits_{j>c}\left\{p_j\right\} \le k$) 。

以正方形路徑 $(c, S_8) = (2, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1)$ 為例，

$P = (0, -1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 0)$ ，則 $M_+ = 2$ 。

定義 3.2：若 S_{2k} 的部份和 $p_{c+1} < 0$ 時， $M_- = \min\limits_{j>c}\left\{p_j\right\}$

則稱 M_- 為 S_{2k} 的部份和 $p_{c+1} < 0$ 時的負載數。

註： $M_- < 0 (\because p_{c+1} < 0 \Rightarrow M_- = \min\limits_{j>c}\left\{p_j\right\} < 0)$ ，

並且 $-k \le M_- < 0$ ($\because S_{2k}=\left(s_1,s_2,\cdots,s_{2k}\right)$ 是由 k 個 1 和 k 個 -1 組成，

$\therefore M_- = \min\limits_{j>c}\left\{p_j\right\} \ge -k$)。

以正方形路徑 $(c,S_8)=(2,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1)$ 為例，

$P=(0,-1,0,-1,-2,-1,0,-1,0)$ ，則 $M_- = -2$ 。

定義 4.1：若 S_{2k} 的部分和 $p_{c+1}>0$ 時， $L(i)=\min\limits_{j>c}\left\{j \mid p_j = i\right\}$ ， $i=1,2,\cdots,M_+$ ，

則稱 $L(i)$ 為 $p_{c+1}>0$ 時， $k\times k$ 正方形路徑 (c,S_{2k}) 的轉折點。

以正方形路徑 $(c,S_8)=(2,-1,1,1,1,-1,1,-1,-1)$ 為例，

$P=(0,-1,0,1,2,1,2,1,0)$ ， $M_+ = 2$ ，則 $L(1)=3$ ， $L(2)=4$ 。

定義 4.2：若 S_{2k} 的部分和 $p_{c+1}<0$ 時， $L(i)=\min\limits_{j>c}\left\{j \mid p_j = i\right\}$ ， $i=-1,-2,\cdots,M_-$ ，

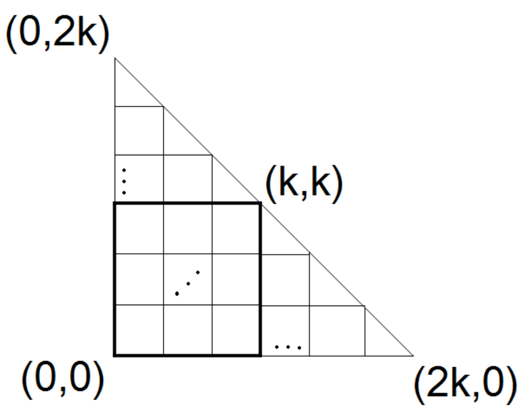
則稱 $L(i)$ 為 $p_{c+1}<0$ 時， $k\times k$ 正方形路徑 (c,S_{2k}) 的轉折點。

以正方形路徑 $(c,S_8)=(2,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1)$ 為例，

$P=(0,-1,0,-1,-2,-1,0,-1,0)$ ， $M_- = -2$ ，則 $L(-1)=3$ ， $L(-2)=4$ 。

定義 5 ：從座標 $(0,0)$ 開始(第 0 步)，經由每一步走”上”或”右”，到達終點

$(p,q),\ p+q=2k$ (即三角形的斜邊上)，



若 $T_{2k}=(t_1,t_2,\cdots,t_{2k})$ ， $t_j=1$ 或 -1 ， $j=1,2,\cdots,2k$ ，

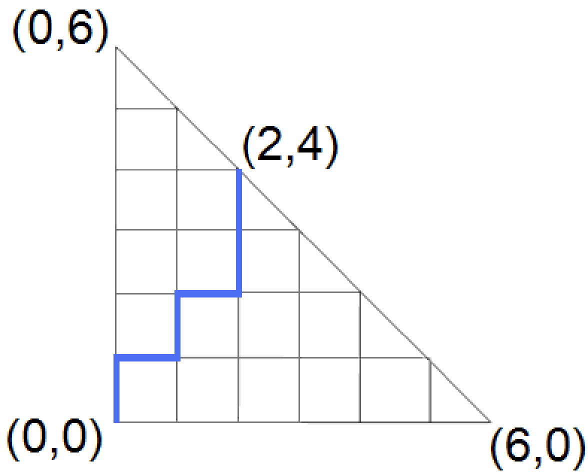
其中 $t_j = \begin{cases} 1 & \text{代表第}j\text{步走上} \\ -1 & \text{代表第}j\text{步走右} \end{cases}$，

則稱 T_{2k} 為 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑。

以等腰直角三角形路徑 $T_6 = (1,-1,1,-1,1,1)$ 為例，

表示走”上右上右上上”的等腰直角三角形路徑，

所表示的圖形如下：



定義 6.1：若 $p'_j = \begin{cases} t_1 + \cdots + t_j & , j = 1,2,\cdots,2k \\ 0 & , j = 0 \end{cases}$，

