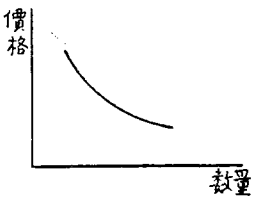
需要的統計分析

侯金英

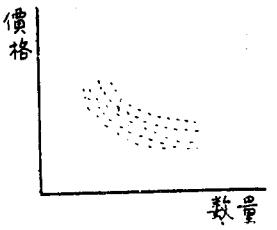
甲、需要函數的基本概念

在經濟分析的初步討論上，我們往往以縱軸代表價格，橫軸代表需要量，而在平面圖上劃出一條向右下方傾斜的需要曲線，如圖一。不過，如何根據實際資料估計這一條需要曲線呢？其最簡單而基本的方法是在平面圖上，將所收集的某一特定商品在不同時點的市場交易量與價格的各組合劃成許多點，構成一個散佈圖（scatter diagram），如圖二。然後，利用某些方法，例如直線相關（linear correlation）的方法，劃出通過散佈圖上各點之最合適之直線，那麼，這一直線便是所求的需要曲線。不過，在此我們應該進一步加以檢討的是，經過這種粗略的步驟劃出的需要曲線是否眞正代表那一商品的統計需要曲線（statistical demand curve）。一般地說，應該檢討的問題，大致有下列幾點：

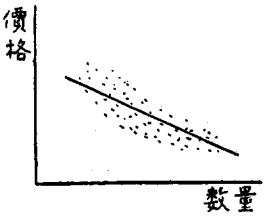
圖一
需要曲線



圖二
散佈圖



圖三
散佈圖上的配線



㈠這種函數關係是否實際上可認定或識別（identified）爲需要量與價格之關係而不表示任何其他關係？

㈡所劃出的需要曲線背後究竟假定那些其他條件爲不變（ceteris paribus proviso）？

㈢關於需要函數的數學模型，經濟理論究竟告訴我們什麼？

㈣個別需要（individual demand）與市場需要（market demand）的關係如何？

㈤統計需要函數裡所包含的機遇變數（random variable）有何種含意？

（一）認定問題（identification problem）

價格與交易量之關係，即可視爲價格與需要之關係，同時亦可視爲價格與供給之關係。假使以q代表交易量，p代表價格，則需要函數與供給函數可以下列二式表示之，

$$(1)\quad q^d=\alpha_1+\alpha_2 p+u$$

$$(2)\quad q^s=\beta_1+\beta_2 p+v$$

α_1，β_1爲常數，α_2，β_2分別代表需要與供給的彈性，u，v爲誤差。(1)(2)兩式實際上乃爲同一形式，即

$$(3)\quad q=A+BP+W$$

因此即使根據有關價格與交易量之實際資料，估計參數A，B，實際上我們並不能斷定P的係數B究竟是(1)式之α_2之估計值或(2)式之β_2之估計值。換言之，此時我們不能認定該函數是代表需要函數或供給函數。

將(1)(2)兩式各別乘上λ與μ然後相加，則得

$$(\lambda+\mu)q=(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)+(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2)P+(\lambda u+\mu v)$$

$$(4)\quad q=\frac{\lambda\alpha_1+\mu\beta_1}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda\alpha_2+\mu\beta_2}{\lambda+\mu}P+\frac{\lambda u+\mu v}{\lambda+\mu}$$

(4)式亦與(1)(2)式在形式上相同，無法區別這種混合的結果與眞正的需要函數。(4)式表示q與p的直線關係，包括未知的參數與不能直接加以觀察的誤差項。混合方程式(4)，甚至如同眞正的需要函數，有一負的斜率。因爲乘數λ與μ是完全武斷的；所選擇的λ與μ的不同，可以使$\frac{\lambda\alpha_2+\mu\beta_2}{\lambda+\mu}$之符號爲負或爲正。由於(4)式是由(1)(2)兩式誘導出來的，滿足(1)(2)兩式的p、q值必定亦能滿足(4)式，然而(4)式的p之係數顯然與α_2以及β_2不同，所導出的混合方程式可能與我們所要估計的原來的需要函數不具任何經濟關係。

在直線關係的範圍內，供給與需要函數的認定標準是明確而且容易化成公式。在上例，我們在方程式的兩邊乘上共同因素而後將方程式相加，得到若干方程式的直線組合（linear combinations of equations）。假使在直線方程式體系裡，我們遇到某一特定方程式的認定問題，那麼只有當我們將那些構成理論體系的若干或所有方程式做直線組合之後，所導出的另一方程

