# 國立政治大學應用數學系

# 碩士學位論文

## 以特徵向量法解條件分配相容性問題

## Solving compatibility issues of conditional distributions by eigenvector approach

國立政治大學
National Chengchi University

碩士班學生：顧仲航 撰

指導教授：宋傳欽 博士

中華民國 一百 年 七 月 一 日

# 目次

**目次** **i**

**中文摘要** **iii**

**Abstract** **v**

**1 緒論** **1**

1.1 研究動機與目的 . . . . . 1

1.2 研究架構 . . . . . 2

**2 文獻探討** **3**

2.1 比值矩陣法 . . . . . 3

2.2 $IBD$矩陣法 . . . . . 6

2.3 不相容程度的測量 . . . . . 8

**3 特徵向量法** **12**

3.1 特徵向量法的簡介 . . . . . 12

3.2 不可約化條件機率矩陣的相容性檢驗 . . . . . 15

3.3 可約化條件機率矩陣的相容性檢驗 . . . . . 21

3.4 各種不相容程度測量方法的比較 . . . . . 28

**4 求最近似的聯合機率分配** **36**

4.1 評量近似聯合分配的標準 . . . . . 36

4.2 各種不相容測度下之最近似聯合分配 . . . . . 37

4.3 實例說明與比較 . . . . . 39

國立政治大學 National Chengchi University

**5 在賽局問題上的應用** **43**

5.1 賽局的介紹 . . . . . 43

5.2 條件矩陣的廣義相容性 . . . . . 48

5.3 廣義相容與賽局解的關係 . . . . . 51

5.4 以特徵向量法求賽局混合解 . . . . . 55

**6 結論** **60**

**參考文獻** **61**

國立政治大學
National Chengchi University

**中文摘要**

給定兩個隨機變數的條件機率矩陣$A$和$B$，相容性問題的主要課題包含：(一)如何判斷他們是否相容？若相容，則如何檢驗聯合分配的唯一性或找出所有的聯合分配；(二)若不相容，則如何訂定測量不相容程度的方法並找出最近似聯合分配。目前的文獻資料有幾種解決問題的途徑，例如Arnold and Press (1989)的比值矩陣法、Song et al. (2010)的不可約化對角塊狀矩陣法及Arnold et al. (2002)的數學規劃法等，經由這些方法的啓發，本文發展出創新的特徵向量法來處理前述的相容性課題。

當$A$和$B$相容時，我們觀察到邊際分配分別是$AB'$和$B'A$對應特徵值1的特徵向量。因此，在以邊際分配檢驗相容性時，特徵向量法僅需檢驗滿足特徵向量條件的邊際分配，大幅度減少了檢驗的工作量。利用線性代數中的Perron定理和不可約化對角塊狀矩陣的概念，特徵向量法可圓滿處理相容性問題(一)的部份。

當$A$和$B$不相容時，特徵向量法也可衍生出一個測量不相容程度的簡單方法。由於不同的測量方法可得到不同的最近似聯合分配，爲了比較其優劣，本文中提出了以條件分配的偏差加上邊際分配的偏差作爲評量最近似聯合分配的標準。特徵向量法除了可推導出最近似聯合分配的公式解外，經過例子的驗證，在此評量標準下特徵向量法也獲得比其他測量法更佳的最近似聯合分配。由是，特徵向量法也可用在處理相容性問題(二)的部份。

最後，將特徵向量法實際應用在兩人零和有限賽局問題上。作業研究的解法是將雙方採取何種策略視爲獨立，但是我們認爲雙方可利用償付值表所提供的資訊作爲決策的依據，並將雙方的策略寫成兩個條件機率矩陣，則賽局問題被轉換爲相容性問題。我們可用廣義相容的概念對賽局的解進行分析，並在各種測度下討論賽局的解及雙方的最佳策略。

關鍵字：條件機率矩陣，相容性，不可約化，可約化，不可約化對角塊狀矩陣，特徵向量法，最近似聯合分配，兩人零和有限賽局。

**Abstract**

Given two conditional probability matrices $A$ and $B$ of two random variables, the issues of the compatibility include: (a) how to determine whether they are compatible? If compatible, how to check the uniqueness of the joint distribution or find all possible joint distributions; (b) if incompatible, how to measure how far they are from compatibility and find the most nearly compatible joint distribution. There are several approaches to solve these problems, such as the ratio matrix method(Arnold and Press, 1989), the IBD matrix method(Song et al., 2010) and the mathematical programming method(Arnold et al., 2002). Inspired by these methods, the thesis develops the eigenvector approach to deal with the compatibility issues.

When $A$ and $B$ are compatible, it is observed that the marginal distributions are eigenvectors of $AB'$ and $B'A$ corresponding to 1, respectively. While checking compatibility by the marginal distributions, the eigenvector approach only checks the marginal distributions which are eigenvectors of $AB'$ and $B'A$. It significantly reduces the workload. By using Perron theorem and the concept of the IBD matrix, the part (a) of compatibility issues can be dealt with the eigenvector approach.

When $A$ and $B$ are incompatible, a simple way to measure the degree of incompatibility can be derived from the eigenvector approach. In order to compare the most nearly compatible joint distributions given by different measures, the thesis proposes the deviation of the conditional distributions plus the deviation of the marginal distributions as the most nearly compatible joint distribution assessment standard. The eigenvector approach not only derives formula for the most nearly compatible distribution, but also provides better joint distribu-

tion than those given by the other measures through the validations under this standard. The part (b) of compatibility issues can also be dealt with the eigenvector approach.

Finally, the eigenvector approach is used in solving game problems. In operations research, strategies adopted by both players are assumed to be independent. However, this independent assumption may not be appropriate, since both players can make decisions through the information provided by the payoffs for the game. Let strategies of both players form two conditional probability matrices, then the game problems can be converted into compatibility issues. We can use the concept of generalized compatibility to analyze game solutions and discuss the best strategies for both players in a variety of measurements.

Keywords : conditional probability matrix, compatibility, irreducible, reducible, IBD matrix, eigenvector approach, most nearly compatible joint distributions, 2-player finite zero-sum game.

國立政治大學
National Chengchi University

# 1 緒論

## 1.1 研究動機與目的

給定兩個隨機變數的條件機率矩陣$A$和$B$，相容性問題的主要課題包含：(一)如何判斷他們是否相容？若相容，則如何檢驗聯合分配的唯一性或找出所有的聯合分配；(二)若不相容，則如何訂定測量不相容程度的方法並找出最近似聯合分配。目前的文獻資料有幾種解決問題的途徑，例如Arnold and Press (1989)的比值矩陣法、Song et al. (2010)的不可約化對角塊狀矩陣(irreducible block diagonal matrix)法及Arnold et al. (2002)的數學規劃法等，經由這些方法的啓發，本文發展出創新的特徵向量法來處理前述的相容性課題。

我們發現當條件分配相容時，其邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$需滿足

$$A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau}, \quad B'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta}$$

的條件，所以$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足

$$AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}, \quad B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$$

的條件，即$AB'$和$B'A$對應特徵值1的特徵向量。因此本論文中所提出的特徵向量法，以滿足上述條件的特徵向量檢驗條件分配的相容性及聯合分配的唯一性，並找出所有可能的聯合分配。當條件分配不相容時，以邊際分配和條件分配所形成的兩個聯合分配的集合間的距離作爲不相容程度的測量值。爲了求出最近似的聯合分配，我們以條件分配的偏差加上邊際分配的偏差作爲評量聯合分配解優劣的標準。在此標準下，可推導出特徵向量法求最近似聯合分配的公式，並以實例比較各種測度下用數學軟體求出的最近似聯合分配的優劣。

在兩人零和有限賽局中，作業研究的解法是假設雙方決策爲獨立，但我們認爲雙方可依據償付值表所提供的資訊作選擇。因此我們可合理假設雙方的策略爲不獨立，此時無法由雙方策略的邊際分配得到聯合分配，需直接求出雙方策略的聯合分配才能得到賽局的解。在將雙方採取的策略寫成條件機率矩陣後，可將賽局問題轉換爲條件分配相容性問題。由於雙方決策所決定的條件機率矩陣多爲不相容，於是我們引進了廣義相容的概念。若$A$和$B$廣義相容，可以其聯合分配的期望值爲賽局解；若$A$和$B$不廣義相容，則以其最近似聯合分配的期望值爲賽局解。最後以實例說明，在各種測度下如何求得賽局的解和雙方的最佳決策。

## 1.2 研究架構

本文共分爲六個章節。第一章包含研究動機、目的與研究架構的敘述。第二章先回顧條件機率矩陣相容性問題的相關文獻，包括比值矩陣法和$IBD$矩陣法，接著介紹以數學規劃法求不相容程度的測量值及找出最近似的聯合機率分配。第三章闡述特徵向量法的理論，並以例子說明該法的求解過程，最後以距離的概念清楚說明各種測度所得不相容程度測量值的大小關係。第四章訂定評量最近似聯合分配解優劣的標準，特徵向量法可推得最近似解的公式，並以例子在各種測度下以數學軟體求出最近似的聯合分配。第五章先介紹作業研究的賽局解法，再說明如何將賽局問題轉換爲條件分配相容性問題，以例子說明在不同測度下所得最近似聯合分配會得到不同的賽局解。第六章爲結論。

國立政治大學 National Chengchi University

# 2 文獻探討

本章將依序介紹比值矩陣法，$IBD$矩陣法及Arnold, Castillo and Sarabia(2002)所提出以數學規劃法解決條件分配不相容的問題。

## 2.1 比值矩陣法

本節將介紹解相容性問題的主要方法之一：比值矩陣法。內容主要參考Arnold and Press (1989)。令$X, Y$是兩個有限離散隨機變數，值域分別爲$x_1, x_2, \cdots, x_I$及$y_1, y_2, \cdots, y_J$，則$A = (a_{ij})$和$B = (b_{ij})$分別爲對應於條件分配$X|Y$和$Y|X$的條件機率矩陣，其中

$$a_{ij} = Pr(X = x_i|Y = y_j), \quad b_{ij} = Pr(Y = y_j|X = x_i)$$

由以上可得

$$\sum_{i=1}^{I} a_{ij} = 1, \forall j, \quad \sum_{j=1}^{J} b_{ij} = 1, \forall i$$

首先我們介紹兩條件機率矩陣相容的定義：

**定義 2.1.** 給定條件機率矩陣$A$和$B$。若存在矩陣$P = (p_{ij})$，滿足

$$a_{ij} = p_{ij}/p_{.j}, \quad b_{ij} = p_{ij}/p_{i.}, \quad i = 1, 2, \cdots, I, \quad j = 1, 2, \cdots, J$$

其中

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad p_{i.} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}, \quad p_{.j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}$$

則稱A和B相容(compatible)。

令$N^A = \{(i,j)|a_{ij} > 0\}$，$N^B = \{(i,j)|b_{ij} > 0\}$，當$A$和$B$相容時，可推得$N^A = N^B$，即$N^A = N^B$是$A$和$B$相容的必要條件。若$N^A = N^B = N$，則我們可定義比值矩陣$C$：

**定義 2.2.** $I \times J$矩陣$C = (c_{ij})$稱爲$A$對$B$的比值矩陣，其中

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{b_{ij}}, & 若(i,j) \in N, \\ *, & 其他。 \end{cases}$$

Arnold and Press (1989)提出相容的充要條件，敘述如下：

**定理 2.1.** $A$和$B$相容的充要條件爲

(i) $N^A = N^B = N$

(ii) $\forall(i_1, i_2, j_1, j_2)$恆有$c_{i_1,j_1}c_{i_2,j_2} = c_{i_1,j_2}c_{i_2,j_1}$，其中$(i_1, j_1) \in N$，$(i_1, j_2) \in N$，$(i_2, j_1) \in N$，$(i_2, j_2) \in N$。

由於有不相容的例子(如例 1)滿足定理 2.1相容的充要條件，Arnold et al. (2004)以$ROPE$矩陣的觀念加以修正。

**定義 2.3.** 令$A$和$B$爲條件機率矩陣，$C$爲$A$對$B$的比值矩陣。若所有$c_{ij}$爲正數，則稱$C$是完整矩陣(complete matrix)；否則，稱$C$是不完整矩陣(incomplete matrix)。若存在矩陣$\overline{C}$，其元素都是正數，且對於所有$(i,j) \in N$恆有$\overline{c}_{ij} = c_{ij}$，則稱矩陣$\overline{C}$是$C$的正擴張矩陣(positive extension matrix)。若$\overline{C}$的秩爲1，則稱$C$的秩爲1且$\overline{C}$是$C$的秩一正擴張矩陣(rank one positive extension matrix)，簡記爲$ROPE$矩陣。

**定理 2.2.** 令$C$爲不完全的比值矩陣，則$C$的秩爲1的充要條件爲存在正向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$使得$C$的$ROPE$矩陣$\overline{C} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$

**定理 2.3.** 令$C$爲$A$對$B$的比值矩陣，則$A$和$B$相容的充要條件爲$N^A = N^B$且存在秩一正擴張矩陣$\overline{C}$。

以下例子說明定理 2.1相容的充要條件是不足的。

**例 1.** 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$A$對$B$的比值矩陣$C$爲

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & * \\ 1 & 2 & * & 2 \\ * & * & 2 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

根據定理 2.1，我們只需要檢驗$N^A = N^B$以及$c_{11} \times c_{22} = c_{12} \times c_{21} = 2$即可得到$A$和$B$相容。然而，$C$的$ROPE$矩陣不存在，根據定理 2.3，$A$和$B$不相容。

若比值矩陣$C$滿足定理 2.3，根據定理 2.2，存在向量$\boldsymbol{u} = (u_i)$和$\boldsymbol{v} = (v_j)$使得$c_{ij} = u_i v_j, (i,j) \in N$，則$X$的邊際分配$\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)$和$Y$的邊際分配$\boldsymbol{\eta} = (\eta_j)$和$X, Y$的聯合機率矩陣$P = (p_{ij})$可由以下關係式求出

$$\tau_i = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{I} u_i}, \quad \eta_j = \frac{1}{v_j \sum_{k=1}^{J} \frac{1}{v_k}}$$

$$p_{ij} = \tau_i b_{ij} = \eta_j a_{ij}$$

## 2.2 $IBD$矩陣法

若比值矩陣$C$較爲龐大複雜，定理2.3相容的充要條件難以檢驗且效率低落。因此Song et al. (2010)提出$IBD$矩陣法，以解決有限離散條件機率矩陣相容性的問題。本節內容主要參考Song et al. (2010)。

首先，我們介紹比值矩陣的不可約化以及$IBD$矩陣。

**定義 2.4.** 若比值矩陣$C$經過列或行互換後，可轉換成：

$$\left(\begin{array}{c|c} T_1 & * \\ \hline * & T_2 \end{array}\right)$$

其中對角塊狀矩陣$T_1$和$T_2$以外的元素皆爲*，則稱比值矩陣$C$爲可約化(reducible)，否則稱爲不可約化(irreducible)。

**引理 2.1.** 對於所有比值矩陣$C$，經過列或行互換後，可轉換成如下的不可約化對角塊狀矩陣(簡記爲$IBD$矩陣)：

$$T(C) = \left(\begin{array}{c|cccc} T_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline * & \boxed{T_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & * & \cdots & * & \boxed{T_M} \end{array}\right)$$