則稱 p'_j 為 $T_{2k} = \left(t_1, t_2, \cdots, t_{2k}\right)$ 的部份和。

以等腰直角三角形路徑 $T_6 = (1,-1,1,-1,1,1)$ 為例，

則 $p'_0 = 0$，$p'_1 = 1$，$p'_2 = 1+(-1) = 0$，⋯，$p'_6 = 1+(-1)+1+(-1)+1+1 = 2$。

定義 6.2：若 $P' = (p'_0, p'_1, \cdots, p'_{2k})$，

則稱 P' 為 $T_{2k} = \left(t_1, t_2, \cdots, t_{2k}\right)$ 的部份和向量。

以等腰直角三角形路徑 $T_6 = (1,-1,1,-1,1,1)$ 為例，

則 $P' = (0,1,0,1,0,1,2)$。

定義 7.1：若$c=\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j \mid p'_j=0\right\}$，$T_{2k}$的部份和$p'_{c+1}>0$時，$N_+=\dfrac{p'_{2k}}{2}$，

則稱N_+為T_{2k}的部份和$p'_{c+1}>0$時的負載數。

以等腰直角三角形路徑$T_6=(1,-1,1,-1,1,1)$為例，

$P'=(0,1,0,1,0,1,2)$，$c=4$，則$N_+=\dfrac{p'_6}{2}=\dfrac{2}{2}=1$。

定義 7.2：若$c=\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j \mid p'_j=0\right\}$，$T_{2k}$的部份和$p'_{c+1}<0$時，$N_-=\dfrac{p'_{2k}}{2}$，

則稱N_-為T_{2k}的部份和$p'_{c+1}<0$時的負載數。

以等腰直角三角形路徑$T_6=(1,-1,1,-1,-1,-1)$為例，

$P'=(0,1,0,1,0,-1,-2)$，$c=4$，則$N_-=\dfrac{p'_6}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$。

引理 1　：$N_+=\dfrac{p'_{2k}}{2}$和$N_-=\dfrac{p'_{2k}}{2}$是 well defined。

證明：(i)若$T_{2k}=\left(t_1,t_2,\cdots,t_{2k}\right)$是由$2j$個 1 和$2k-2j$個$-1$組成，$j=1,2,\cdots,k$，

則$N_+=\dfrac{p'_{2k}}{2}=\dfrac{2j-(2k-2j)}{2}=\dfrac{4j-2k}{2}=2j-k$為整數，

$N_-=\dfrac{p'_{2k}}{2}=\dfrac{2j-(2k-2j)}{2}=\dfrac{4j-2k}{2}=2j-k$為整數。

(ii)若$T_{2k}=\left(t_1,t_2,\cdots,t_{2k}\right)$是由$2j-1$個 1 和$2k-(2j-1)=2k-2j+1$個$-1$

組成，$j=1,2,\cdots,k$，

則$N_+=\dfrac{p'_{2k}}{2}=\dfrac{(2j-1)-(2k-2j+1)}{2}=\dfrac{4j-2k-2}{2}=2j-k-1$為整數，

$N_-=\dfrac{p'_{2k}}{2}=\dfrac{(2j-1)-(2k-2j+1)}{2}=\dfrac{4j-2k-2}{2}=2j-k-1$為整數。

註：$N_+>0(\because c=\max\limits_{0\le j\le 2k}\left\{j \mid p'_j=0\right\}\therefore p'_{c+1}>0\Leftrightarrow p'_{2k}>0)$，

並且$0<N_+\le k$ ($\because$ T_{2k}最多由$2k$個1來組成)。

註： $N_{-} < 0(\because c = \max\limits_{0 \le j \le 2k} \left\{ j \mid p'_j = 0 \right\} \therefore p'_{c+1} < 0 \Leftrightarrow p'_{2k} < 0)$ ，

並且 $-k \le N_{-} < 0$ ($\because T_{2k}$ 最多由 $2k$ 個 -1 來組成)。

定義 8.1：若 $c = \max\limits_{0 \le j \le 2k} \left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$ ， T_{2k} 的部份和 $p'_{c+1} > 0$ 時，

$L'(i) = \max\limits_{j > c} \{ j \mid p'_{j-1} = i - 1 \}$ ， $i = 1, 2, \cdots, N_{+}$ ，

則稱 $L'(i)$ 為 $p'_{c+1} > 0$ 時， $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 的轉折點。

以等腰直角三角形路徑 $T_8 = (1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)$ 為例，

$P' = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 4)$ ， $c = 4$ ， $N_{+} = \dfrac{p'_8}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ ，

則 $L'(1) = 5$ ， $L'(2) = 6$ 。

定義 8.2：若 $c = \max\limits_{0 \le j \le 2k} \left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$ ， T_{2k} 的部份和 $p'_{c+1} < 0$ 時，

$L'(i) = \max\limits_{j > c} \{ j \mid p'_{j-1} = i + 1 \}$ ， $i = -1, -2, \cdots, N_{-}$ ，

則稱 $L'(i)$ 為 $p'_{c+1} < 0$ 時， $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 的轉折點。

以等腰直角三角形路徑 $T_8 = (1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1)$ 為例，

$P' = (0, 1, 0, 1, 0, -1, -2, -3, -4)$ ， $c = 4$ ， $N_{-} = \dfrac{p'_8}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ ，

則 $L'(-1) = 5$ ， $L'(-2) = 6$ 。