式不包括與我們所考慮的方程式恰好相等的變數時那一方程式方可說是被認定了。但在上例，從供給與需要函數的直線組合，我們却導出了一種混合函數，其中包括與需要函數相等的數量與價格變數以及未知之或然誤差（random error），因此無從達到需要方程式的認定。

不過，儘管供給與需要函數都爲線型方程式，並且包括完全相同的變數，有時我們依然可認定直線需要函數。在這種場合，認定的秘訣卽在於一個函數顯然地較另一函數更不穩定，其趨勢值受到更多因素的影響。換言之，一個函數的或然擾亂變數（random disturbance）顯然地大於另一函數的或然擾亂變數。例如農產品之供給，除了受農產品價格之影響外，還受到氣候之影響，農產品之供給可能因氣候的不同而作很大的波動。反之，農產品的需要，主要依存於價格，其歷時變化是很小的。就二方程式的擾亂變數加以比較，需要函數的擾亂變數顯然小於供給函數，誤差項u的變異數（variance）顯然小於V之變異數。假使需要函數非常穩定，只有因誤差項引起的小波動，而供給函數却變動很大，那麼在散佈圖上利用統計方法估計出來的直線便表示價格與數量關係的需要函數。根據(3)式獲得的廻歸係數B便是需要函要的α_2的估計值。叔爾茲（Henry Schultz）所以根據農產品市場之價格與交易量估計美國農產品的需要而沒有估計供給函數，顯然是有其充分的理由的（註一）。

反之，假使需要函數變動很大，而供給函數很穩定，那麼從價格與數量的散佈圖我們可估計供給函數，認定供給函數。例如水泥工業，因技術關係其供給是穩定的，但其需要却因市場景氣之變動而較爲不穩定，此時根據(3)式獲得的廻歸係數B便是供給函數的β_2的估計值。

上面有關需要與供給的模型乃假定測定變數只有數量與價格。不過，假使氣候變數，根據其作用，亦能夠客觀地加以測定，而包括在供給模型當中，那麼有關供給情況的移動，可以說不再是純粹機遇性的（pure random）。在新的模型裡，一部份移動可以明顯地藉農產品在其成長季節中的降雨量，陽光照射數量或熱度加以測定。如果將氣候因素導入新模型當中，卽得，

$$q^d = \alpha_1 + \alpha_2 p + u$$

$$q^s = \beta_1 + \beta_2 p + \beta_3 r + v$$

這一個模型與上述模型大致相同，只是在供給方程式中包括測定降雨量的個別變數（separate variable）r。這種新變數的導入將可幫助我們認定需要函數。不過在此我們應該注意的是，在任何特定的觀察裡，我們不能任意地加上某些邊際變數（marginal variable）於體系中的任一方程式而解決認定問題。我們應該加上的是，以前所忽略的重大而顯着的（substantial and significant）變數。

（二）其他條件不變的附帶條件（the ceteris paribus clause）

在理論經濟學上，需要函數經常假定嗜好，所得，關聯財貨的價格與一般環境條件都固定不變，並且嚴格地區別因這些既與的條件本身的變動而引起的需要量的變動以及在既與的條件下因價格的變動而引起的需要量的變動。前者稱爲需要的變動（change in demand），爲一種需要曲線本身的移動，後者稱爲需要量的移動（shift of demand），是一種沿着需要曲線的需要量的移動。就認定問題而言，特別與供給曲線同時發生的移動相關聯，需要曲線的移動是非常重要的。我們可導入消費者所得與關聯財貨的價格等變數，以測定需要曲線的移動。

不過，當我們收集有關特定期間內的價格與需要量的市場交易統計資料時，理論經濟學上的其他條件不變的假定是幾乎不能成立的。與需要行爲有關的其他條件可能在我們所選擇的期間內不斷變動。爲着這個原故，價格與需要量間的粗略的關係，似乎不能描繪我們所要估計的需要關係式。不過，假使我們把僅包括需要量與價格兩個變數的關係式擴充爲同時包括許多有關變數的關係式，那麼，情形往往得以改進。例如，代替單純的關係式，

$$q^d = \alpha_1 + \alpha_2 p_t + u_t$$

我們假定下列關係式

$$q^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \alpha_3 p'_t + \alpha_4 z_t + u_t$$