其中對角塊狀矩陣$T_1, \cdots, T_M\,(M \geq 1)$爲不可約化且以外的元素皆爲*。當$M = 1$，則$C$爲不可約化。

爲了方便，我們將$C$的$IBD$矩陣記爲$T(C) = \mathrm{Diag}(T_1, \cdots, T_M)$

**引理 2.2.** 比值矩陣$C$的秩是1的充要條件爲$C$的$IBD$矩陣$T(C) = \mathrm{Diag}(T_1, \cdots, T_M)$中每個$T_m\,(1 \leq m \leq M)$的秩皆是1。

條件機率分配的相容性和唯一性可以用$IBD$矩陣來檢驗，方法敘述如下：

**定理 2.4.** 令$C$爲$A$對$B$的比值矩陣且$C$的$IBD$矩陣爲$T(C)=\text{Diag}(T_1,\cdots,T_M)$，則$A$和$B$相容的充要條件爲$N^A=N^B$且每個$T_m\,(1\le m\le M)$的秩皆是1。

**定理 2.5.** 若$A$和$B$相容且$C$爲$A$對$B$的比值矩陣，則以下敘述爲等價：

1. 對於所有$C$的$IBD$矩陣$T(C)=\text{Diag}(T_1,\cdots,T_M)$，恆有$M=1$。
2. $C$爲不可約化。
3. $C$有唯一的$ROPE$矩陣。
4. 有唯一的聯合分配以$C$爲比值矩陣。

Song et al. (2010)證明了每個$ROPE$矩陣都對應一個聯合分配。因此，我們可由$\overline{C}$求得聯合分配。

**定理 2.6.** 設$A$和$B$相容且$C$爲$A$對$B$的比值矩陣。令$\mathfrak{C}$爲$C$的所有$ROPE$矩陣的集合，$\mathfrak{F}$爲所有以$C$爲比值矩陣的聯合分配的集合。若映射$H:\mathfrak{C}\to\mathfrak{F}$定義爲$H(\overline{C})=f$，則$H$爲雙射，其中$\overline{C}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$, $f(x_i,y_j)=b_{ij}\dfrac{u_i}{u_+}$, $\forall(i,j)\in N$

定理 2.6可以用引理 2.2加以改寫，新的版本提供一個較有效率的方法找出所有可能的聯合機率分配。

**定理 2.7.** 設$A$和$B$相容且$C$爲$A$對$B$的比值矩陣。令$T(C)=ECF=\text{Diag}(T_1,\cdots,T_M)$爲$C$的$IBD$矩陣，其中$E$和$F$爲排列矩陣(permutation matrix)且$\overline{T}_m=\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{v}'_m$爲$T_m$的$ROPE$矩陣$(1\le m\le M)$。對於任意$\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_M)>0$，令$\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{k}}=(k_1\boldsymbol{u}'_1,\cdots,k_M\boldsymbol{u}'_M)$，$p_k=E'\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}$，$f_{\boldsymbol{k}}(x_i,y_j)=b_{ij}p_{\boldsymbol{k}i}/p_{\boldsymbol{k}+}$，$\forall(i,j)\in N$，其中$\boldsymbol{p}'_{\boldsymbol{k}}=(p_{\boldsymbol{k}1},\cdots,p_{\boldsymbol{k}I})$，$p_{\boldsymbol{k}+}=\sum_{i=1}^{I}p_{\boldsymbol{k}i}$。則以$C$爲比值矩陣之所有聯合分配的集合爲$\{f_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_M),k_m>0,1\le m\le M\}$。

若$\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{k}/(\sum_{m=1}^{M} k_m)$，則$f_{\boldsymbol{k}^*} = f_{\boldsymbol{k}}$。因此，所有可能的聯合機率分配可表示爲

$$\{f_{\boldsymbol{k}} | \boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_M), \sum_{m=1}^{M} k_m = 1, k_m > 0, 1 \leq m \leq M\}$$

## 2.3 不相容程度的測量

當條件機率矩陣$A$和$B$爲不相容時，我們希望能找到一個方法來測量它們不相容的程度以及找出最近似的聯合分配。Arnold et al. (2002)提出以$\epsilon-$相容($\epsilon$-compatability)作爲測量兩個條件機率矩陣不相容的程度，並以數學規劃法找出不相容程度的測量值以及最近似的聯合分配。本節內容主要參考Arnold et al. (2002)。

考慮以下測量不相容程度的測度，我們以權重矩陣$W = (w_{ij}), w_{ij} \geq 0$來表示各位置$p_{ij}$準確度的相對重要性：

**測度(一)** 求矩陣$P = (p_{ij})$，其中$p_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in N, \sum_{(i,j)\in N} p_{ij} = 1$，使得

$$|p_{ij} - a_{ij} p_{.j}| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$
$$|p_{ij} - b_{ij} p_{i.}| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

**測度(二)** 求兩向量$\boldsymbol{\eta} = (\eta_j) \geq 0$和$\boldsymbol{\tau} = (\tau_i) \geq 0, \sum_j \eta_j = 1, \sum_i \tau_i = 1$使得

$$|a_{ij}\eta_j - b_{ij}\tau_i| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

**測度(三)** 求邊際機率向量$\boldsymbol{\tau} = (\tau_i) \geq 0, \sum_i \tau_i = 1$使得

$$\left| a_{ij} \sum_{k=1}^{I} b_{kj}\tau_k - b_{ij}\tau_i \right| \leq \epsilon w_{ij}; \quad \forall (i,j) \in N$$

在此我們假設各位置的$p_{ij}$爲同樣重要，因此對於所有$(i,j)$，以下皆令$w_{ij}=1$。

**定義 2.5.** 給定條件機率矩陣$A$和$B$，若$\epsilon$是在前述任一測度下有解之最小值，則稱$A$和$B$爲$\epsilon-$相容($\epsilon$-compatibility)。

由定義 2.5，$A$和$B$相容的充要條件爲他們是$0-$相容。

各測度下用來測量$A$和$B$不相容程度的機率矩陣$P^{(1)}$和$P^{(2)}$矩陣如表 1。

表 1: 各測度下測量不相容程度的$P^{(1)}$和$P^{(2)}$矩陣

| 測度 | $P^{(1)}$ | $P^{(2)}$ |
|---|---|---|
| (一) | $b_{ij}p_{i.}$ | $a_{ij}p.j$ |
| (二) | $b_{ij}\tau_i$ | $a_{ij}\eta_j$ |
| (三) | $b_{ij}\tau_i$ | $a_{ij}\sum_{k=1}^{I}b_{kj}\tau_k$ |

用作業研究中的數學規劃來解，以$\epsilon$爲目標函數，而各測度中的條件爲限制式之模型，即可求得測量不相容程度的$\epsilon$值及最近似的聯合機率分配$P$(或$(P^{(1)}+P^{(2)})/2$)。

在各不同測度下數學規劃法的運算結果可由以下例子說明。

**例 2.** 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{4}{10} \\ \frac{7}{10} & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{4} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{4} \\ \frac{15}{20} & 0 & \frac{2}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}$$

以程式(如GAMS)解各測度下的線性規劃模型，可得表 2,3和 4的結果。

表 2: 各測度下的$\epsilon$值及相關結果

| 測度 | $\epsilon$ | $\boldsymbol{\tau}$ | $\boldsymbol{\eta}$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|
| (一) | 0.021 | $\begin{pmatrix} 0.243 \\ 0.486 \\ 0.271 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.490 \\ 0.074 \\ 0.130 \\ 0.306 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.082 & 0.039 & 0.000 & 0.122 \\ 0.364 & 0.000 & 0.070 & 0.052 \\ 0.044 & 0.035 & 0.060 & 0.132 \end{pmatrix}$ |
| (二) | 0.041 | $\begin{pmatrix} 0.252 \\ 0.485 \\ 0.263 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.462 \\ 0.089 \\ 0.127 \\ 0.322 \end{pmatrix}$ | — |
| (三) | 0.042 | $\begin{pmatrix} 0.260 \\ 0.472 \\ 0.268 \end{pmatrix}$ | — | — |

表 3: 各測度下的$P^{(1)}$和$P^{(2)}$矩陣

| 測度 | $P^{(1)}$ | $P^{(2)}$ |
|---|---|---|
| (一) | $\begin{pmatrix} 0.061 & 0.061 & 0.000 & 0.122 \\ 0.364 & 0.000 & 0.049 & 0.073 \\ 0.027 & 0.027 & 0.081 & 0.135 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.098 & 0.019 & 0.000 & 0.122 \\ 0.343 & 0.000 & 0.091 & 0.031 \\ 0.049 & 0.057 & 0.039 & 0.153 \end{pmatrix}$ |
| (二) | $\begin{pmatrix} 0.063 & 0.063 & 0.000 & 0.126 \\ 0.364 & 0.000 & 0.049 & 0.073 \\ 0.026 & 0.026 & 0.079 & 0.131 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.092 & 0.022 & 0.000 & 0.129 \\ 0.323 & 0.000 & 0.089 & 0.032 \\ 0.046 & 0.067 & 0.038 & 0.161 \end{pmatrix}$ |
| (三) | $\begin{pmatrix} 0.065 & 0.065 & 0.000 & 0.130 \\ 0.354 & 0.000 & 0.047 & 0.071 \\ 0.027 & 0.027 & 0.080 & 0.134 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.089 & 0.023 & 0.000 & 0.134 \\ 0.312 & 0.000 & 0.089 & 0.034 \\ 0.045 & 0.069 & 0.038 & 0.167 \end{pmatrix}$ |

國立政治大學 National Chengchi University

表 4: 各測度下的$P$(或$(P^{(1)}+P^{(2)})/2$)矩陣以及$P^{(1)}-P^{(2)}$

| 測度 | $P$(或$(P^{(1)}+P^{(2)})/2$) | $P^{(1)}-P^{(2)}$ |
|---|---|---|
| (一) | $\begin{pmatrix} 0.082 & 0.040 & 0.000 & 0.122 \\ 0.364 & 0.000 & 0.070 & 0.052 \\ 0.044 & 0.035 & 0.060 & 0.132 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -0.037 & 0.042 & 0.000 & 0.000 \\ \mathbf{0.021} & 0.000 & -0.042 & 0.042 \\ -0.022 & -0.029 & 0.042 & -0.017 \end{pmatrix}$ |
| (二) | $\begin{pmatrix} 0.078 & 0.043 & 0.000 & 0.127 \\ 0.344 & 0.000 & 0.069 & 0.053 \\ 0.036 & 0.047 & 0.059 & 0.146 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -0.029 & \mathbf{0.041} & 0.000 & -0.003 \\ \mathbf{0.041} & 0.000 & \mathbf{-0.041} & \mathbf{0.041} \\ -0.020 & \mathbf{-0.041} & \mathbf{0.041} & -0.029 \end{pmatrix}$ |
| (三) | $\begin{pmatrix} 0.077 & 0.044 & 0.000 & 0.132 \\ 0.333 & 0.000 & 0.068 & 0.052 \\ 0.036 & 0.048 & 0.059 & 0.151 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -0.024 & \mathbf{0.042} & 0.000 & -0.004 \\ \mathbf{0.042} & 0.000 & \mathbf{-0.042} & 0.037 \\ -0.018 & \mathbf{-0.042} & \mathbf{0.042} & -0.034 \end{pmatrix}$ |

表 2列出各測度下的$\epsilon$值，以及邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$，或聯合分配$P=(p_{ij})$。我們注意到測度(一)下的$\epsilon$值約爲測度(二)和(三)下的一半且測度(二)下的$\epsilon$值略小於測度(三)下的$\epsilon$值，我們會在下一章以距離的概念討論這些現象發生的原因。

表 3列出各測度下的矩陣$P^{(1)}$及$P^{(2)}$。表 4列出測度(一)下的最近似聯合分配$P$矩陣，其他測度下的最近似聯合分配$(P^{(1)}+P^{(2)})/2$矩陣，及$P^{(1)}$和$P^{(2)}$之差$P^{(1)}-P^{(2)}$，由$P^{(1)}-P^{(2)}$中的值可觀察$A$和$B$不相容的程度。由表 4可看出各測度下求得之最近似聯合分配非常接近，但在測度(一)下的$P$矩陣和$(P^{(1)}+P^{(2)})/2$矩陣並不吻合。表 4中$P^{(1)}-P^{(2)}$的粗體元素表示$\epsilon$值的位置。

# 3 特徵向量法

本章介紹如何以特徵向量法處理相容性問題，包含：(一)如何判斷它們是否相容？若相容，則如何檢驗聯合分配的唯一性或找出所有的聯合分配；(二)若不相容，則如何訂定測量不相容程度的方法以及找出最近似聯合分配，並和各種測度下所測得不相容程度的測量值以距離的概念做比較。由於$N^A = N^B$是相容的必要條件，本章皆假設此條件成立，不再特別說明。

## 3.1 特徵向量法的簡介

令$X$和$Y$是兩個有限離散隨機變數，$A$和$B$分別爲$X|Y$和$Y|X$的條件機率矩陣。若$A$和$B$相容，則邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足

$$diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) \tag{1}$$

，其中$diag(\boldsymbol{\tau})$和$diag(\boldsymbol{\eta})$分別爲以$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$的元素爲對角線元素的對角矩陣，且聯合分配$P = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$。因此在檢驗$A$和$B$是否相容時，即只要檢驗是否有可能的邊際分配滿足 (1)式。若滿足 (1)式的邊際分配是唯一，即可得聯合分配的唯一性。我們進一步發現邊際分配必須滿足以下定理。

**定理 3.1.** 設條件機率矩陣$A$和$B$相容。若$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$爲滿足 (1)式的邊際分配，則

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau} \\ B'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{2}$$

**證明.** 因爲$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足 (1)式，所以

$$diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta})$$

令$\mathbf{1}$爲元素皆爲1的向量，則

$$\begin{cases} A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{1} = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' \cdot diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = \mathbf{1}' \cdot A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau} \\ B'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

□

根據定理 3.1，可得以下的系：

**系 3.1.** 設條件機率矩陣$A$和$B$相容。若$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$爲滿足 (1)式的邊際分配，則

$$\begin{cases} AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \\ B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{3}$$

**定義 3.1.** 令向量$\boldsymbol{v} = (v_i)$，則向量的長度定義爲$\|\boldsymbol{v}\| = \sum_i |v_i|$。若$v_i > 0, \forall i$，稱$\boldsymbol{v}$爲正向量。

由系 3.1可得邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$必定分別爲$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的正特徵向量。因此檢驗條件機率矩陣的相容性時，僅需檢驗$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的正特徵向量即可。相較於檢驗所有長度爲1的正向量，確實縮小了檢驗的範圍。我們將這個重要結果寫成以下定理：

**定理 3.2.** 設$A$和$B$爲條件機率矩陣，則$A$和$B$相容的充要條件爲$AB'$和$B'A$存在對應特徵值1且長度爲1的正特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$，且$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足 (1)式。

第二章介紹了如何將比值矩陣$C$轉換爲$IBD$矩陣的形式，以便簡化相容性檢驗。因此，我們也嘗試將條件機率矩陣$A$和$B$轉換爲$IBD$矩陣的形式，希望同樣能簡化相容性檢驗。

**定義 3.2.** 若條件機率矩陣$A$經過列或行互換後，可轉換成：

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

其中對角塊狀矩陣$A_i(i=1,2)$以外的元素皆爲0，則稱條件機率矩陣$A$爲可約化，否則稱爲不可約化。條件機率矩陣$B$是否可約化也可以相同的方法定義。

**引理 3.1.** 條件機率矩陣$A$和$B$經過相同的列或行互換後，可同時轉換成如下的不可約化對角塊狀矩陣(簡記爲$IBD$矩陣)：

$$T(A)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_M} \end{pmatrix}, \quad T(B)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{B_M} \end{pmatrix}$$

其中$A_1,\cdots,A_M$和$B_1,\cdots,B_M(M\geq 1)$爲不可約化且以外的元素皆爲0。當$M=1$，則$A$和$B$爲不可約化。

爲了方便，$T(A)$可記爲$\mathrm{Diag}(A_1,\cdots,A_M)$，$T(B)$可記爲$\mathrm{Diag}(B_1,\cdots,B_M)$。

當條件機率矩陣$A$和$B$爲可約化時，我們可將其$IBD$矩陣拆解爲數個不可約化的條件機率矩陣$A_m$和$B_m$，且$A$和$B$的相容性等價於每一對$A_m$和$B_m$的相容性。

**定理 3.3.** 設$A$和$B$爲條件機率矩陣。令$A$和$B$的$IBD$矩陣分別爲$T(A)=\mathrm{Diag}(A_1,\cdots,A_M)$，$T(B)=\mathrm{Diag}(B_1,\cdots,B_M)$，則$A$和$B$相容的充要條件爲$A_m$和$B_m$相容。

由上述定理得知檢驗相容性時，只需要討論條件機率矩陣不可約化的情形。

## 3.2 不可約化條件機率矩陣的相容性檢驗

給定條件機率矩陣$A$和$B$，$AB'$和$B'A$對應特徵值1的正特徵向量會不會過多使得檢驗相容性時會遭遇困難或效率不佳，是我們首先擔心的問題。根據定理3.3，我們只需考慮$A$和$B$皆爲不可約化的情形。本節利用線性代數的Perron定理證明$AB'$和$B'A$對應特徵值1的特徵空間皆是一維的，即長度爲1的正特徵向量是唯一的，故檢驗$A$和$B$的相容性時就只需檢驗一組可能的邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$。首先，介紹一些我們要用到的線性代數的結果。以下引理主要參考Meyer, C. D. (2000). Matrix analysis and applied linear algebra.

