第四章　路徑之間的轉換方法

轉換 1：將 $k\times k$ 正方形的檢查點及路徑 $(c,S_{2k})=(c,s_1,s_2,\cdots,s_{2k})$，做路徑轉換到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 $T_{2k}=\left(t_1,t_2,\cdots,t_{2k}\right)$ 的方法：

給定 (c,S_{2k}) 後，

(i)若 $c=2k$

則拿掉檢查點 c 後，即完成路徑轉換，

得到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑為 $T_{2k}=S_{2k}$。

(見 圖表 1 和 例 1.1)

(ii)若 $c\neq 2k$ 且 $p_{c+1}>0$，$M_+=\max\limits_{j>c}\{p_j\}$，

$k\times k$ 正方形路徑的轉折點 $L\left(i\right)=\min\limits_{j>c}\{j\mid p_j=i\}$，$i=1,2,\cdots,M_+$；

定義：$F_i=R_{L(i)}^{(-1)}=[r_{pq}]_{2k\times 2k}$，$r_{pq}=\begin{cases}1 & \text{若 } p=q\neq L(i)\\ -1 & \text{若 } p=q=L(i)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,M_+$，

為一個基本行運算矩陣。

得到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑為 $T_{2k}=f(c,S_{2k})=S_{2k}\cdot F_1\cdots F_{M_+}$，

$$\therefore t_j=\begin{cases}-s_j=-1 & ,\text{若} j=L(i),\ i=1,2,\cdots,M_+\\ s_j & ,\qquad \text{其它}\end{cases},$$

其中 f 為從 $k\times k$ 正方形路徑 (c,S_{2k}) 轉換到 $2k\times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 的轉換函數，而 $F_1\cdots F_{M_+}$ 為轉換函數 f 所對應的矩陣。

(見 圖表 2 和 例 2.1)

註：$\because\ p_c = 0$且 $p_{c+1} > 0$

$\therefore\ p_{c+1} = 1$ ，$L(1) = c+1$ ，$F_1 = R_{c+1}^{(-1)}$ ，$t_{c+1} = t_{L(1)} = -1$ 且 $p'_c = 0$ ，

此時，對應到的T_{2k}的部分和 $p'_{c+1} < 0$ 。

(iii)若$c \neq 2k$ 且 $p_{c+1} < 0$ ，$M_- = \min\limits_{j>c}\{p_j\}$ ，

$k \times k$ 正方形路徑的轉折點$L(i) = \min\limits_{j>c}\{j \mid p_j = i\}$ ，$i = -1,-2,\cdots,M_-$ ；

定義：$F_i = R_{L(i)}^{(-1)} = [r_{pq}]_{2k\times 2k}$，$r_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{若 } p = q \neq L(i) \\ -1 & \text{若 } p = q = L(i) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，$i = -1,-2,\cdots,M_-$，

為一個基本行運算矩陣。

得到$2k \times 2k$等腰直角三角形路徑為$T_{2k} = f(c, S_{2k}) = S_{2k} \cdot F_{-1} \cdots F_{M_-}$ ，

$\therefore\ t_j = \begin{cases} -s_j = 1 & ,\text{若 } j = L(i),\ i = -1,-2,\cdots,M_- \\ s_j & ,\qquad \text{其它} \end{cases}$ ，

其中 f 為從$k \times k$ 正方形路徑(c, S_{2k})轉換到$2k \times 2k$等腰直角三角形路徑T_{2k}的轉換函數，而$F_{-1} \cdots F_{M_-}$為轉換函數f所對應的矩陣。

(見 圖表 3 和 例 3.1)

註：$\because\ p_c = 0$ 且 $p_{c+1} < 0$ ，

$\therefore\ p_{c+1} = -1$ ，$L(-1) = c+1$ ，$F_{-1} = R_{c+1}^{(-1)}$ ，$t_{c+1} = t_{L(-1)} = 1$且 $p'_c = 0$ ，

此時，對應到的T_{2k}的部分和 $p'_{c+1} > 0$ 。

附註：在轉換 1 裡，$\forall i$ ，$L(i) > c$ ，也就是說，在檢查點c之前的路徑，我們不做更動，我們只對檢查點c之後的路徑來做改變。

轉換 2 ：將 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑 $T_{2k} = \left(t_1, t_2, \cdots, t_{2k}\right)$，做路徑轉換到