在上式，我們假定需要量依存於價格 p_t，消費者所得 y_t，某一關聯財貨的價格 p'_t，消費者嗜好變動的趨勢值 z_t，以及擾亂

變數 u_t。當然我們還可以導入其他關聯財貨的價格，以及所得以外的如同測定金融情況的其他變數。一般地說，爲處理任何特定問題，我們可適當地擴張需要關係式。爲着在特定期間內，其他條件通常都不斷地在改變，測定需要曲線的實證工作（empirical work）就得利用多變數關係式（multivariate relationship）。不過如上節所示，爲解決認定問題，對於一個體系內各方程式所包括的若干新變數亦不能毫無限制。在本節所提起的其他變數，例如 Y_t 與 P_t' 是特別與需要行爲有關連的（註二）。

（三）經濟理論與需要函數的形態

在其他條件不變的假定下，經濟理論告訴我們需要函數的斜率是負的。以縱軸表示價格，以橫軸表示需要量，則可得到較爲陡峻的必需品需要曲線，與較爲平坦的奢侈品需要曲線。當然根據這些結論，我們是無法斷定需要函數的形狀究竟是曲線或直線。不過，消費者行爲的傳統理論可以告訴我們一些有趣的結論，在實證工作上可用來限制函數的形態。

一般地說，靜態理論從某種形態的效用函數（utility function）出發，假定個人心理上滿足欲望的程度依存於他所消費的物品的數量。

效用＝在一定預算或所得的限制下，消費者所能消費的物品數量的函數或 $u=f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$

於是，消費者的經濟問題顯然是在一定預算或所得的限制下，實現其最大效用。

因爲　所有物品的支出總額＝所得

$$\Sigma P_i x_i = y$$

從而，在一定的價格體系（$p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$）之下，消費者均衡要求，

$$\frac{\text{第 i 物品的邊際效用}}{\text{第 j 物品的邊際效用}} = \frac{p_i}{p_j}$$

這種獨立的邊際效用比率共有（n－1）個。而且正如總效用，邊際效用亦依存於所消費的物品的數量。於是，左邊的比率便取

決於物品的消費數量。邊際效用方程式提供（n－1）個有關消費量與相對價格（relative prices）間的關係式，再加上預算方程式（budget equation），我們即有n個方程式。在通常情況下，可以求出每一數量的解，而這些數量，顯然是所有價格與所得的函數。古典經濟理論的需要函數便是如此。而且這些函數有一重要的特性，他們都是價格與所得的零階齊次方程式（homogeneous of degree zero）（註三）。這就是說，邊際效用方程式裡的各項同時乘上λ時，爲着λ這一數值在價格比率的分子與分母裡互相抵銷，函數依然不變。同樣，在預算方程式裡這一乘數在方程式的兩邊亦互相抵銷，即

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda p_i x_i = \lambda y$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = y$$

於是，理論上的需要函數便可改寫爲

$$x_1 = g_1\left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p_1}, \frac{y}{p_1}\right)$$

$$x_2 = g_2\left(\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_3}{p_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p_2}, \frac{y}{p_2}\right)$$

$$x_n = g_n\left(\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots\ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}, \frac{y}{p_n}\right)$$

需要量（x）顯然依存於經濟體系裡的所有價格（p）與眞實所得（$\frac{y}{p}$）。這些一般性的需要函數乃以特定的方式顯示其零階齊次式的特性。當然這種齊次性也同樣得以其他方式表示，其中一個方法是假定

$$p = \sum_{i=1}^{n} w_i p_i = \text{所有價格的加權平均}$$

$$w_i \text{爲固定權數} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right)$$

$$x_i = h_i\left(\frac{p_1}{p}, \frac{p_2}{p}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p}, \frac{y}{p}\right)$$

在上式，變數（$\frac{y}{p}$）是眞實所得測定值。因爲它表示以消費財的所有價格的加權平均平減（deflate）貨幣所得後的數值。

這樣，需要函數乃由邊際效用函數以及預算方程式導出。效用函數的參數決定了需要函數的參數結構。爲着消費者的嗜好與其他主觀上的特性皆反映在這些參數上，從而也反映在需要函數上面。實際上，爲着效用函數無法加以測定，我們都直接就需要函數着手統計分析。不過，需要函數依存於效用函數，效用函數之變動將會引起需要函數的變動。假使嗜好的變動是漸進的，而且得以平穩的趨勢線表示，那麼，這些變數就得導入需要函數當中。

當然，關於消費者行爲的統計分析還有其他各種模型。有些模型，考慮了資金之借貸問題，而在一定預算的限制下，分析一段期間內的消費計劃與效用的極大。這種需要函數顯然涉及預測，負債、資產以及其他有關變數。本文不擬提起更爲複雜的模型，但在此須加一提的便是，這些需要模型依然可以適用有關齊次性的類似的原則。同時，極大效用的理論可以進一步引申出對於需要函數的有趣的各種限制條件，特別是需要的交叉彈性（cross elasticity of demand）（註四）。