**引理 3.2.** 令$\mathcal{M} = (m_{ij})$爲$I \times J$矩陣，則$\|\mathcal{M}\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le J} \sum\limits_{1}^{I} |m_{ij}|$，即矩陣的元素取絕對值後，行之和的最大值。

**引理 3.3.** 令$\mathcal{M}$爲$I \times J$矩陣，$\lambda$爲$\mathcal{M}$的特徵值，則$\lambda$也是$\mathcal{M}'$的特徵值且$|\lambda| \le \|\mathcal{M}\|_1$。

證明. 因爲$\lambda$爲$\mathcal{M}$的特徵值，所以$\det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$，可得

$$\det(\mathcal{M}' - \lambda I) = \det((\mathcal{M} - \lambda I)') = \det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$$

因此$\lambda$也是$\mathcal{M}'$的特徵值。

令$\boldsymbol{x}$爲$\mathcal{M}$對應特徵值$\lambda$的特徵向量，則

$$\begin{aligned}
&\lambda \boldsymbol{x} = \mathcal{M}\boldsymbol{x} \\
\Rightarrow &\|\lambda \boldsymbol{x}\|_1 = \|\mathcal{M}\boldsymbol{x}\|_1 \\
\Rightarrow &|\lambda| \|\boldsymbol{x}\|_1 \le \|\mathcal{M}\|_1 \|\boldsymbol{x}\|_1 \\
\Rightarrow &|\lambda| \le \|\mathcal{M}\|_1
\end{aligned}$$

□

**定義 3.3.** 令矩陣$\mathcal{M} = (m_{ij})$

(1) 若$m_{ij} > 0, \forall i, j$，則稱$\mathcal{M}$爲正矩陣。

(2) 若$m_{ij} \geq 0, \forall i, j$且$\sum_j m_{ij} = 1, \forall i$，則稱$\mathcal{M}$爲轉移矩陣(transition matrix)。

(3) 設$\mathcal{M}$爲轉移矩陣且存在正整數$k$使得$\mathcal{M}^k$爲正矩陣，則稱$\mathcal{M}$爲正則(regular)轉移矩陣。

**引理 3.4** (Perron定理)**.** 若$\mathcal{M}$爲正$n$階方陣，則以下性質恆成立：

1. 存在$\mathcal{M}$的正特徵值$r$大於所有其他特徵值的絕對值。
2. 對應$r$的特徵空間爲一維空間。
3. 存在正特徵向量$\boldsymbol{x}$使得$\mathcal{M}\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}$。

滿足以上條件之特徵值$r$稱爲Perron特徵值或Perron根。

**引理 3.5.** 令$\mathcal{M}$爲$n$階方陣且$\lambda$爲$\mathcal{M}$的特徵值，我們有以下結果：

(1) 對於所有正整數$k$，$\lambda^k$是$\mathcal{M}^k$的特徵值。

(2) 若$\mathcal{E}(\mathcal{M})$爲$\mathcal{M}$對應特徵值$\lambda$的特徵空間，$\mathcal{E}(\mathcal{M}^k)$爲$\mathcal{M}^k$對應特徵值$\lambda^k$的特徵空間，則$\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{M}^k)$。

**引理 3.6.** 設$\mathcal{M} = (m_{ij})$爲轉移矩陣。若$\mathcal{M}$所對應的馬可夫鏈爲不可約化且其對角線上之元素 $m_{ii}$皆爲正，則$\mathcal{M}$爲正則轉移矩陣。

國立政治大學 National Chengchi University

由於$BA'$中的元素皆爲非負且列的和爲1，可視爲一轉移矩陣。Song et al. (2010)提供了$BA'$所對應的馬可夫鏈皆爲不可約化的充要條件，敘述如下：

**引理 3.7.** 設$A$和$B$爲條件機率矩陣，則轉移矩陣$BA'$所對應的馬可夫鏈爲不可約化的充要條件爲$A$和$B$皆爲不可約化。

由以上引理，我們可以得到下面這個重要定理。

**定理 3.4.** 設$A$和$B$爲不可約化條件機率矩陣，則以下性質恆成立。

1. $AB'$和$B'A$皆有特徵值1。
2. 若$\mathcal{E}(AB')$和$\mathcal{E}(B'A)$分別爲$AB'$和$B'A$對應特徵值1的特徵空間，則$\dim \mathcal{E}(AB') = \dim \mathcal{E}(B'A) = 1$
3. 存在正向量$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$使得$\mathcal{E}(AB') = \{r\boldsymbol{u} | r \in \mathbb{R}\}, \mathcal{E}(B'A) = \{r\boldsymbol{v} | r \in \mathbb{R}\}$

證明. 這裡僅證明$AB'$的情形，$B'A$的證明類似。

因爲$A$的行之和及$B$的列之和皆是1，所以$BA'\mathbf{1} = \mathbf{1}$，可得1爲$BA'$的特徵值。根據引理 3.3，1也是$AB'$的特徵值。

因爲$A$和$B$皆爲不可約化，根據引理 3.7可得$BA'$所對應的馬可夫鏈爲不可約化。若對於任意的$i(1 \leq i \leq I)$

$$
\begin{aligned}
& (BA')_{ii} = \sum_k b_{ik} a_{ik} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall k, b_{ik} a_{ik} = 0 \, (\because a_{ik}, b_{ik} \geq 0) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall k, b_{ik} = a_{ik} = 0 \, (\because N^A = N^B) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_k b_{ik} = \sum_k a_{ik} = 0
\end{aligned}
$$

這和$B$的每一列之和爲1的條件矛盾，因此$BA'$對角線上之元素皆爲正。根據引理3.6，$BA'$爲正則轉移矩陣，亦即存在正整數$k$使得$(BA')^k$爲正矩陣，則$(AB')^k$也是正矩陣。

由於$AB'$爲方陣且1爲$AB'$的特徵值，根據引理 3.5，1也是$(AB')^k$的特徵值。令$\mathcal{E}((AB')^k)$爲$(AB')^k$對應特徵值1的特徵空間，則$\mathcal{E}(AB') \subseteq \mathcal{E}((AB')^k)$。

因爲$AB'$的每一行之和爲1，所以$(AB')^k$的每一行之和也是1，可得$\|(AB')^k\|_1 = 1$。根據引理 3.3，若$\lambda$爲$(AB')^k$的特徵值，則$|\lambda| \leq \|(AB')^k\|_1 = 1$。根據引理3.4可得$(AB')^k$的Perron特徵值爲1，因此$\dim \mathcal{E}((AB')^k) = 1$且存在正向量$\boldsymbol{u}$使得$\mathcal{E}((AB')^k) = \{r\boldsymbol{u} | r \in \mathbb{R}\}$

因爲$\mathcal{E}(AB') \subseteq \mathcal{E}((AB')^k)$，可得$1 \leq \dim \mathcal{E}(AB') \leq \dim \mathcal{E}((AB')^k) = 1$，因此$\dim \mathcal{E}(AB') = 1$且存在正向量$\boldsymbol{u}$使得$\mathcal{E}(AB') = \{r\boldsymbol{u} | r \in \mathbb{R}\}$。 □

根據定理 3.4，我們可以得到下面這個重要定理：

**定理 3.5.** 若$A$和$B$爲不可約化的條件機率矩陣，則$AB'$和$B'A$對應特值1且長度爲1的正特徵向量只有一組。因此這組正特徵向量是唯一滿足 (2)式且長度爲1的向量。

若條件機率矩陣$A$和$B$相容，由定理3.1可得邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足 (2)式。由定理 3.5，若$A$和$B$爲不可約化，則滿足 (2)式且長度爲1的向量只有一組。檢驗相容性時，僅需檢驗這組向量即可。利用此概念，我們提供了聯合分配唯一性的充要條件如下：

**定理 3.6.** 設$A$和$B$爲相容的條件機率矩陣，則下列敘述爲等價：

(i) $A$和$B$爲不可約化。

(ii) $AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的正特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$是唯一的。

(iii) $A$和$B$有唯一的聯合分配。

證明. (i)$\Leftrightarrow$(iii)可由定理 2.5得到。(i)$\Rightarrow$(ii)可由定理 3.5得到。

(ii)$\Rightarrow$(iii) 令$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$是唯一的。若$P=(p_{ij})$和$Q=(q_{ij})$爲以$A$和$B$爲條件分配的聯合分配，則邊際分配爲$\boldsymbol{\tau}^P=(\tau_i^P)$和$\boldsymbol{\tau}^Q=(\tau_i^Q)$，其中

$$\tau_i^P=\sum_j p_{ij},\quad \tau_i^Q=\sum_j q_{ij}$$

根據系 3.1，$\boldsymbol{\tau}^P$和$\boldsymbol{\tau}^Q$皆爲$AB'$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量。因爲此特徵向量是唯一的，所以$\boldsymbol{\tau}^P=\boldsymbol{\tau}^Q$。此外，

$$p_{ij}=b_{ij}\tau_i^P=b_{ij}\tau_i^Q=q_{ij},\forall i,j$$

因此，$A$和$B$的聯合分配是唯一的。 □

接著我們以實際例子說明特徵向量法如何處理條件分配相容性問題：

**例 3** (相容的例子). 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因爲$A$和$B$皆爲不可約化，由定理 3.5可知$AB'$和$B'A$對應特值1且長度爲1的正特徵向量是唯一的。

$$AB' = \begin{pmatrix} \frac{43}{60} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{20} & \frac{19}{36} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B'A = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{8}{15} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

以數學軟體求$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，可快速得到

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

因爲$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$，可知$A$和$B$相容且聯合機率分配

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

下個例子說明特徵向量法可以找到$AB'$和$B'A$對應特徵值1的特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足 (2)式，但是這組$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$不一定滿足 (1)式。

**例 4** (不相容的例子). 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

因爲$A$和$B$皆爲不可約化且$N^A = N^B$，由定理 3.5可知$AB'$和$B'A$對應特值1且長度爲1的正特徵向量是唯一的。

$$AB' = \begin{pmatrix} \frac{11}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{31}{60} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}, \quad B'A = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{43}{60} \end{pmatrix}$$

以數學軟體求$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，可快速得到

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{19}{101} \\ \frac{81}{202} \\ \frac{83}{202} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{159}{808} \\ \frac{23}{101} \\ \frac{465}{808} \end{pmatrix}$$

檢驗$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta})$和$diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$，發現

$$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} \frac{53}{404} & \frac{23}{404} & 0 \\ 0 & \frac{69}{404} & \frac{93}{404} \\ \frac{53}{808} & 0 & \frac{279}{808} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{19}{202} & \frac{19}{202} & 0 \\ 0 & \frac{27}{202} & \frac{27}{101} \\ \frac{83}{808} & 0 & \frac{249}{808} \end{pmatrix} = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$$

所以條件機率矩陣$A$和$B$不相容。

## 3.3 可約化條件機率矩陣的相容性檢驗

根據定理 3.6，若不可約化條件機率矩陣$A$和$B$相容，則$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$是唯一的，且$A$和$B$有唯一的聯合分配。然而，若$A$和$B$爲可約化，定理 3.6說明了$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$並非唯一的，且可能的聯合分配多於一個。本節我們將說明當$A$和$B$可約化時，如何找出所有滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$及所有可能的聯合分配。

因爲對$A$和$B$作相同的列或行互換不會改變相容性，爲了方便起見，本節中部份定理假設$A$和$B$已爲$IBD$矩陣的形式。令$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$分別爲$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，則滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$可由以下定理求出。

**定理 3.7.** 設條件機率矩陣$A=\mathrm{Diag}(A_1,\cdots,A_M)$和$B=\mathrm{Diag}(B_1,\cdots,B_M)$。令$A_mB_m'$和$B_m'A_m$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量分別爲$\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_m(1\le m\le M)$，則所有滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$形成的集合爲

$$\left\{(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta})\,\middle|\,\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}s_1\boldsymbol{u}_1\\ s_2\boldsymbol{u}_2\\ \vdots\\ s_M\boldsymbol{u}_M\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}s_1\boldsymbol{v}_1\\ s_2\boldsymbol{v}_2\\ \vdots\\ s_M\boldsymbol{v}_M\end{pmatrix}\right\}$$

其中$s_m>0(1\le m\le M),\sum_m s_m=1$。

證明. 令$\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_M)',\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_M)'$，其中$\boldsymbol{\tau}_m$和$\boldsymbol{\eta}_m$的維數分別爲$A_m$的列數和行數。因爲$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足 (2)式，由系 3.1可得$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\tau}$滿足 (3)式。

$$\text{因爲}AB'=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1' & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & B_2' & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_M'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1' & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & A_2B_2' & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_MB_M'\end{pmatrix}$$

故我們得到$AB'\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} A_1B_1'\boldsymbol{\tau}_1 \\ A_2B_2'\boldsymbol{\tau}_2 \\ \vdots \\ A_MB_M'\boldsymbol{\tau}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_M \end{pmatrix} = \boldsymbol{\tau}$