$k \times k$ 正方形的檢查點及路徑 $(c, S_{2k}) = (c, s_1, s_2, \cdots, s_{2k})$ 的方法：

給定 T_{2k} 後，

首先，判斷檢查點 $c = \max\limits_{0 \le j \le 2k} \left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$。

(i)若 $c = 2k$ ，

則加入檢查點 $c = 2k$ 後，即完成路徑轉換，

得到 $k \times k$ 正方形的檢查點及路徑為 $(c, S_{2k}) = (2k, T_{2k})$ 。

(見 圖表 1 和 例 1.2)

(ii)若 $c \ne 2k$ 且 $p'_{c+1} > 0$ ， $N_+ = \dfrac{p'_{2k}}{2}$ ，

$2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑的轉折點為 $L'\left(i\right) = \max\limits_{j>c} \{ j \mid p'_{j-1} = i - 1 \}$ ，

$i = 1, 2, \cdots, N_+$ ；

定義： $G_i = R^{(-1)}_{L'(i)} = [r_{pq}]_{2k \times 2k}$ ， $r_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{若 } p = q \ne L'(i) \\ -1 & \text{若 } p = q = L'(i) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，

$i = 1, 2, \cdots, N_+$ ，為一個基本行運算矩陣。

得到 $k \times k$ 正方形的檢查點及路徑為 $(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot G_{N_+} \cdots G_1)$

$\therefore c = \max\limits_{0 \le j \le 2k} \left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$ ， $s_j = \begin{cases} -t_j = -1 & ,\text{若} j = L'(i),\ i = 1, 2, \cdots, N_+ \\ t_j & , \qquad \text{其它} \end{cases}$ ，

其中 g 為從 $2k \times 2k$ 等腰直角三角形路徑 T_{2k} 轉換到 $k \times k$ 正方形路徑

(c, S_{2k}) 的轉換函數，而 $G_{N_+} \cdots G_1$ 為轉換函數 g 所對應的矩陣。

(見 圖表 2 和 例 2.2)

註：$\because p'_c = 0$ 且 $p'_{c+1} > 0$

$\therefore p'_{c+1} = 1$ ， $L'\left(1\right) = c + 1$ ， $G_1 = R^{(-1)}_{c+1}$ ， $s_{c+1} = s_{L'(1)} = -1$ 且 $p_c = 0$ ，

此時，對應到的S_{2k}部分和$p_{c+1}<0$。

(iii)若$c \neq 2k$且$p'_{c+1}<0$，$N_- = \dfrac{p'_{2k}}{2}$，

$2k \times 2k$等腰直角三角形路徑的轉折點為$L'(i) = \max\limits_{j>c}\{ j \mid p'_{j-1} = i+1 \}$，

$i = -1, -2, \cdots, N_-$；

定義：$G_i = R^{(-1)}_{L'(i)} = [r_{pq}]_{2k \times 2k}$，$r_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{若 } p = q \neq L'(i) \\ -1 & \text{若 } p = q = L'(i) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，$i = -1, -2, \cdots, N_-$，

為一個基本行運算矩陣。

得到$k \times k$正方形的檢查點及路徑$(c, S_{2k}) = g(T_{2k}) = (c, T_{2k} \cdot g_{N_-} \cdots g_{-1})$

$\therefore c = \max\limits_{0 \le j \le 2k}\left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$，$s_j = \begin{cases} -t_j = 1 & ,\text{若} j = L'(i),\ i = -1, -2, \cdots, N_- \\ t_j & , \qquad \text{其它} \end{cases}$，

g為從$2k \times 2k$等腰直角三角形路徑T_{2k}轉換到$k \times k$正方形路徑

(c, S_{2k})的轉換函數，而$G_{N_-} \cdots G_{-1}$為轉換函數g所對應的矩陣。

(見 圖表 3 和 例 3.2)

註：$\because p'_c = 0$且$p'_{c+1} < 0$，

$\therefore p'_{c+1} = -1$，$L'(-1) = c+1$，$G_{-1} = R^{(-1)}_{c+1}$，$s_{c+1} = s_{L'(-1)} = 1$且$p_c = 0$，

此時，對應到的S_{2k}的部分和$p_{c+1} > 0$。

附註：在轉換 2 裡，$\forall i$，$L'(i) > c = \max\limits_{0 \le j \le 2k}\left\{ j \mid p'_j = 0 \right\}$，也就是說，在檢查點$c$之前的路徑，我們不做更動，我們只對檢查點$c$之後的路徑來做改變。