爲着需要函數的認定以及滿足其他條件不變的假定，我們已提到需要函數應該是多變數的。不過，在本節我們又提到，這些變數應該以特定的方式加以結合。關於需要函數是否直線或呈現特定形狀的曲線，經濟理論是不能提供任何暗示的。在特定問題的實際選擇上，經濟理論只提出齊次性的限制。於是，假使需要函數是直線的，我們即可寫成：

$$x_{it}=\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t}+\alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t}+\beta_i\frac{y_t}{p_t}+u_{it}$$

或寫成：

$$x_{it}=\alpha'_{0i}+\alpha'_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t}+\alpha'_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t}+\cdots\cdots+\alpha'_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t}+\beta'_i\frac{y_t}{p_t}+u_{it}$$

直線的性格可以從兩個觀點加以考慮。首先就先用統計需要函數的經濟學者而言，雖然需要量，相對價格與眞實所得的直線性格提供了單一的方程式，使他們易於進行更進一步的分析，不過，直線函數只是一種方便，有時爲求更與事實相符合應該予以犧牲。其次，就藉經濟變數的觀察值以估計未知的參數的統計學者而言，對參數爲直線的函數則較有興趣。不過，爲求更與事

實相符合，需要函數的變數可能是非直線的，但參數却仍然可以爲直線。最簡單的例子便是拋物線的方程式。

$$x_{it}=\alpha_{it}+\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t}+\alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t}+\beta_{1i}\frac{y_t}{p_t}+\beta_{2i}\left(\frac{y_t}{p_t}\right)^2+u_{it}$$

在這一方程式，邊際眞實所得效果已改變，並且就眞實所得而言，方程式是非直線的，但未知的參數依然都是一階的（in the first degree）。如下所說，統計學者經常利用這種方法簡化其工作。爲着統計學者在非直線體系遇到很多不易克服的計算問題，基本統計理論的主要分析對象乃爲直線體系。於是，我們一方面儘量保持需要函數的參數爲直線，另一方面又可放棄各種變數爲直線的假定。

在若干場合，經濟關係式的固有的曲率（inherent curvature）可以表現在非直線函數上，但這些函數是可以轉換爲直線函數的。在計量經濟學上卽經常利用指數或對數函數。因爲這些函數容易轉換爲直線函數。定數彈性（constant elasticity）的需要函數，也就是馬歇爾（A. Marshall）在說明理論時通常使用的函數，可寫成如下（註五）。

$$x_{it}=A_i\left(\frac{p_{1t}}{p_t}\right)^{a_{1i}}\left(\frac{p_{2t}}{p_t}\right)^{a_{2i}}\cdots\cdots\left(\frac{p_{nt}}{p_t}\right)^{a_{ni}}\left(\frac{y_t}{p_t}\right)^{\beta_i}u_{it}$$

假使方程式的兩邊取對數，則上式可轉換爲

$$\log x_{it}=\log A_i+\alpha_{1i}\log\frac{p_{1t}}{p_t}+\alpha_{2i}\log\frac{p_{2t}}{p_t}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\log\frac{p_{nt}}{p_t}+\beta_i\log\frac{y_t}{p_t}+\log u_{it}$$

以附有分號的數量表示對數，則上式又可表示爲

$$x'_{it}=A'_i+\alpha_{1i}\left(\frac{p_{1t}}{p_t}\right)'+\alpha_{2i}\left(\frac{p_{2t}}{p_t}\right)'+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\left(\frac{p_{nt}}{p_t}\right)'+\beta_i\left(\frac{y_t}{p_t}\right)'+u'_{it}$$

實際上，這是一個直線方程式，其參數是直線的。這是在需要分析乃至整個計量經濟學上，將非直線函數轉換爲直線函數的最普通的方法。

經濟理論告訴我們一個物品的需要是消費者在一定預算的限制下可能被購買的一切物品的相對價格與眞實所得的函數。在計量經濟的實際應用上，這種理論模型乃被簡化爲更容易處理的方程式，並與需要相關連，祇提起所分析的物品的價格，一般

物價水準以及關係密切的兩三個替代品或合作品的價格與所得。雖然在理論模型上，爲期完整，可以包括經濟體系的所有其他物品的價格，但是在實證研究上，個個價格並不是十分顯着而都應該加以提起的。當然在若干觀察上我們還可考慮其他變數。例如在消費者計劃的動態理論上可導入過去所得的價值（涉及時間之落後），金融資產存量的淨額或實物資產的存量等變數。