由上可知$\boldsymbol{\tau}_m$爲$A_mB_m'$對應特徵值1的特徵向量。根據定理 3.4可得$\boldsymbol{\tau}_m = s_m\boldsymbol{u}_m(1 \le m \le M)$，則$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{u}_1 \\ s_2\boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ s_M\boldsymbol{u}_M \end{pmatrix}$，其中$s_m > 0(1 \le m \le M), \sum_m s_m = 1$。同理可得$\boldsymbol{\eta}_m = t_m\boldsymbol{v}_m$，則$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} t_1\boldsymbol{v}_1 \\ t_2\boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ t_M\boldsymbol{v}_M \end{pmatrix}$，其中$t_m > 0, \sum_m t_m = 1$。

因爲$A_m, B_m$皆不可約化，根據定理 3.5，$A_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{u}_m, \forall m$。因爲$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足(2)式，將解出之$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$代入$A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau}$可得

$$A\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} t_1A_1\boldsymbol{v}_1 \\ t_2A_2\boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ t_MA_M\boldsymbol{v}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1\boldsymbol{u}_1 \\ t_2\boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ t_M\boldsymbol{u}_M \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{u}_1 \\ s_2\boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ s_M\boldsymbol{u}_M \end{pmatrix}$$

$$\because A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau} \quad \therefore s_m = t_m, 1 \le m \le M$$

國立政治大學 National Chengchi University

因此所有滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$形成的集合爲

$$\left\{ (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \middle| \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{u}_1 \\ s_2\boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ s_M\boldsymbol{u}_M \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{v}_1 \\ s_2\boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ s_M\boldsymbol{v}_M \end{pmatrix} \right\}$$

其中$s_m > 0 (1 \leq m \leq M), \sum_m s_m = 1$。 □

爲了找出所有可能的聯合分配，我們首先證明每個聯合分配皆對應一組滿足(1)式的特徵向量。

**定理 3.8.** 令$A$和$B$爲兩相容的條件機率矩陣，$\mathfrak{E} = \{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) \big| A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B, AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}, B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}, \|\boldsymbol{\tau}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = 1, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} > 0\}$，$\mathfrak{P}$爲所有條件分配爲$A$和$B$的聯合分配形成的集合。我們定義映射$G : \mathfrak{E} \to \mathfrak{P}$爲$G(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = P$，其中$P = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$，則$G$爲雙射。

證明. 首先，我們證明映射$G$的定義是適當的。若$(\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}), (\boldsymbol{\tau}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)}) \in \mathfrak{E}$且$(\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}) = (\boldsymbol{\tau}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)})$，則$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(2)}$，故$diag(\boldsymbol{\tau}^{(1)}) \cdot B = diag(\boldsymbol{\tau}^{(2)}) \cdot B$

接著，我們證明$G$爲映成。對於任意$P \in \mathfrak{P}$，令$\boldsymbol{\tau}_P$和$\boldsymbol{\eta}_P$爲其邊際分配，根據系 3.1，$(\boldsymbol{\tau}_P, \boldsymbol{\eta}_P) \in \mathfrak{E}$且$G(\boldsymbol{\tau}_P, \boldsymbol{\eta}_P) = P$。因此$G$爲映成。

最後，我們證明$G$爲一對一。假設$G(\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}) = G(\boldsymbol{\tau}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)}) = P = (p_{ij})$，由$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$可得$a_{ij}\eta_j^{(1)} = b_{ij}\tau_i^{(1)} = p_{ij} = b_{ij}\tau_i^{(2)} = a_{ij}\eta_j^{(2)}$。對於所有的$i$，存在$j_i$使得$b_{ij_i} > 0$，因此$b_{ij_i}\tau_i^{(1)} = b_{ij_i}\tau_i^{(2)}$，可得$\tau_i^{(1)} = \tau_i^{(2)}$，亦即$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(2)}$。同理，$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \boldsymbol{\eta}^{(2)}$。因此$(\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)}) = (\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)})$。 □

由定理 3.8，我們可以找出所有可能的聯合分配。

**定理 3.9.** 設條件機率矩陣$A$ =Diag$(A_1, \cdots, A_M), B$ =Diag$(B_1, \cdots, B_M)$相容。令$\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_m$分別爲$A_m B'_m$和$B'_m A_m$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，則所有可能的聯合分配形成的集合爲$\{P_{\boldsymbol{s}} = diag(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{s}}) \cdot B | \boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_M), s_m > 0, \sum_m s_m = 1, \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{s}} = (s_1 \boldsymbol{u}'_1, \cdots, s_M \boldsymbol{u}'_M)\}$

證明. 令$\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{s}} = (s_1 \boldsymbol{v}'_1, \cdots, s_M \boldsymbol{v}'_M)$，則$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量形成的集合爲$\{(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}) | \boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_M), s_m > 0, \sum_m s_m = 1\}$。

因爲$A_m, B_m$爲不可約化且相容的條件機率矩陣，且$\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_m$分別爲$A_m B'_m$和$B'_m A_m$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，所以$A_m \cdot diag(\boldsymbol{v}_m) = diag(\boldsymbol{u}_m) \cdot B, \forall m$。因此，對於所有的$(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}})$

$$\begin{aligned} A \cdot diag(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}) =& \text{Diag}(s_1 A_1 \cdot diag(\boldsymbol{v}_1), \cdots, s_M A_M \cdot diag(\boldsymbol{v}_M)) \\ =& \text{Diag}(s_1 diag(\boldsymbol{u}_1) \cdot B_1, \cdots, s_M diag(\boldsymbol{u}_M) \cdot B_M) = diag(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{s}}) \cdot B \end{aligned}$$

根據定理 3.8，所有可能的聯合分配形成的集合爲$\{P_{\boldsymbol{s}} | \boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_M), s_m > 0, \sum_m s_m = 1\}$。 □

若可約化條件機率矩陣$A$和$B$相容但不爲$IBD$矩陣的形式，則其$IBD$矩陣爲兩邊各乘上一個適當的排列矩陣，並可利用定理 3.9找出所有可能的聯合分配。

**定理 3.10.** 設條件機率矩陣$A$和$B$相容且其$IBD$矩陣分別爲$T(A) = EAF$和$T(B) = EBF$，其中$E$和$F$爲排列矩陣。令$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$分別爲$T(A)T(B)'$和$T(B)'T(A)$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$滿足 (1)式，$Q$是$T(A)$和$T(B)$的聯合分配，我們有下列結果：

1. 若$\boldsymbol{\tau} = E'\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{\eta} = F\boldsymbol{v}$，則$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$分別爲$AB'$和$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量。

2. 若$P = E'QF'$，則$P$爲$A$和$B$的聯合分配。

證明. 1. 因爲$\boldsymbol{u}$是$T(A)T(B)'$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量，所以

$$\begin{aligned} AB'\boldsymbol{\tau} =& AB'E'\boldsymbol{u} \\ =& E'EAFF'B'E'\boldsymbol{u} \\ =& ET(A)T(B)'\boldsymbol{u} \\ =& E'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{\tau}$是$AB'$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量。同理，$\boldsymbol{\eta}$是$B'A$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量。

2. 因爲$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$滿足 (1)式，所以

$$\begin{aligned} & T(A)diag(\boldsymbol{v}) = T(B)'diag(\boldsymbol{u}) \\ \Rightarrow & AFdiag(\boldsymbol{v})F' = E'diag(\boldsymbol{u})EB \\ \Rightarrow & Adiag(F\boldsymbol{v}) = diag(E'\boldsymbol{u})B \\ \Rightarrow & Adiag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau})B \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$滿足 (1)式，又$T(A)$和$T(B)$爲$IBD$矩陣且相容，根據定理 3.9

$$\begin{aligned} & Q = diag(\boldsymbol{u})T(B) = diag(\boldsymbol{u})EBF \\ \Rightarrow & E'QF' = E'diag(\boldsymbol{u})EB = diag(E'\boldsymbol{u})B = diag(\boldsymbol{\tau})B \end{aligned}$$

可得$P$爲$A$和$B$的聯合分配。

□

根據定理 3.10，我們可利用$IBD$矩陣的聯合分配求得$A$和$B$的聯合分配。接著我們看一個利用特徵向量法處理可約化條件機率矩陣的例子。

**例 5.** 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$A$和$B$的$IBD$矩陣爲$T(A)=EAF=\mathrm{Diag}(A_1,A_2), T(B)=EBF=\mathrm{Diag}(B_1,B_2)$，其中

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

解$A_m B_m' \boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{u}_m, B_m' A_m \boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{v}_m, m=1,2$，可得

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

因爲$A_m \cdot diag(\boldsymbol{v}_m)=diag(\boldsymbol{u}_m)\cdot B_m, m=1,2$，根據定理 3.3，$A$和$B$相容。又$M=2$，根據定理 3.6，$A$和$B$的聯合分配不唯一。

根據定理 3.9，令$\boldsymbol{s}=(s_1,s_2), \boldsymbol{u_s}=(\frac{3}{7}s_1,\frac{4}{7}s_1,\frac{4}{9}s_2,\frac{5}{9}s_2)', \boldsymbol{v_s}=(\frac{4}{7}s_1,\frac{3}{7}s_1,\frac{1}{3}s_2,\frac{2}{3}s_2)'$，

其中$s_1, s_2 > 0, s_1 + s_2 = 1$，可得$T(A)$和$T(B)$所有可能的聯合分配爲

$$Q_{\boldsymbol{s}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}s_1 & \frac{2}{7}s_1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7}s_1 & \frac{1}{7}s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9}s_2 & \frac{2}{9}s_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9}s_2 & \frac{4}{9}s_2 \end{pmatrix}$$

根據定理 3.10，$\boldsymbol{u_s}, \boldsymbol{v_s}$對應的$\boldsymbol{\tau_s}, \boldsymbol{\eta_s}$爲$\boldsymbol{\tau_s} = E'\boldsymbol{u_s} = (\frac{3}{7}s_1, \frac{4}{9}s_2, \frac{4}{7}s_1, \frac{5}{9}s_2)', \boldsymbol{\eta_s} = F\boldsymbol{v_s} = (\frac{4}{7}s_1, \frac{1}{3}s_2, \frac{3}{7}s_1, \frac{2}{3}s_2)'$，其中$s_1, s_2 > 0, s_1 + s_2 = 1$，且$A$和$B$所有可能的聯合分配爲

$$P_{\boldsymbol{s}} = E'Q_{\boldsymbol{s}}F' = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}s_1 & 0 & \frac{2}{7}s_1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9}s_2 & 0 & \frac{2}{9}s_2 \\ \frac{3}{7}s_1 & 0 & \frac{1}{7}s_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}s_2 & 0 & \frac{4}{9}s_2 \end{pmatrix}$$

## 3.4 各種不相容程度測量方法的比較

本節將特徵向量法所衍生出的不相容程度測量方法和Arnold et al.(2002)提出的各種不相容程度測度做比較。先以距離的概念將各測度下$A$和$B$不相容程度的測量值$\epsilon$清楚地以數學式表示，再比較它們的大小關係。

設$A$和$B$爲條件機率矩陣，令

$$\mathbb{P} = \{P = (p_{ij}) \Big| \sum_i \sum_j p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0, \forall i, j\}$$

$$\mathbb{P}_A = \{P = (p_{ij}) \Big| p_{ij} = a_{ij}\eta_j, \sum_j \eta_j = 1, \eta_j \geq 0\}$$

$$\mathbb{P}_B = \{P = (p_{ij}) \Big| p_{ij} = b_{ij}\tau_i, \sum_i \tau_i = 1, \tau_i \geq 0\}$$

$A$和$B$相容的充要條件爲$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$有交集，因此不相容時$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$沒有交集，兩集合間的距離可作爲不相容程度的測量值。$A$和$B$相容時邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$必須滿足 (3)式，所以特徵向量法將$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$縮小，排除掉不是特徵向量的部份，計算上也較爲方便。考慮$\mathbb{P}_A^*$和$\mathbb{P}_B^*$，$A$和$B$相容的充要條件爲$\mathbb{P}_A^*$和$\mathbb{P}_B^*$有交集，因此不相容時$\mathbb{P}_A^*$和$\mathbb{P}_B^*$沒有交集，兩集合間的距離也可作爲不相容程度的測量值。

$$\mathbb{P}_A^* = \{P = (p_{ij}) \Big| p_{ij} = a_{ij}\eta_j, B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}, \sum_j \eta_j = 1, \eta_j \geq 0\}$$

$$\mathbb{P}_B^* = \{P = (p_{ij}) \Big| p_{ij} = b_{ij}\tau_i, AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}, \sum_i \tau_i = 1, \tau_i \geq 0\}$$

若我們將距離函數$d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$定義爲$\forall P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)}), P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{P}, d(P^{(1)}, P^{(2)}) = \sup_{(i,j)} |p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)}|$，則$(\mathbb{P}, d)$爲一度量空間。

**引理 3.8.** 設$(\mathbb{P}, d)$爲一度量空間，$\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathbb{P}$。若$\mathscr{A}, \mathscr{B}$皆爲$(\mathbb{P}, d)$中的凸集合及閉集合，則$\mathscr{A}, \mathscr{B}$有最短距離。

**引理 3.9.** $\mathbb{P}_A, \mathbb{P}_B$皆爲度量空間$(\mathbb{P}, d)$中的凸集合及閉集合。

*證明.* 這裡僅證明$\mathbb{P}_A$的情形，$\mathbb{P}_B$的證明類似。

我們先證明$\mathbb{P}_A$爲凸集合。令$P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathbb{P}_A$，則存在$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = (\eta_j^{(1)}), \boldsymbol{\eta}^{(2)} = (\eta_j^{(1)})$使得$p_{ij}^{(1)} = a_{ij}\eta_j^{(1)}, p_{ij}^{(2)} = a_{ij}\eta_j^{(2)}$，其中$\sum_j \eta_j^{(1)} = \sum_j \eta_j^{(2)} = 1$, $\eta_j^{(1)}, \eta_j^{(2)} \geq 0, \forall j$。令$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 < \lambda < 1$，則存在$\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\eta}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{\eta}^{(2)}$使得$p_{ij} = a_{ij}\eta_j$，其中$\sum_j \eta_j = 1$, $\eta_j \geq 0$，因此$\mathbb{P}_A$爲凸集合。

接著證明$\mathbb{P}_A$爲閉集合。令$\{P^{(n)}\} \subseteq \mathbb{P}_A, P = (p_{ij}) \in \mathbb{P}$且$P^{(n)} \to P$，則存在$\boldsymbol{\eta}^{(n)}$使得$p_{ij}^{(n)} = a_{ij}\eta_j^{(n)} \to p_{ij}$，其中$\sum_j \eta_j^{(n)} = 1, \eta_j^{(n)} \geq 0, \forall n, j$。因爲$A$的每一行之和爲1，所以$A$的每一行至少存在一元素爲正數，則對於所有的$j$存在$i_j$使

得$a_{i_j j} > 0$，因此$\eta_j^{(n)} \to \dfrac{p_{i_j j}}{a_{i_j j}} = \eta_j, \forall j$。因爲$\eta_j^{(n)} \geq 0, \forall j$，所以$\eta_j \geq 0, \forall j$，又$\sum_j \eta_j = \sum_j \lim_n \eta_j^{(n)} = \lim_n \sum_j \eta_j^{(n)} = \lim_n 1 = 1$，因此$P \in \mathbb{P}_A$，可得$\mathbb{P}_A$爲閉集合。 □

由引理 3.8和引理 3.9，$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$有最短距離，因此我們可在$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$中各找到一點使得兩點間的距離即爲兩集合間的距離。

若我們將$f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_A$定義爲$f(P) = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta})$，其中$\eta_j = \sum_i p_{ij}$，$g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_B$定義爲$g(P) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$，其中$\tau_i = \sum_j p_{ij}$，則Arnold et al. (2002)各測度的不相容程度測量值可以用距離函數$d$表示爲

$$\epsilon_1 = \inf_{P \in \mathbb{P}} \sup\{d(P, f(P)), d(P, g(P))\}$$

$$\epsilon_2 = \inf_{\substack{P_A \in \mathbb{P}_A \\ P_B \in \mathbb{P}_B}} d(P_A, P_B)$$

$$\epsilon_3 = \inf_{P \in \mathbb{P}_B} d(P, f(P))$$

其中$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$分別爲測度(一)、(二)和(三)的不相容程度測量值。我們將特徵向量法的不相容程度測量值定義爲

$$\epsilon_4 = \inf_{P \in \mathbb{P}_B^*} d(P, f(P))$$

可以看出$\epsilon_4$爲$\epsilon_3$的改良，且滿足下面定理。

**定理 3.11.** 設特徵向量法的不相容程度測量值爲$\epsilon_4$，則

$$\epsilon_4 = \inf_{P \in \mathbb{P}_B^*} d(P, f(P)) = \inf_{P \in \mathbb{P}_A^*} d(P, g(P))$$

證明. 對於所有的$P \in \mathbb{P}_B^*$，存在$\boldsymbol{\tau}$使得$P = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$且$AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$，則$f(P) = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta})$，其中$\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{1}'P = \boldsymbol{\tau}'B$。因此$g(f(P)) = diag(\boldsymbol{\tau}^*) \cdot B$，其中$\boldsymbol{\tau}^* =$

$f(P)\mathbf{1} = A\boldsymbol{\eta} = AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$，可得$P = g(f(P))$。故我們得到

$$\inf_{P\in\mathbb{P}_B^*} d(P, f(P)) = \inf_{P\in\mathbb{P}_B^*} d(f(P), g(f(P))) \geq \inf_{P\in\mathbb{P}_A^*} d(P, g(P))$$

同理，$\inf_{P\in\mathbb{P}_B^*} d(P, f(P)) \leq \inf_{P\in\mathbb{P}_A^*} d(P, g(P))$，因此

$$\inf_{P\in\mathbb{P}_B^*} d(P, f(P)) = \inf_{P\in\mathbb{P}_A^*} d(P, g(P))$$

□

由定義可知，$\epsilon_4$爲滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$所產生的$P^{(1)} = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$和$P^{(2)} = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta})$間的距離的最小值。若$A$和$B$不可約化，則$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$只有一組，$\epsilon_4$即爲此組$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$所產生的$P^{(1)}, P^{(2)}$間的距離。若$A$和$B$可約化，下面定理幫助我們求出$\epsilon_4$以及對應的$P^{(1)}, P^{(2)}$，這組$P^{(1)}, P^{(2)}$將應用在下一章求最近似聯合分配。

**定理 3.12.** 給定$\delta_i > 0$，設$0 \leq s_i \leq 1, 1 \leq i \leq N, \sum_i s_i = 1$，則

$$\inf_{\sum s_i=1} \sup\{\delta_1 s_1, \cdots, \delta_N s_N\} = \frac{1}{\sum_i \delta_i^{-1}}, \text{且} s_i = \frac{\delta_i^{-1}}{\sum_k \delta_k^{-1}}, \forall i$$

證明. 若$\sup\{\delta_1 s_1, \cdots, \delta_N s_N\} < \frac{1}{\sum_i \delta_i^{-1}}$，則$s_i < \frac{\delta_i^{-1}}{\sum_k \delta_k^{-1}}, \forall i$，可得$\sum_i s_i < 1$，和條件不符，所以$\sup\{\delta_1 s_1, \cdots, \delta_N s_N\} \geq \frac{1}{\sum_i \delta_i^{-1}}$。

令$s_i = \frac{\delta_i^{-1}}{\sum_k \delta_k^{-1}}, \forall i$，則$\delta_i s_i = \frac{1}{\sum_k \delta_k^{-1}}, \forall i$，可得$\sup\{\delta_1 s_1, \cdots, \delta_N s_N\} = \frac{1}{\sum_i \delta_i^{-1}}$，因此$\inf_{\sum s_i=1} \sup\{\delta_1 s_1, \cdots, \delta_N s_N\} = \frac{1}{\sum_i \delta_i^{-1}}$。 □

由於將條件機率矩陣轉換爲$IBD$矩陣的形式不會改變不相容程度的測量值，故下面定理假設$A$和$B$爲$IBD$矩陣。

**定理 3.13.** 設條件機率矩陣$A=\mathrm{Diag}(A_1,\cdots,A_M)$和$B=\mathrm{Diag}(B_1,\cdots,B_M)$。令$A_mB_m'$和$B_m'A_m$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量分別爲$\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_m(1\le m\le M)$，特徵向量法所得$A_m,B_m$不相容程度測量值爲$\delta_m$，則特徵向量法所得$A,B$不相容程度測量值爲$\dfrac{1}{\sum_m \delta_m^{-1}}$，且存在$\hat{\boldsymbol{\tau}}'=(\hat{s}_1\boldsymbol{u}_1',\cdots,\hat{s}_M\boldsymbol{u}_M')$，其中$\hat{s}_m=\dfrac{\delta_m^{-1}}{\sum_k \delta_k^{-1}},\forall m$，使得$P=diag(\hat{\boldsymbol{\tau}})\cdot B, d(P,f(P))=\dfrac{1}{\sum_m \delta_m^{-1}}$。

證明. 根據定理 3.7，滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$爲

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{u}_1\\ s_2\boldsymbol{u}_2\\ \vdots\\ s_M\boldsymbol{u}_M\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} s_1\boldsymbol{v}_1\\ s_2\boldsymbol{v}_2\\ \vdots\\ s_M\boldsymbol{v}_M\end{pmatrix}$$

其中$s_m>0(1\le m\le M),\sum_m s_m=1$。由於$\epsilon_4$爲滿足 (2)式的$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta}$所產生的$P^{(1)}=diag(\boldsymbol{\tau})\cdot B$和$P^{(2)}=A\cdot diag(\boldsymbol{\eta})$間的距離的最小值，故$\epsilon_4=\inf_{\sum s_m=1}\sup\{\delta_1s_1,\cdots,\delta_Ms_M\}$。根據定理 3.12，$\epsilon_4=\dfrac{1}{\sum_m \delta_m^{-1}}$且$s_m=\dfrac{\delta_m^{-1}}{\sum_k \delta_k^{-1}},\forall m$。

□

由定理 3.13可知，當$\delta_1s_1=\cdots=\delta_Ms_M$時，$\sup\{\delta_1s_1,\cdots,\delta_Ms_M\}$有最小值，故$s_m$和$\delta_m$成反比關係。

**定理 3.14.** 設測度(一)、(二)和(三)的不相容程度測量值分別爲$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$，特徵向量法的不相容程度測量值爲$\epsilon_4$，則$\epsilon_1\ge\dfrac{1}{2}\epsilon_2$且$\epsilon_2\le\epsilon_3\le\epsilon_4$。

證明.

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_1 = \inf_{P\in\mathbb{P}} \sup\{d(P, f(P)), d(P, g(P))\} \\
\Rightarrow &\forall \mu > 0, \exists \hat{P} \in \mathbb{P}\text{使得}\epsilon_1 + \mu > \sup\{d(\hat{P}, f(\hat{P})), d(\hat{P}, g(\hat{P}))\} \\
\Rightarrow &\epsilon_1 + \mu > d(\hat{P}, f(\hat{P})) \\
&\epsilon_1 + \mu > d(\hat{P}, g(\hat{P})) \\
\Rightarrow &2\epsilon_1 + 2\mu > d(\hat{P}, f(\hat{P})) + d(\hat{P}, g(\hat{P})) \geq d(f(\hat{P}), g(\hat{P})) \geq \epsilon_2 \\
\Rightarrow &\epsilon_1 \geq \frac{1}{2}\epsilon_2
\end{aligned}
$$

因爲$\mathbb{P}_A$和$\mathbb{P}_B$有最短距離，我們可找到$\hat{P}_A \in \mathbb{P}_A, \hat{P}_B \in \mathbb{P}_B$使得

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_2 = d(\hat{P}_A, \hat{P}_B) \\
\Rightarrow &\forall P \in \mathbb{P}_B, d(\hat{P}_A, \hat{P}_B) \leq d(P, f(P)) \\
\Rightarrow &\epsilon_2 \leq \inf_{P\in\mathbb{P}_B} d(P, f(P)) = \epsilon_3
\end{aligned}
$$

因爲$\mathbb{P}_B^* \subseteq \mathbb{P}_B$，範圍變小則最小值變大，所以$\epsilon_3 \leq \epsilon_4$。 □

以下例子說明了如何利用特徵向量法求得$A$和$B$不相容程度的測量值。

**例 6.** 考慮例 2的條件機率矩陣$A$和$B$，則

$$
AB' = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{21}{100} & \frac{49}{200} \\ \frac{9}{40} & \frac{61}{100} & \frac{33}{100} \\ \frac{37}{80} & \frac{9}{50} & \frac{17}{40} \end{pmatrix}, \quad B'A = \begin{pmatrix} \frac{117}{200} & \frac{11}{80} & \frac{111}{200} & \frac{9}{40} \\ \frac{3}{50} & \frac{11}{80} & \frac{3}{100} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{40} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{51}{200} & \frac{1}{2} & \frac{51}{200} & \frac{93}{200} \end{pmatrix}
$$

解$AB'\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}$和$B'A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}$，可得$\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}\frac{2198}{8903}\\ \frac{3760}{8903}\\ \frac{2945}{8903}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\frac{7328}{17806}\\ \frac{1688}{17806}\\ \frac{2519}{17806}\\ \frac{6271}{17806}\end{pmatrix}$。

$$\text{因此}P^{(1)}=diag(\boldsymbol{\tau})\cdot B=\begin{pmatrix}0.062 & 0.062 & 0 & 0.124\\ 0.317 & 0 & 0.042 & 0.063\\ 0.033 & 0.033 & 0.099 & 0.165\end{pmatrix}$$

$$P^{(2)}=A\cdot diag(\boldsymbol{\eta})=\begin{pmatrix}0.083 & 0.024 & 0 & 0.141\\ 0.288 & 0 & 0.099 & 0.035\\ 0.041 & 0.071 & 0.042 & 0.176\end{pmatrix}$$

因爲$P^{(1)}-P^{(2)}=\begin{pmatrix}-0.021 & 0.038 & 0 & -0.017\\ 0.029 & 0 & \mathbf{-0.057} & 0.028\\ -0.008 & -0.038 & \mathbf{0.057} & -0.011\end{pmatrix}$，所以根據特徵向量法不相容程度測量值的定義，$\epsilon=0.057$

我們將例 2中Arnold et al. (2002)的結果加上特徵向量法的結果列成表 5，測度(四)爲特徵向量法。

國立政治大學 National Chengchi University

表 5: 例 2中$A$和$B$在各測度下的不相容程度測量值

| 測度 | $\epsilon$ | $\boldsymbol{\tau}$ | $\boldsymbol{\eta}$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|
| (一) | 0.021 | $\begin{pmatrix} 0.243 \\ 0.486 \\ 0.271 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.490 \\ 0.074 \\ 0.130 \\ 0.306 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.082 & 0.039 & 0.000 & 0.122 \\ 0.364 & 0.000 & 0.070 & 0.052 \\ 0.044 & 0.035 & 0.060 & 0.132 \end{pmatrix}$ |
| (二) | 0.041 | $\begin{pmatrix} 0.252 \\ 0.485 \\ 0.263 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.462 \\ 0.089 \\ 0.127 \\ 0.322 \end{pmatrix}$ | — |
| (三) | 0.042 | $\begin{pmatrix} 0.260 \\ 0.472 \\ 0.268 \end{pmatrix}$ | — | — |
| (四) | 0.057 | $\begin{pmatrix} 0.247 \\ 0.422 \\ 0.331 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.095 \\ 0.141 \\ 0.352 \end{pmatrix}$ | — |

國立政治大學 National Chengchi University

# 4 求最近似的聯合機率分配

當條件機率矩陣$A$和$B$不相容時，前一章介紹了各種不相容程度的測量方式，並找出各測度下不同的$P^{(1)}$和$P^{(2)}$使其距離爲不相容程度的測量值，Arnold et al. (2002)以$P^{(1)}$和$P^{(2)}$連線的中點作爲最近似聯合分配。本章將進一步訂定評量近似聯合分配優劣的標準並在各測度下從$P^{(1)}$和$P^{(2)}$的凸組合(convex combination)中選出最近似的聯合分配。

## 4.1 評量近似聯合分配的標準

爲了選出最近似聯合分配，必須制定評量近似聯合分配優劣的標準，我們首先考慮到的是條件機率矩陣的誤差。根據定理 2.1，若條件機率矩陣$A = (a_{ij})$和$B = (b_{ij})$相容，則存在聯合分配$P = (p_{ij})$使得

$$a_{ij} = p_{ij}/p_{.j}, \quad b_{ij} = p_{ij}/p_{i.}, \quad \forall i, j$$

所以當$A$和$B$不相容時，我們將求出的近似聯合分配$P = (p_{ij})$所決定的條件機率矩陣和$A, B$之間的差距作爲條件機率矩陣的誤差，即

$$e_1 = \sum_i \sum_j (a_{ij} - \frac{p_{ij}}{p_{.j}})^2 + \sum_i \sum_j (b_{ij} - \frac{p_{ij}}{p_{i.}})^2$$

但是若只有考慮條件機率矩陣的誤差是不夠的，我們認爲邊際分配的誤差也非常重要且必須考慮進去。根據第三章的說明，若$A$和$B$相容，則聯合分配所決定的邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足

$$AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}, \quad B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$$

所以我們以近似聯合分配所決定的邊際分配$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$和$AB'\boldsymbol{\tau}, B'A\boldsymbol{\eta}$間的差距作爲邊際分配的誤差，即

$$e_2 = \sum_i ((AB'\boldsymbol{\tau})_i - \boldsymbol{\tau}_i)^2 + \sum_j ((B'A\boldsymbol{\eta})_j - \boldsymbol{\eta}_j)^2$$

其中$(AB'\boldsymbol{\tau})_i$爲$AB'\boldsymbol{\tau}$的第$i$個分量，$(B'A\boldsymbol{\eta})_j$爲$B'A\boldsymbol{\eta}$的第$j$個分量。

在考慮評量近似聯合分配優劣的標準時，我們認爲條件機率矩陣的誤差和邊際分配的誤差必須同時考慮。因此訂定了評量近似聯合分配的標準如下

$$\begin{aligned} e =& e_1 + e_2 \\ =& \sum_i \sum_j (a_{ij} - \frac{p_{ij}}{p_{.j}})^2 + \sum_i \sum_j (b_{ij} - \frac{p_{ij}}{p_{i.}})^2 \\ &+ \sum_i ((AB'\boldsymbol{\tau})_i - \boldsymbol{\tau}_i)^2 + \sum_j ((B'A\boldsymbol{\eta})_j - \boldsymbol{\eta}_j)^2 \end{aligned}$$