（四） 個別需要的總合

就上節說明的有關消費者行爲的經濟理論加以定式化卽可獲得個別需要函數，但是市場資料（market data）並不表示單一的個人行爲的結果，而表示整個社會行爲的結果。根據市場資料獲得的需要函數卽爲總合需要函數（aggregate function）。爲着要證明我們的統計值卽是理論上的需要曲線，自需證明個別商品的總合需要函數這一概念是可以成立的。

總合或總計（aggregation）的第二個問題是如何選擇商品以估計其需要函數。在需要的統計分析的研究上，砂糖或其他初級商品的需要，在其總計幾乎不會發生任何問題。但是消費者預算上所提起的糧食，汽車等各種耐用品，以及其他主要而龐雜的消費品的需要却會發生重要的指數問題。

關於需要函數的一般形態，消費者行爲的理論告訴我們兩個非常特殊的結論。第一，假使一羣人的所得皆按同一比例變動，而且這一羣人當中的每一份子又有同一所得彈性，那麼，這一共同的個別所得彈性得由市場彈性加以估計。第二，就消費者行爲理論的中心命題而論，價格完全按同一比率變動的不同物品，實際上可當作單一物品處理。不過，如所週知，所得變動與價格變動是沒有嚴密的相關的。這些命題與其說是實證工作的實際結論，不如說是理論上的細節。

假使需要函數是線型的，第j個個人對第i個物品的需要可以公式示之如下：

$$X_{it}^{(j)}=\alpha_{0i}+\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t}+\alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t}+\beta_i\frac{Y_t^{(j)}}{p_t}+u_{it}^{(j)}$$

並且假使在市場上各個人都面臨同一價格水準，儘管需要量，所得與誤差項在個人中間有差異，但各種參數對各個人都固定不變，則我們可就市場上的所有人累加個別函數（individual function）

$$\sum_{i=1}^{N} x_{it}^{(j)} = N\alpha_{0i} + N\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t} + N\alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t} + \cdots\cdots + N\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t} + \beta_i \sum_{j=1}^{N}\frac{y_t^{(j)}}{p_t} + \sum_{j=1}^{N} u_{it}^{(j)}$$

以N除上式之兩邊，即得：

$$\bar{x}_{it} = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_t} + \alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_t} + \cdots\cdots + \alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_t} + \beta_i\frac{y_t}{p_t} + u_{it}$$

但

$$\bar{x}_{it} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{it}^{(j)}}{N} = \text{對第 i 個物品的每人平均需要}$$

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_t^{(j)}}{N} = \text{每人平均所得}$$

$$\bar{u}_{it} = \frac{\sum_{j=1}^{N} u_{it}^{(j)}}{N} = \text{對第 i 個物品的每人平均誤差}$$

不過，假使個別需要函數是非直線的，那麼其總計就不如此簡單。因爲變數的一次乘冪的合計即爲合計的一次乘冪。但變數的二次乘冪的合計却不是合計的二次乘冪，於是，如上述之拋物線方程式之總計可能會遇到新的問題。在統計學上，恆等式

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(y_t^j)^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_t^j - \bar{y}_t)^2}{n} + \bar{y}_t^2 \qquad \text{(註六)}$$

告訴我們在拋物線函數式總計後獲得的市場方程式裡，每人需要量除了依存於每人所得外，還依存於每人所得的平方與每人所得的離差之平方的平均（Average squared deviation），而後一項目便是所得分配的變異數（variance）。由此可知，非直線的市場需要函數顯然包括了一個新因素，我們應該考慮所得分配的兩個特性，即其平均水準與分數。這樣，直線函數所遇到的問題較少，尤其假定直線函數的參數在所有個人中間皆爲相同的場合更爲如此。非線型函數則通常在總計需要函數裡牽涉到所得分配的因素。

至於總合各種商品以求主要需要項目的需要函數，其計算過程更爲複雜。不過，假使從一般直線需要函數的公式出發，則得簡化如下，例如假定

$$x_{it}=\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_{it}}+\alpha_{2i}\frac{p_{2t}}{p_{it}}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_{it}}+\beta_i\frac{y_t}{p_{it}}+u_{it}$$

在兩邊乘上 P_{it}，累加商品 1, 2,…… n_1 卽得

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it}x_{it}=p_{1t}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}+p_{2t}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}+\cdots\cdots+p_{nt}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ni}+y_t\sum_{i=1}^{n}\beta_i+\sum_{i=1}^{n}p_{it}u_{it}$$