## 4.2 各種不相容測度下之最近似聯合分配

本節將依前一節所制定的評量標準，在各種不相容測度下說明如何從$P^{(1)}$和$P^{(2)}$的凸組合中求取最近似的聯合分配。由於在測度(一)下可使用數學軟體直接求出最近似聯合分配，因此我們從測度(二)開始討論。

**測度(二)** 根據 2.3節，由數學軟體所得$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$可得$P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)}) = (b_{ij}\tau_i), P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = (a_{ij}\eta_j)$。令$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 \le \lambda \le 1$，求$\lambda = \hat{\lambda}$使$e$爲最小，則$\hat{P} = \hat{\lambda}P^{(1)} + (1-\hat{\lambda})P^{(2)}$爲最近似的聯合分配。

**測度(三)** 根據 2.3節，由數學軟體所得$\boldsymbol{\tau}$可得$P^{(1)} = (p_{ij}^{(1)}) = (b_{ij}\tau_i), P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = (a_{ij}\sum_k b_{kj}\tau_k)$。令$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 \le \lambda \le 1$，求$\lambda = \hat{\lambda}$使$e$爲最小，則$\hat{P} = \hat{\lambda}P^{(1)} + (1-\hat{\lambda})P^{(2)}$爲最近似的聯合分配。

**測度(四)** 根據 3.4節，定理 3.13所得$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta}$滿足$AB'\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}, B'A\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}$，由$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta}$可得$P^{(1)}=(p_{ij}^{(1)})=(b_{ij}\tau_i), P^{(2)}=(p_{ij}^{(2)})=(a_{ij}\eta_j)$。

$$\sum_j p_{ij}^{(1)}=\sum_j b_{ij}\tau_i=\tau_i\sum_j b_{ij}=\tau_i$$

$$\sum_i p_{ij}^{(2)}=\sum_i a_{ij}\eta_j=\eta_j\sum_i a_{ij}=\eta_j$$

由於特徵向量法所得之$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta}$滿足(2)式，所以

$$\tau_i=\sum_j a_{ij}\eta_j=\sum_j p_{ij}^{(2)},\ \eta_j=\sum_i b_{ij}\tau_i=\sum_i p_{ij}^{(1)}$$

令$P=\lambda P^{(1)}+(1-\lambda)P^{(2)}, 0\le\lambda\le 1$，可得

$$p_{i.}=\sum_j p_{ij}^{(2)}+\lambda\sum_j(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})=\tau_i$$

$$p_{.j}=\sum_i p_{ij}^{(2)}+\lambda\sum_i(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})=\eta_j$$

$$\text{故}a_{ij}-\frac{p_{ij}}{p_{.j}}=a_{ij}-\frac{p_{ij}^{(2)}+\lambda(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\eta_j}=\frac{-\lambda(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\eta_j}$$

$$b_{ij}\frac{p_{ij}}{p_{i.}}=b_{ij}-\frac{p_{ij}^{(2)}+\lambda(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\tau_i}=\frac{(1-\lambda)(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\tau_i}$$

因爲特徵向量法所得之$\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\eta}$滿足(3)式，所以

$$e_2=\sum_i((AB'\boldsymbol{\tau})_i-\boldsymbol{\tau}_i)^2+\sum_j((B'A\boldsymbol{\eta})_j-\boldsymbol{\eta}_j)^2=0$$

可得

$$\begin{aligned}
e&=\sum_i\sum_j(a_{ij}-\frac{p_{ij}}{p_{.j}})^2+\sum_i\sum_j(b_{ij}-\frac{p_{ij}}{p_{i.}})^2\\
&=\sum_i\sum_j\left[\frac{-\lambda(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\eta_j}\right]^2+\sum_i\sum_j\left[\frac{(1-\lambda)(p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)})}{\tau_i}\right]^2\\
&=\lambda^2\sum_i\sum_j\left(\frac{p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)}}{\eta_j}\right)^2+(1-\lambda)^2\sum_i\sum_j\left(\frac{p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)}}{\tau_i}\right)^2
\end{aligned}$$

令$u=\sum_i\sum_j\left(\frac{p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)}}{\eta_j}\right)^2, v=\sum_i\sum_j\left(\frac{p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)}}{\tau_i}\right)^2$，則

$$e=u\lambda^2+v(1-\lambda)^2$$
$$\frac{de}{d\lambda}=2u\lambda-2v(1-\lambda)=2(u+v)\lambda-2v$$

可得$\lambda=\frac{v}{u+v}=\hat{\lambda}$時，$e$有最小值$\frac{uv}{u+v}$，此時$\hat{P}=\hat{\lambda}P^{(1)}+(1-\hat{\lambda})P^{(2)}$爲最近似的聯合分配。。

由以上討論可知在其他測度下需依靠數學軟體(如GAMS)解線性規劃模型來得到最近似聯合分配，但特徵向量法可推導出公式，可簡單快速地得到最近似聯合分配。

## 4.3 實例說明與比較

本節將以實例說明在各測度下最近似聯合分配的求法並在第一節的評量標準下比較其優劣。

**例 7** (例 2續). 考慮例 2的條件機率矩陣$A$和$B$

**測度(一)** 由例 2所得之$P=\begin{pmatrix}0.082 & 0.039 & 0.000 & 0.122\\ 0.364 & 0.000 & 0.070 & 0.052\\ 0.044 & 0.035 & 0.060 & 0.132\end{pmatrix}$，可得$e_1=0.249, e_2=0.008, e=0.257$。

**測度(二)** 由例 2所得之

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.063 & 0.000 & 0.126 \\ 0.364 & 0.000 & 0.049 & 0.073 \\ 0.026 & 0.026 & 0.079 & 0.131 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.092 & 0.022 & 0.000 & 0.129 \\ 0.323 & 0.000 & 0.089 & 0.032 \\ 0.046 & 0.067 & 0.038 & 0.161 \end{pmatrix}$$

令$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 \le \lambda \le 1$，求$\lambda = \hat{\lambda}$使$e$爲最小，可得$\hat{\lambda} = 0.137, e_1 = 0.093, e_2 = 0.002, e = 0.095$，最近似的聯合分配爲

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.089 & 0.028 & 0 & 0.129 \\ 0.328 & 0 & 0.083 & 0.038 \\ 0.043 & 0.061 & 0.044 & 0.157 \end{pmatrix}$$

**測度(三)** 由例 2所得之

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.065 & 0.065 & 0.000 & 0.130 \\ 0.354 & 0.000 & 0.047 & 0.071 \\ 0.027 & 0.027 & 0.080 & 0.134 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.089 & 0.023 & 0.000 & 0.134 \\ 0.312 & 0.000 & 0.089 & 0.034 \\ 0.045 & 0.069 & 0.038 & 0.167 \end{pmatrix}$$

令$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 \le \lambda \le 1$，求$\lambda = \hat{\lambda}$使$e$爲最小，可得$\hat{\lambda} = 0.130, e_1 = 0.091, e_2 = 0.002, e = 0.093$，最近似的聯合分配爲

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.086 & 0.028 & 0 & 0.134 \\ 0.318 & 0 & 0.083 & 0.039 \\ 0.043 & 0.063 & 0.043 & 0.163 \end{pmatrix}$$

國立政治大學 National Chengchi University

**測度(四)** 由例 6所得之

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{2198}{8903} \\ \frac{3760}{8903} \\ \frac{2945}{8903} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{7328}{17806} \\ \frac{1688}{17806} \\ \frac{2519}{17806} \\ \frac{6271}{17806} \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.062 & 0.062 & 0 & 0.124 \\ 0.317 & 0 & 0.042 & 0.063 \\ 0.033 & 0.033 & 0.099 & 0.165 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.083 & 0.024 & 0 & 0.141 \\ 0.288 & 0 & 0.099 & 0.035 \\ 0.041 & 0.071 & 0.042 & 0.176 \end{pmatrix}$$

可得

$$u = \sum_i \sum_j \left( \frac{p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)}}{\eta_j} \right)^2 = 0.662$$

$$v = \sum_i \sum_j \left( \frac{p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)}}{\tau_i} \right)^2 = 0.107$$

$$\hat{\lambda} = \frac{v}{u+v} = 0.139$$

$$e = \frac{uv}{u+v} = 0.092$$

最近似的聯合分配爲

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.079 & 0.029 & 0 & 0.139 \\ 0.292 & 0 & 0.091 & 0.039 \\ 0.040 & 0.066 & 0.050 & 0.175 \end{pmatrix}$$

國立政治大學 National Chengchi University

我們將例 7的計算結果整理於表 6，並加上以GAMS求得使$e$最小的近似聯合分配。可以看出測度(一)的最近似聯合分配，不管是條件機率矩陣的誤差或邊際分配的誤差都較其他測度大很多。雖然特徵向量法的條件機率矩陣的誤差並非最小，但因爲可以確實將邊際分配的誤差降到0，整體來看爲誤差最小的方法。

由本章的說明可知，若以$e$爲評量最近似聯合分配的標準，特徵向量法可推導出最近似聯合分配的公式且所得之最近似聯合分配的誤差爲最小。

表 6: 各測度下條件/邊際分配的誤差以及最近似聯合分配

| 測度 | $e$ | $e_1$ | $e_2$ | $p_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| (一) | 0.257 | 0.249 | 0.008 | $\begin{pmatrix} 0.082 & 0.039 & 0 & 0.122 \\ 0.364 & 0 & 0.070 & 0.052 \\ 0.044 & 0.035 & 0.060 & 0.122 \end{pmatrix}$ |
| (二) | 0.095 | 0.093 | 0.002 | $\begin{pmatrix} 0.089 & 0.028 & 0 & 0.129 \\ 0.328 & 0 & 0.083 & 0.038 \\ 0.043 & 0.061 & 0.044 & 0.157 \end{pmatrix}$ |
| (三) | 0.093 | 0.091 | 0.002 | $\begin{pmatrix} 0.086 & 0.028 & 0 & 0.134 \\ 0.318 & 0 & 0.083 & 0.039 \\ 0.043 & 0.063 & 0.043 & 0.163 \end{pmatrix}$ |
| (四) | 0.092 | 0.092 | 0 | $\begin{pmatrix} 0.079 & 0.029 & 0 & 0.139 \\ 0.292 & 0 & 0.091 & 0.039 \\ 0.040 & 0.066 & 0.050 & 0.175 \end{pmatrix}$ |
| GAMS | 0.088 | 0.086 | 0.002 | $\begin{pmatrix} 0.072 & 0.028 & 0.001 & 0.124 \\ 0.322 & 0 & 0.091 & 0.041 \\ 0.041 & 0.066 & 0.050 & 0.164 \end{pmatrix}$ |

國立政治大學 National Chengchi University

# 5 在賽局問題上的應用

本章嘗試將前面的研究結果應用到解賽局問題上，所提到的名詞及作業研究的賽局解法主要參考姚景星和劉睦雄(1994)編著：作業研究應用篇。

## 5.1 賽局的介紹

考慮兩人零和有限賽局，令玩家爲甲、乙兩人，甲可採取的策略爲$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_I\}$，乙可採取的策略爲$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_J\}$，償付值表爲$M$。當甲採取策略$x_i$，乙採取策略$y_j$時，雙方輸贏的金額爲$M(x_i, y_j)$元。此金額可由償付值表決定，若$M(x_i, y_j)$爲正，表示甲贏乙；若$M(x_i, y_j)$爲負，表示甲輸乙；若$M(x_i, y_j)$爲零，表示雙方平手。我們以$G = (X, Y, M)$表示此兩人零和有限賽局。

**定義 5.1.** 若$\max_i \min_j M(x_i, y_j) = \min_j \max_i M(x_i, y_j) = S_G$時，則稱$S_G$爲賽局$G$之單純解。

若甲採取策略$x^*$滿足$\min_j M(x^*, y_j) = S_G$，則$x^*$爲甲的最佳策略。

若乙採取策略$y^*$滿足$\max_i M(x_i, y^*) = S_G$，則$y^*$爲乙的最佳策略。

接著我們看個實際例子：

**例 8.** 考慮兩人零和有限賽局：

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $-3$ | 3 | 8 |
| $x_2$ | 4 | 5 | 7 |
| $x_3$ | 3 | $-3$ | $-5$ |

根據定義 5.1，

$$\max_i \min_j M(x_i, y_j) = \min_j \max_i M(x_i, y_j) = M(x_2, y_1) = 4 = S_G$$

故此賽局之單純解$S_G = 4$，甲的最佳策略爲$x_2$，乙的最佳策略爲$y_1$，也就是4在$x_2$方向爲最小值，在$y_1$方向爲最大值，故此點稱爲鞍點，誰離開此點將使損失擴大。

若賽局無法得到單純解，則需要將其延伸：

**定義 5.2.** 令賽局$G = (X, Y, M)$，$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$分別爲$X$和$Y$的邊際分配，則甲的所得期望值爲

$$M(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_i \sum_j \tau_i M(x_i, y_j) \eta_j$$

由此可得$G$的混合延伸賽局爲$\Gamma = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}, M)$。

若$\min_{\boldsymbol{\eta}} \max_{\boldsymbol{\tau}} M(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = \max_{\boldsymbol{\tau}} \min_{\boldsymbol{\eta}} M(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = S_\Gamma$，稱$S_\Gamma$爲賽局$\Gamma$的解，也就是賽局$G$的解。

若甲採取混合策略$\boldsymbol{\tau}^*$滿足$\min_{\boldsymbol{\eta}} M(\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\eta}) = S_\Gamma$，則$\boldsymbol{\tau}^*$爲甲的最佳混合策略。

若乙採取混合策略$\boldsymbol{\eta}^*$滿足$\max_{\boldsymbol{\tau}} M(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}^*) = S_\Gamma$，則$\boldsymbol{\eta}^*$爲乙的最佳混合策略。

**引理 5.1.** 令$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$爲邊際分配，則

(1) $\forall \boldsymbol{\tau}, M(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}^*) \leq S_\Gamma$

(2) $\forall \boldsymbol{\eta}, M(\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\eta}) \geq S_\Gamma$

**引理 5.2.** 令$\boldsymbol{\tau}^*$和$\boldsymbol{\eta}^*$爲雙方的最佳混合策略，$\boldsymbol{\tau}^*(x_i)$爲甲採取策略$x_i$的機率，$\boldsymbol{\eta}^*(y_j)$爲乙採取策略$y_j$的機率，則下列結果成立。

(1) 若$\boldsymbol{\tau}^*(x_i) > 0$，則$M(x_i, \boldsymbol{\eta}^*) = \sum_j M(x_i, y_j)\boldsymbol{\eta}^*(y_j) = S_\Gamma$。

(2) 若$\boldsymbol{\eta}^*(y_j) > 0$，則$M(\boldsymbol{\tau}^*, y_j) = \sum_i \boldsymbol{\tau}^*(x_i)M(x_i, y_j) = S_\Gamma$。

**引理 5.3.** 令賽局$G_1 = (X, Y, M_1), G_2 = (X, Y, M_2)$，賽局解分別爲$S_{\Gamma_1}, S_{\Gamma_2}$，其中$M_2(x, y) = M_1(x, y) + a$，則在賽局$G_1, G_2$中甲和乙的最佳混合策略均一致爲$\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\eta}^*$，且$S_{\Gamma_2} = S_{\Gamma_1} + a$。

一般混合賽局的解法有圖解法、解聯立方程式法和線性規劃法，接著以實例分別說明如下：

**例 9.** 考慮以下兩人零和有限賽局：

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 8 | 2 | 3 |
| $x_2$ | 3 | 6 | 4 |
| $x_3$ | 5 | 2 | 7 |

因爲$\max_x \min_y M(x, y) = 3 \neq 6 = \min_y \max_x M(x, y)$，所以此賽局無單純解，需將其延伸爲混合賽局求解。

**(圖解法)** 由引理 5.1可得

$$\begin{cases} 8\eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 \leq S_\Gamma \\ 3\eta_1 + 6\eta_2 + 4\eta_3 \leq S_\Gamma \\ 5\eta_1 + 2\eta_2 + 7\eta_3 \leq S_\Gamma \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \eta_j \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 8\tau_1 + 3\tau_2 + 5\tau_3 \geq S_\Gamma \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 2\tau_3 \geq S_\Gamma \\ 3\tau_1 + 4\tau_2 + 7\tau_3 \geq S_\Gamma \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1, \tau_i \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

若甲或乙可採取的策略爲兩個以下即可以圖解法解(4)或(5)的限制式得賽局的解，但是此例的變數過多無法使用圖解法，需以其他方法解之。

**(解聯立方程式法)** 由引理 5.2可得

$$\begin{cases} 8\eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 = S_\Gamma \\ 3\eta_1 + 6\eta_2 + 4\eta_3 = S_\Gamma \\ 5\eta_1 + 2\eta_2 + 7\eta_3 = S_\Gamma \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \eta_j \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 8\tau_1 + 3\tau_2 + 5\tau_3 = S_\Gamma \\ 2\tau_1 + 6\tau_2 + 2\tau_3 = S_\Gamma \\ 3\tau_1 + 4\tau_2 + 7\tau_3 = S_\Gamma \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1, \tau_i \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

解(6)及(7)的聯立方程式可得雙方的最佳混合策略$\boldsymbol{\tau}^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \boldsymbol{\eta}^* = \left(\frac{16}{45}, \frac{17}{45}, \frac{4}{15}\right)$，賽局的解$S_\Gamma = \frac{22}{5}$。

注意：若聯立方程式無共同解，表示雙方的最佳混合策略中有元素爲0，需以其他方法解之。

**線性規劃法** 考慮(5)的限制式，令$\theta_i = \frac{\tau_i}{S_\Gamma}$，因爲$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$，所以$\theta_1 + \theta_2 +$

$\theta_3 = \dfrac{1}{S_\Gamma}$，選擇甲的混合策略$\boldsymbol{\tau}$使$S_\Gamma$爲最大，可得以下線性規劃模型。

$$\begin{cases} 8\theta_1 + 3\theta_2 + 5\theta_3 \geq 1 \\ 2\theta_1 + 6\theta_2 + 2\theta_3 \geq 1 \\ 3\theta_1 + 4\theta_2 + 7\theta_3 \geq 1 \\ \theta_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{8}$$

在(8)的限制條件下，求$\theta_1, \theta_2, \theta_3$使$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$爲最小。同理，考慮(4)的限制式，令$\phi_j = \dfrac{\eta_i}{S_\Gamma}$，因爲$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1$，所以$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \dfrac{1}{S_\Gamma}$，選擇乙的混合策略$\boldsymbol{\eta}$使$S_\Gamma$爲最小，可得以下線性規劃模型。

$$\begin{cases} 8\phi_1 + 2\phi_2 + 3\phi_3 \leq 1 \\ 3\phi_1 + 6\phi_2 + 4\phi_3 \leq 1 \\ 5\phi_1 + 2\phi_2 + 7\phi_3 \leq 1 \\ \phi_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{9}$$

在(9)的限制條件下，求$\phi_1, \phi_2, \phi_3$使$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$爲最大。上述兩線性規劃模型成爲對偶問題，所以$\theta$在限制式(8)下的最小值和$\phi$在限制式(9)下的最大值相等。解線性規劃模型可得$\theta_1 = \dfrac{1}{22}, \theta_2 = \dfrac{3}{22}, \theta_3 = \dfrac{1}{22}, \phi_1 = \dfrac{8}{99}, \phi_2 = \dfrac{17}{198}, \phi_3 = \dfrac{2}{33}, \dfrac{1}{S_\Gamma} = \dfrac{5}{22}$。因此雙方的最佳混合策略$\boldsymbol{\tau}^* = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right), \boldsymbol{\eta}^* = \left(\dfrac{16}{45}, \dfrac{17}{45}, \dfrac{4}{15}\right)$，賽局的解$S_\Gamma = \dfrac{22}{5}$。此結果與利用解聯立方程式所得一致。

注意：由於本例的$M(x_i, y_j) > 0, \forall i, j$，可確定賽局解$S_\Gamma$爲正。若無法確定時，可令$M_2(x_i, y_j) = M(x_i, y_j) + a$使$M_2(x_i, y_j) > 0, \forall i, j$，如此可確定$M_2$的賽局解$S_{\Gamma_2}$爲正，且$S_{\Gamma_2} = S_\Gamma + a$。

## 5.2 條件矩陣的廣義相容性

如上一節所述，作業研究的賽局解法是將雙方採取的策略視爲獨立事件，也就是雙方決策時不會受到對方決策的影響，但是實際上雙方可依據償付值表及對方的決策來選擇可獲得最大利益的策略。以例8而言，若乙採取策略$y_1$，則甲必然採用策略$x_2$使獲益最大；同理，若甲採取策略$x_1$，則乙必然採用策略$y_1$使損失最小。以此類推，我們可將雙方採取的策略寫成條件機率矩陣$A$和$B$如下，其中$A$爲乙採取某一策略下，甲採取之對應策略、$B$爲甲採取某一策略下，乙採取之對應策略。如此我們就可以將此賽局問題轉換爲一條件機率矩陣的相容性問題來討論其解。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

作業研究的賽局解法是將雙方決策視爲獨立，因此求出雙方決策的邊際分配即可得到賽局解。我們將雙方決策視爲不獨立，因此需求出雙方決策的聯合分配。根據觀察，由賽局決定的條件機率矩陣多爲$N^A \neq N^B$，若按照第二章相容的定義，則由賽局決定的條件機率矩陣多爲不相容。因此本節我們將介紹廣義相容的概念，若條件矩陣爲廣義相容，取其聯合分配所得之期望值爲賽局解，否則取其最近似聯合分配之期望值爲賽局解。

**定義 5.3.** 令$A$和$B$爲條件機率矩陣，若存在矩陣$P = (p_{ij})$滿足

$$\frac{p_{ij}}{p_{.j}} = a_{ij}, \quad \frac{p_{ij}}{p_{i.}} = b_{ij}, \quad \forall i, j$$

其中 $p_{ij} \geq 0, \sum_i \sum_j p_{ij} = 1, p_{i.} = \sum_j p_{ij}, \quad p_{.j} = \sum_i p_{ij}$，則稱A和B廣義相容。若存在$i^*, j^*$使得$p_{i^*.} = p_{.j^*} = 0$，則$\frac{p_{ij^*}}{p_{.j^*}}, \frac{p_{i^*j}}{p_{i^*.}}$可定義爲任意值。

注意：定義 5.3和定義 2.1的差別在於我們允許聯合分配決定的邊際分配存在機率爲0的情形，並忽略聯合分配決定的條件機率矩陣中$\frac{0}{0}$的元素是否會等於$A$或$B$的元素，即使$N^A \neq N^B$，仍然視爲廣義相容。根據定義 5.3，可得以下定理。

**定理 5.1.** 令$A$和$B$爲條件機率矩陣，則$A$和$B$爲廣義相容的充要條件爲存在邊際分配$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} \geq 0$，使得$a_{ij}\eta_j = b_{ij}\tau_i, \forall i, j$。

證明. 令$X' = \{x_i | \boldsymbol{\tau}(x_i) > 0\}, Y' = \{y_j | \boldsymbol{\eta}(y_j) > 0\}$，且$p_{ij} = a_{ij}\eta_j = b_{ij}\tau_i, \forall i, j$，則

$$p_{i.} = \sum_j p_{ij} = \sum_j b_{ij}\tau_i = \tau_i, \forall i$$

$$p_{.j} = \sum_i p_{ij} = \sum_i a_{ij}\eta_j = \eta_j, \forall j$$

所以隨機矩陣$P = (p_{ij})$滿足

$$\frac{p_{ij}}{p_{.j}} = \frac{p_{ij}}{\eta_j} = a_{ij}, \quad \frac{p_{ij}}{p_{i.}} = \frac{p_{ij}}{\tau_i} = b_{ij}, \quad \forall x_i \in X', \forall y_j \in Y'$$

當$x_i \notin X'$或$y_j \notin Y'$時，定義$\frac{p_{ij}}{p_{i.}} = b_{ij}, \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = a_{ij}$，因此$A$和$B$爲廣義相容。 □

以下定理可幫助我們判斷條件機率矩陣是否廣義相容。

**定理 5.2.** 令$A$和$B$爲條件機率矩陣，若$A$和$B$廣義相容，$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}$爲邊際分配，則下列結果恆成立。

(a) 若存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} = 0$且$b_{i^*j^*} > 0$，則$\tau_{i^*} = 0$。

(b) 若存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} > 0$且$b_{i^*j^*} = 0$，則$\eta_{j^*} = 0$。

(c) 存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} > 0$且$b_{i^*j^*} > 0$。

證明. 因爲$A$和$B$爲廣義相容，其邊際分配爲$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} \geq 0$，滿足$a_{ij}\eta_j = b_{ij}\tau_i, \forall i, j$。

(a) 因爲$b_{i^*j^*}\tau_{i^*} = a_{i^*j^*}\eta_{j^*} = 0$且$b_{i^*j^*} > 0$，所以$\tau_{i^*} = 0$。同理可得(b)。

(c) 若不存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} > 0$且$b_{i^*j^*} > 0$。因爲$A$的每一行之和爲1，所以對於所有$j$，必存在$i'$使得$a_{i'j} > 0$，根據假設可得$b_{i'j} = 0$。又根據(b)可得$\eta_j = 0, \forall j$，這和$\boldsymbol{\eta}$爲邊際分配的假設矛盾，因此必存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} > 0$且$b_{i^*j^*} > 0$。

□

以下定理可以幫助我們了解相容性和廣義相容性的關係。

**定理 5.3.** 令$A$和$B$爲不可約化的條件機率矩陣且$N^A = N^B$，若$A$和$B$不相容。則$A$和$B$也不廣義相容。

證明. 若$A$和$B$不相容但廣義相容，則邊際分配必存在元素爲0。根據定理 3.6，若$A$和$B$爲不可約化的條件機率矩陣且$N^A = N^B$，則滿足$a_{ij}\eta_j = b_{ij}\tau_i$的邊際分配$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$必爲正向量。因此若$A$和$B$不相容，則$A$和$B$也不爲廣義相容。 □

由於對條件機率矩陣$A$和$B$作相同的列或行互換不會影響其相容性，下面定理假設$A$和$B$爲$IBD$矩陣的形式。

**定理 5.4.** 令條件機率矩陣$A$和$B$爲可約化且$N^A = N^B$，其中$A = \text{Diag}(A_1, \cdots, A_M)$，$B = \text{Diag}(B_1, \cdots, B_M)$。$A_m B'_m$和$B'_m A_m$對應特徵值1且長度爲1的特徵向量分別爲$\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_m$，則$A$和$B$廣義相容的充要條件爲對於某些$m(1 \leq m \leq M)$，$A_m$和$B_m(1 \leq m \leq M)$相容，亦即$A_m \cdot diag(\boldsymbol{v}_m) = diag(\boldsymbol{u}_m) \cdot B$。

證明. 令$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}'_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}'_M)', \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}'_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}'_M)'$，其中

$$\boldsymbol{\tau}_m = \begin{cases} \boldsymbol{u}_m & \text{若 } A_m \cdot diag(\boldsymbol{v}_m) = diag(\boldsymbol{u}_m) \cdot B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\eta}_m = \begin{cases} \boldsymbol{v}_m & \text{若 } A_m \cdot diag(\boldsymbol{v}_m) = diag(\boldsymbol{u}_m) \cdot B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|}, \hat{\boldsymbol{\eta}} = \dfrac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$，則$\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}$爲邊際分配使得$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$，所以$A$和$B$爲廣義相容。 □

最後，我們以Arnold et al. (2002)的一個例子來說明廣義相容性。

**例 10.** 考慮條件機率矩陣$A$和$B$：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因爲$N^A \neq N^B$，所以$A$和$B$不相容。考慮邊際分配$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} = \left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)'$，則$a_{ij}\eta_j = b_{ij}\tau_i, \forall i, j$，所以$A$和$B$爲廣義相容。

## 5.3 廣義相容與賽局解的關係

有了廣義相容的概念後，我們可以重新定義賽局的單純解及混合解，本節討論賽局有單純解的情形。

**定義 5.4.** 設$A$和$B$爲賽局$G=(X,Y,M)$決定的條件機率矩陣，若$A$和$B$爲廣義相容且聯合分配是唯一的，並存在唯一的$i^*,j^*$使得聯合分配$P=(p_{ij})$滿足

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & 若\ i=i^*,j=j^* \\ 0 & 其他\end{cases}$$

則我們稱此賽局$G$有單純解$S_G=M(x_{i^*},y_{j^*})$。

我們將賽局決定的條件機率矩陣$A$和$B$分成三種情形討論：$A$和$B$的元素皆爲1的位置只有一個，皆爲1的位置不只一個和沒有皆爲1的位置。

**定理 5.5.** 設$A$和$B$爲賽局$G=(X,Y,M)$寫成的條件機率矩陣，若存在唯一的$i^*,j^*$使得$a_{i^*j^*}=b_{i^*j^*}=1$，則此賽局$G$有單純解$S_G=M(x_{i^*},y_{j^*})$。

證明. 令$X$和$Y$的邊際分配爲$\boldsymbol{\tau}^*=(\tau_i)$和$\boldsymbol{\eta}^*=(\eta_j)$，其中

$$\tau_i=\begin{cases}1 & 若\ i=i^* \\ 0 & 其他\end{cases},\quad \eta_i=\begin{cases}1 & 若\ j=j^* \\ 0 & 其他\end{cases}$$

可得$A\cdot diag(\boldsymbol{\eta}^*)=diag(\boldsymbol{\tau}^*)\cdot B$，因此$A$和$B$爲廣義相容且聯合分配爲$P^*=(p_{ij})$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & 若\ i=i^*,j=j^* \\ 0 & 其他\end{cases}$$

令$\hat{P}=(\hat{p}_{ij})$爲$A$和$B$的聯合分配，$\hat{\boldsymbol{\tau}}=(\hat{p}_{i.}),\hat{\boldsymbol{\eta}}=(\hat{p}_{.j})$爲邊際分配。對於所有$i\neq i^*$，存在$j_i$使得$b_{ij_i}=1,a_{ij_i}=0$，根據定理 5.2可得$\hat{p}_{i.}=0$，故$\hat{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}^*$。因此$\hat{P}=P^*$，$A$和$B$的聯合分配是唯一的，賽局$G$有單純解$S_G=M(x_{i^*},y_{j^*})$。

□

接著我們以實際例子說明賽局有單純解的情形：

**例 11.** 考慮例8的賽局，則

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因爲$a_{21} = b_{21} = 1$，根據定理 5.5，此賽局有單純解$S_G = M(x_2, y_1) = 4$。