至於這一羣商品的物價指數則爲：

$$p_t^{(1)}=\sum_{i=1}^{n} w_i p_{it}$$

但 W_i＝第 i 物品在這一小羣商品的物價指數中之權數

以這物價指數除總合方程式的兩邊，卽得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} p_{it}x_{it}}{p_t^{(1)}}=\frac{p_{1t}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{1i}+p_{2t}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{2i}+\cdots\cdots+p_{n1t}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{n1t}}{p_t^{(1)}}+\frac{p_{n1+1,t}}{p_t^{(1)}}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{n1+1,t}+\cdots\cdots+\frac{p_{nt}}{p_t^{(1)}}\sum_{i-1}^{n_1}\alpha_{ni}$$

$$+\frac{y_t}{p_t^{(1)}}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i+\frac{\sum_{i=1}^{n_1}p_{it}u_{it}}{p_t^{(1)}}$$

上式左邊表示以一羣商品物價指數加以平減的對於這些物品的支出金額，也就是這羣商品需要量的指數。我們將稱之爲 $x_t^{(1)}$。右邊第一項表示那羣商品 n_1 個價格的兩個不同的加權組合的比率。分子的權數是需要函數係數的合計。分母的權數是 W_j。爲方便起見，我們大致可以假定這一比率爲定數。第二項是那一羣商品以外的各個價格與那一羣商品的物價指數的比率。第三項是以那一羣商品的物價指數加以平減的所得。誤差項則爲那一羣物品價格的兩個加權平均的比率。分子的權數爲機遇權數（random weights），分母則爲固定權數。我們稱這混合結果爲新的或然變數 $u_t^{(1)}$。於是，方程式卽可改寫爲：

$$x_t^{(1)} = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \frac{p_{n1+1,t}}{p_t^{(1)}} + \cdots\cdots + \alpha_n^{(1)} \frac{p_{nt}}{p_t^{(1)}} + \beta^{(1)} \frac{y_t}{p_t^{(1)}} + u_t^{(1)}$$

這種總計的過程皆含有種種假定與概算，尤其在個人間的參數有很大差異的場合更是如此。至於線型的假定如何簡化市場行爲的總合結果是易於了解的。假使非線型函數是屬於固定彈性的形態，那麼，如上所述，這種模型可轉換爲對數直線模型。依據自然數的平均而說明的目前的命題，亦可適用於對數平均或幾何平均的對數。不過，就自然數總計的市場資料，通常不能計算幾何平均。因爲各種對數的合計並不是合計的對數。就是個別函數以對數形態加以表示，我們還是不能直接把它轉換爲市場總計的對數。不過，在某些情況下，自然數平均與對數平均之間是有固定關係的。

在需要函數的初步統計上，市場總計資料通常以自然單位加以表示。不過，我們認爲，就特定商品的個別需要加以表達的傳統理論與市場資料的統計計算兩者中間，應該細心地架起總計的橋梁。假使能夠注意到這一橋梁，不同指數的選擇與所得分配的作用將會變爲更清楚。而且就市場資料從事計算的場合，計量經濟學家應該時常分析總計的含意（aggregation implications）。

（五）機過擾亂變數的性質

在計量經濟學上我們所處理的並不是嚴密的函數關係，從而或然性的考慮就顯得非常重要。在所要測定的關係式裡，或然變數或機遇變數（random variables）究有那些性質，在此擬加簡單的說明。

有關消費者需要的純粹理論，根據效用極大的概念，導出了其間的函數關係，將需要量視爲相對價格與眞實所得的函數。不過，統計學家是否能夠正確地說，相對價格與眞實所得已完全概括了可能影響需要的所有因素嗎？實際上，國際關係的動亂以及流行的變化等都隨時可能發生，而且這些因素可能直接影響需要。不過，在函數關係的推論上對於這些都沒有明確的說明。這些額外因素並非永久性或規則性的，有時它們甚至根本不能加以測定，但它們是一定存在，而且不允忽略的。假使我們發現一個對需要有很大的影響力的因素並沒有包括在理論模型裡面，那麼，就得改變理論模型以便包括這一變數。

典型的需要函數可示之如下：

$$x_{it}=\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_{it}}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_{it}}+\beta_i\frac{y_t}{p_{it}}+\gamma_1 z_{1t}+\cdots\cdots+\gamma_m z_{mt}$$

在上式 $Z_{1t}\cdots\cdots Z_{mt}$ 是影響需要的多數次要擾亂變數。在計量經濟模型上乃認爲這種擾亂變數或誤差項的發生必定按照某種或然率分配（probability distribution）。根據或然率中心極限定理（central limit theorem），只要構成平均數的項目無限地增加，並且彼此獨立，那麼不管構成平均數的組成份子的原來分配如何，機遇變數的平均數將構成一種常態分配（normal distribution）。上舉需要函數的擾亂變數，

$$\gamma_1 z_{1t}+\cdots\cdots+\gamma_m z_{mt}$$

事實上可以說是一種平均數，並且與下列加權平均數維持一種比例關係，

$$(\gamma_1+\cdots\cdots+\gamma_m)\frac{\gamma_1 z_{1t}+\cdots\cdots+\gamma_m z_{mt}}{\gamma_1+\cdots\cdots+\gamma_m}=(\gamma_1+\cdots\cdots+\gamma_m)\bar{Z}_t$$

上式 $\bar{Z}_t$ 是 z_{it} 的加權平均數，其權數爲

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_1+\cdots\cdots+\gamma_m}$$

假使上式表示一種市場關係式，那麼，各個人就有其預期的 z_{it} 的平均數。那些被忽略的其他變數，都可按上述過程求其平均。於是，我們可進一步地根據或然率的中心極限定理，將需要方程式表示如下：

$$x_{it}=\alpha_{1i}\frac{p_{1t}}{p_{it}}+\cdots\cdots+\alpha_{ni}\frac{p_{nt}}{p_{it}}+\beta_i\frac{y_i}{p_{it}}+u_{it}$$

在上式，u_{it} 是形成常態分配的機遇變數。在若干應用上我們僅指出 u_{it} 是一種機遇變數，遵循某種未確定的分配法則。不過，假使能夠指明準確的分配函數，那麼，我們的立脚點將更爲穩固。而最好的選擇便是常態函數。因爲機遇變數的分配，如上所述，乃趨向於常態分配，統計理論又主要根據常態分配而加以發展，在這意義上，這是最好的選擇。

若干研究者假定機遇擾亂變數 u_{it} 是一個很小的數目。假使 u_{it} 的確很小，對我們固然方便，但這並不是計量經濟學家

的目的所在。計量經濟學家的問題在於如何求出模型的最好的可能統計估計值。按經濟過程的固有性質，機遇擾亂變數不一定很小。如上所述，農產品供給函數的變動大於需要函數。甚至在我們明確地認定氣候變數等額外因素之場合，供給函數還會發生機遇波動。計量經濟學家的目的是在利用現實生活資料的樣本（sample）以得到有關問題的所有參數的最好的估計值。就上例而言，應加估計的參數便是 α_{ji} β_i 與 u_{it}。假使擾亂變數呈現常態分配，那麼我們的問題便在分配的分散，也就是在於其標準差的估計。我們所追求的主要目標不在於高度的相關，而在於機遇誤差的基本解釋。由此可知，或然率法則在計量經濟學上扮演着重要的角色。無論如何，就統計資料的任何樣本而言，其純粹機遇誤差是較純粹小誤差更爲重要。

在計量經濟學發展的初期階段，一般所强調的是，因不完全的測定而產生的測定誤差（measurement error）。他們假定那些根據理論上的若干變數構成的需要函數是準確的，不過，每一變數事實上都容易發生測定誤差。儘管基本經濟情報是根據最好的收集與測定技術而取得，並且採取多變數市場方程式的模型，觀察與測定誤差依然會發生。不過，假使我們要把這種測定誤差與上述模型所忽略的誤差結合在一起，則可能招致困難的統計問題。於是，目前我們都忽略測定誤差，而僅根據因被忽略的因素而招致的誤差來發展我們的統計工具（註七）。

（註一）H. Schultz, The Theory and Measurement of Demand, Chicago, 1938.

（註二）不管就供給或需要行爲而言，關聯財貨的價格是非常重要的，但是與供給面有關的財貨顯然與需要面有關的財貨不同。

（註三）假使對所有獨立變數乘上任意的正的定數，函數值依然維持不變，則該函數稱爲零階齊次方程式。

（註四）H. World and L. Jureen, Demand Analysis: A Study in Econometrics, New York, 1951.