以下定理說明相容性單純解和作業研究單純解的關係：

**定理 5.6.** 令兩人零合有限賽局$G = (X, Y, M)$，若作業研究單純解爲$V_G$，相容性單純解爲$S_G$，則$V_G = S_G$。

證明. 令$V_G = M(x_{i^*}, y_{j^*})$，則$V_G$在$x_{i^*}$方向爲最小值，$y_{j^*}$方向爲最大值，因此$a_{i^*j^*} = b_{i^*j^*} = 1$，根據定理 5.5，$S_G = M(x_{i^*}, y_{j^*}) = V_G$。 □

我們說明了當$A$和$B$的元素皆爲1的位置只有一個時，賽局會有單純解。下個定理將說明當$A$和$B$的元素皆爲1的位置有兩個的情形，皆爲1的位置有三個以上的情形可依此定理類推。

**定理 5.7.** 設$A$和$B$爲賽局$G = (X, Y, M)$寫成的條件機率矩陣。若存在$i_1, i_2, j_1, j_2$使得$a_{i_1j_1} = b_{i_1j_1} = a_{i_2j_2} = b_{i_2j_2} = 1$，則恆有以下性質：

(1) $M(x_{i_1}, y_{j_1}) = M(x_{i_1}, y_{j_2}) = M(x_{i_2}, y_{j_1}) = M(x_{i_2}, y_{j_2}) = m$。

(2) $A$和$B$廣義相容，且聯合分配$P = (p_{ij})$滿足

$$p_{ij} = \begin{cases} s & \text{若 } i = i_1, j = j_1 \\ 1 - s & \text{若 } i = i_2, j = j_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

證明. (1)

$$\because a_{i_1j_1}=1,\quad \therefore M(x_{i_1},y_{j_1})\geq M(x_{i_2},y_{j_1})$$
$$\because b_{i_1j_1}=1,\quad \therefore M(x_{i_1},y_{j_2})\geq M(x_{i_1},y_{j_1})$$
$$\because a_{i_2j_2}=1,\quad \therefore M(x_{i_2},y_{j_2})\geq M(x_{i_1},y_{j_2})$$
$$\because b_{i_2j_2}=1,\quad \therefore M(x_{i_2},y_{j_1})\geq M(x_{i_2},y_{j_2})$$

綜合以上，$M(x_{i_1},y_{j_1})\geq M(x_{i_2},y_{j_1})\geq M(x_{i_2},y_{j_2})\geq M(x_{i_1},y_{j_2})\geq M(x_{i_1},y_{j_1})$，因此$M(x_{i_1},y_{j_1})=M(x_{i_1},y_{j_2})=M(x_{i_2},y_{j_1})=M(x_{i_2},y_{j_2})$。

(2) 令$X$和$Y$的邊際分配爲$\boldsymbol{\tau}^*=(\tau_i)$和$\boldsymbol{\eta}^*=(\eta_j)$，其中

$$\tau_i=\begin{cases} s & \text{若 } i=i_1 \\ 1-s & \text{若 } i=i_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},\quad \eta_i=\begin{cases} s & \text{若 } j=j_1 \\ 1-s & \text{若 } j=j_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

可得$A\cdot diag(\boldsymbol{\eta}^*)=diag(\boldsymbol{\tau}^*)\cdot B$，因此$A$和$B$爲廣義相容且聯合分配爲$P^*=(p_{ij})$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases} s & \text{若 } i=i_1, j=j_1 \\ 1-s & \text{若 } i=i_2, j=j_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

□

根據定理 5.7，$A$和$B$廣義相容但聯合分配不是唯一的，因此賽局有混合解。然而不管$s$爲何，賽局解皆爲$m$。最後，我們看個特殊的賽局。

**例 12.** 考慮兩人零和有限賽局：

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $-4$ | $2$ | $7$ |
| $x_2$ | $5$ | $8$ | $6$ |
| $x_3$ | $5$ | $-2$ | $-8$ |

當乙選擇策略$y_1$時，因爲$M(x_2, y_1) = M(x_3, y_1) = 5$，甲可選擇策略$x_2$或$x_3$。但是$M(x_3, y_2) = -2 < 8 = M(x_2, y_2), M(x_3, y_3) = -8 < 6 = M(x_2, y_3)$，因此甲不會選擇策略$x_3$，此賽局決定的條件機率矩陣爲

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因爲$a_{21} = b_{21} = 1$，根據定理 5.5，此賽局有單純解$S_G = M(x_2, y_1) = 5$。

## 5.4 以特徵向量法求賽局混合解

本節討論賽局無單純解的情形，由於賽局決定的條件機率矩陣多爲不相容而不相容程度的測量值爲各測度下$P^{(1)}$和$P^{(2)}$間的距離，因此最近似的聯合分配應爲$P^{(1)}$和$P^{(2)}$連線上的一點。令最近似的聯合分配$P = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)}, 0 \leq \lambda \leq 1$，可得甲的所得期望值及變異數爲$\lambda$的函數。因爲我們希望賽局的解能被雙方接受，所以聯合分配要能盡量涵蓋雙方的決策，也就是變異數要取最大。首先，需要以下定理：

**定理 5.8.** 令$0 \leq a_i \leq 1, 1 \leq i \leq N, \sum_i a_i = 1$，則$\inf_{\sum a_i = 1} \sup\{a_1, \cdots, a_N\} = \frac{1}{N}$且$a_i = \frac{1}{N}, \forall i$。

證明. 若$\sup\{a_1,\cdots,a_N\} < \dfrac{1}{N}$，則$a_i < \dfrac{1}{N}, \forall i$，可得$\sum_i a_i < 1$，和條件不符，所以$\sup\{a_1,\cdots,a_N\} \geq \dfrac{1}{N}$。

令$a_i = \dfrac{1}{N}$，則$\sup\{a_1,\cdots,a_N\} = \dfrac{1}{N}$，因此$\inf_{\sum a_i=1} \sup\{a_1,\cdots,a_N\} = \dfrac{1}{N}$。 □

接著，我們以實際例子做說明。

**例 13.** 考慮例 9的兩人零和有限賽局，則此賽局決定的條件機率矩陣如下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由於不存在$(i^*, j^*)$使得$a_{i^*j^*} = b_{i^*j^*} = 1$，所以$A$和$B$不廣義相容。我們需求其最近似聯合分配，在不同測度下有不同的選擇方式，以下分別討論各測度的情形。

**測度(一)** 令雙方所採取策略的聯合分配爲$P = (p_{ij})$，則$\epsilon_1 = \inf_{P\in\mathbb{P}} \sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{13} + p_{23}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{31} + p_{33}\}$

$$\begin{aligned}
&\sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{13} + p_{23}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{31} + p_{33}\} \\
\geq &\sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{13} + p_{23}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{33}\} \\
\geq &\sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{13}, p_{33}\} \\
= &\sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{33}\} \\
\Rightarrow &\epsilon_1 \geq \inf\sup\{p_{21} + p_{31}, p_{12} + p_{32}, p_{11} + p_{13}, p_{22} + p_{23}, p_{33}\} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

令$p_{21}+p_{31} = p_{12}+p_{32} = p_{13}+p_{23} = p_{11}+p_{13} = p_{22}+p_{23} = p_{31}+p_{33} = \frac{1}{5}$，
則$\sup\{p_{21}+p_{31}, p_{12}+p_{32}, p_{13}+p_{23}, p_{11}+p_{13}, p_{22}+p_{23}, p_{31}+p_{33}\} = \frac{1}{5}$，

因此$\epsilon_1 = \dfrac{1}{5}$。

$$\Rightarrow p_{21}+p_{31},\, p_{12}+p_{32},\, p_{13}+p_{23},\, p_{11}+p_{13},\, p_{22}+p_{23},\, p_{31}+p_{33} \le \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+p_{31} \le 1, \quad 1+p_{13}+p_{23}+p_{31} \le \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow p_{31}=0, \quad p_{13}+p_{23} \le \frac{1}{5}$$

若$p_{21}, p_{33}, p_{11}+p_{13}, p_{22}+p_{23}, p_{12}+p_{32}$五項中任一項小於0.2，則$\sum_i \sum_j p_{ij} < 1$，與假設矛盾，因此五項皆爲0.2。

令$p_{13} = 0.2 - p_{11}, p_{23} = 0.2 - p_{22}, 0 \le p_{11}, p_{22} \le 0.2$，則玩家甲的所得期望值爲$E(m) = 5p_{11} + 2p_{22} + 3.8, E(m^2) = 55p_{11} + 20p_{22} + 17.4$

變異數爲$V(m) = 17p_{11} + 4.8p_{22} - 25p_{11}^2 - 4p_{22}^2 - 20p_{11}p_{22} + 2.96$

由於此函數在限制範圍中無臨界點，因此相對極值發生在端點，可得$p_{11} = 0.2, p_{22} = 0.1, E(m) = 5$

**測度(二)** 令$X$和$Y$的邊際分配爲$\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)$和$\boldsymbol{\eta} = (\eta_j)$，則$\epsilon_2 = \inf\limits_{\substack{\sum \tau_i = 1 \\ \sum \eta_j = 1}} \sup\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$，

根據定理 5.8， $\epsilon_2 = \dfrac{1}{3}$，且$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}'$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} & 0 \\ \frac{\lambda}{3} & \frac{1-\lambda}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{3} & \frac{1-\lambda}{3} \end{pmatrix}$$

玩家甲的所得期望值爲$E(m) = \dfrac{7}{3}\lambda + 7(1-\lambda) = 7 - \dfrac{14}{3}\lambda$,

$E(m^2) = \dfrac{17}{3}\lambda + \dfrac{149}{3}(1-\lambda) = \dfrac{149}{3} - 44\lambda$

變異數爲$V(m) = \dfrac{149}{3} - 44\lambda - (7 - \dfrac{14}{3}\lambda)^2 = -\dfrac{196}{9}\lambda^2 + \dfrac{64}{3}\lambda + \dfrac{2}{3}$

變異數要取最大，因此$\lambda = \dfrac{24}{49}, E(m) = \dfrac{33}{7}$

**測度(三)** 令$X$和$Y$的邊際分配爲$\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)$和$\boldsymbol{\eta} = (\eta_j)$，則$\eta_j = \sum_k b_{kj}\tau_k$，可得$\boldsymbol{\eta} = (\tau_2, \tau_1 + \tau_3, 0)'$，$\epsilon_3 = \inf_{\sum \tau_i = 1} \sup\{\tau_2, \tau_1 + \tau_3\}$。根據定理 5.8，$\epsilon_3 = \frac{1}{2}$且$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}'$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{1-\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

玩家甲的所得期望值爲$E(m) = \frac{5}{2}\lambda + 7(1-\lambda) = 7 - \frac{9}{2}\lambda$,

$E(m^2) = \frac{13}{2}\lambda + 50(1-\lambda) = 50 - \frac{87}{2}\lambda$

變異數爲$V(m) = 50 - \frac{87}{2}\lambda - (7 - \frac{9}{2}\lambda)^2 = -\frac{81}{4}\lambda^2 + \frac{39}{2}\lambda + 1$

變異數要取最大，因此$\lambda = \frac{13}{27}, E(m) = \frac{29}{6}$

**測度(四)** (特徵向量法)

$$AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，解特徵向量可得$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{1-\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

玩家甲的所得期望值爲$E(m) = \frac{5}{2}\lambda + 7(1-\lambda) = 7 - \frac{9}{2}\lambda$,

$E(m^2) = \frac{13}{2}\lambda + 50(1-\lambda) = 50 - \frac{87}{2}\lambda$

變異數爲$V(m) = 50 - \frac{87}{2}\lambda - (7 - \frac{9}{2}\lambda)^2 = -\frac{81}{4}\lambda^2 + \frac{39}{2}\lambda + 1$

變異數要取最大，因此$\lambda = \frac{13}{27}, E(m) = \frac{29}{6}$

國立政治大學 National Chengchi University

我們將各測度所得之賽局混合解整理於表 7，並附上作業研究的賽局解以供參考比較。

表 7: 各測度所得賽局混合解的比較

| 測度 | $S_G$ | $\boldsymbol{\tau}$ | $\boldsymbol{\eta}$ | $p_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| (一) | 5 | — | — | $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ |
| (二) | $\frac{33}{7}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{25}{147} & \frac{8}{49} & 0 \\ \frac{8}{49} & \frac{25}{147} & 0 \\ 0 & \frac{8}{49} & \frac{25}{147} \end{pmatrix}$ |
| (三) | $\frac{29}{6}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ | — | $\begin{pmatrix} \frac{7}{27} & \frac{13}{54} & 0 \\ \frac{13}{54} & \frac{7}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (四) | $\frac{29}{6}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{7}{27} & \frac{13}{54} & 0 \\ \frac{13}{54} & \frac{7}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 作業研究 | $\frac{22}{5}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{16}{45} \\ \frac{17}{45} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{16}{225} & \frac{17}{225} & \frac{4}{75} \\ \frac{48}{225} & \frac{51}{225} & \frac{4}{25} \\ \frac{16}{225} & \frac{17}{225} & \frac{4}{75} \end{pmatrix}$ |

國立政治大學 National Chengchi University

# 6 結論

綜合前面章節的結果，可得下列結論：

1. 條件機率矩陣$A$和$B$相容的充要條件爲$AB'$和$B'A$存在對應特徵值1的正特徵向量$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\eta}$滿足$A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$。

2. 檢驗相容性時，特徵向量法可大幅減少驗檢的工作量。

3. $A$和$B$相容時，聯合分配是唯一的充要條件爲$A$和$B$皆不可約化。聯合分配不唯一時，聯合分配和特徵向量有對應關係。

4. 若以$e$爲評量近似聯合分配優劣的標準，特徵向量法除了可推導出最近似聯合分配的公式解外，也獲得比其他測量法更佳的最近似聯合分配。

5. 特徵向量法可應用在解兩人零和有限賽局問題上，並提供新的賽局解法。

6. 賽局的玩家可利用償付值表所提供的資訊作爲決策的依據，且雙方的策略可寫成兩個條件機率矩陣。

7. 作業研究的賽局解法是將雙方採取的策略視爲獨立，因此求出雙方決策的邊際分配即可得到賽局解。我們將雙方採取的策略視爲不獨立，因此需求出雙方決策的聯合分配。

8. 若賽局決定的條件機率矩陣廣義相容，則其聯合分配的期望值爲賽局的解；若不廣義相容，則其最近似聯合分配的期望值爲賽局的解。因爲在不同測度下得到的最近似聯合分配不同，所以賽局的解也不同。

9. 未來的研究方向可朝將特徵向量法應用在高維度的情形發展，並將其應用在多人賽局上。

國立政治大學 National Chengchi University

# 參考文獻


[1] Arnold, B. C. and Press, S. J. (1989), Compatible conditional distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 152-156.

[2] Arnold, B. C., Castillo, E., and Sarabia, J. M. (2002), Exact and near compatibility of discrete conditional distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 40, 231-252.

[3] Arnold, B. C., Castillo, E., and Sarabia, J. M. (2004), Compatibility of partial or complete conditional probability specifications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 123, 133-159.

[4] Song, C. C., Li, L. A., Chen, C. H., Jiang, T. J., and Kuo, K. L. (2010), Compatibility of finite descrete conditional distributions. *Statistical Sinica*, 20, 423-440.

[5] Mayer, C. D. (2000), *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[6] 姚景星、劉睦雄(1994)，作業研究應用篇，台灣東華出版社，台北市。


國立政治大學 National Chengchi University