（註五）假使以絕對價格代替相對價格，以貨幣所得代替眞實所得，則在方程式上，可以要求所有指數參數之和變成零而現出其齊次性

$$x_{it}=Ap_{1t}^{\alpha_{1i}}\ p_{2t}^{\alpha_{2i}}\cdots\cdots p_{nt}^{\alpha_{ni}}\ p_t^{\alpha_i}\ y_t^{\beta_i}\ u_{it}$$

而 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}+\beta_i+\alpha_i=0$

（註六）令 A_y 爲假定平均數

$$\bar{y}=\frac{\Sigma y}{N}$$

則 $\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2=\frac{1}{N}\Sigma(y-A_y-\bar{y}+A_y)^2$

$$=\frac{1}{N}\Sigma[(y-A_y)-(\bar{y}-A_y)]^2$$

$$=\frac{1}{N}[\Sigma(y-A_y)^2-2(\bar{y}-A_y)\Sigma(y-A_y)+\Sigma(\bar{y}-A_y)^2]$$

$$=\frac{1}{N}[\Sigma(y-A_y)^2-2(\bar{y}-A_y)(N\bar{y}-NA_y)+N(\bar{y}-A_y)^2]$$

$$=\frac{1}{N}[\Sigma(y-A_y)^2-2N(\bar{y}-A_y)^2+N(\bar{y}-A_y)^2]$$

$$=\frac{1}{N}\Sigma(y-A_y)^2-(\bar{y}-A_y)^2$$

$$\therefore\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2=\frac{1}{N}\Sigma(y-A_y)^2-(\bar{y}-A_y)^2$$

令 $A_y=0$　　則 $\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2=\frac{1}{N}\Sigma y^2-\bar{y}^2$

$$\therefore\frac{1}{N}\Sigma y^2=\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2+\bar{y}^2$$

(註七) L. R. Klein, An Introduction to Econometrics, N.J. 1962, ch. 2.

乙、統計方法在需要分析上的應用

在需要分析上所應用的統計方法有單一方程式法 (single equation approach) 與聯立方程式法 (multi-equation approach) 兩種。前者適用於小規模的實證研究，後者則適用於大規模的實證研究。本章擬就這兩個測定方法加以簡單的說明。

一、單一方程式法：

初期的需要分析所採取的統計方法，乃根據市場統計或家計調查所獲有關價格與需要量的組合，利用最小平方法 (least

square method）引申出價格與需要量間的一般關係。這卽是統計學上所謂兩個變數的廻歸分析（regression analysis）。

㈠最小平方法。

假定有一母羣體（population），其變數 X_1 與 X_2 有如下式之關係：

$$X_1=\alpha+\beta X_2+e \qquad ①$$

α、β 爲參數，e 爲誤差項。在此又假定 e 的期待值（expected value）$E(e)=0$ 於是，儘管變數有不規則的變動，X_2 却是一種沒有誤差的變數，始終有一確定的數值。從而，

$$E(X_1)=E(\alpha+\beta X_2+e)=\alpha+\beta X_2 \qquad ②$$

上式所表示的便是 X_1 對 X_2 的廻歸關係，β 是 X_1 對 X_2 的廻歸係數（regression coefficient）。α、β 等廻歸方程式中所包括的參數，總稱爲廻歸參數。廻歸分析卽是由變數 X_1 與 X_2 的觀察值估計廻歸參數，確定廻歸方程式，並且根據這一方程式，由既與 X_2 的值估計未知的 X_1 值。

爲估計廻歸參數 α、β，一般所使用的方法便是最小平方法。令 $X_{11}, X_{21}; X_{12}, X_{22}; \cdots\cdots X_{1n}, X_{2n}$。爲 X_1 與 X_2 的 n 個觀察值。這些觀察值便構成 X_1 與 X_2 的樣本。同時假定根據這些觀察值估計的廻歸參數 α 與 β 的估計值爲 a 與 b，則其廻歸方程式爲，

$$X_{1i}'=a+bX_{2i} \qquad ③$$

根據③式計算所獲估計值 X_{1i}' 與觀察值 X_{1i} 的差額，

$$e_i=X_{1i}-X'_{1i}=X_{1i}-(a+bX_{2i}) \qquad ④$$

乃稱爲估計值的殘差（residual）。利用最小平方法估計的廻歸參數的估計值 a 與 b，將使 e_i 的平方和爲最小，卽

$$\Sigma(e_i^2)=\Sigma[X_i-(a+bX_{2i})]^2=\min$$

至於 a 與 b，則利用下列兩個標準方程式（normal equations）求其解，

$$\Sigma X_1 = na + b\Sigma X_2$$

$$\Sigma X_1 X_2 = a\Sigma X_2 + b\Sigma X_2^2$$

$$a = \frac{\Sigma X_2^2 \ \Sigma X_1 - \Sigma X_2 \ \Sigma X_2 X_1}{n\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2}$$

或 $$b = \frac{n\Sigma X_1 X_2 - \Sigma X_1 \ \Sigma X_2}{n\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2} \qquad ⑥$$

上述測定廻歸參數的方法甚爲繁雜，如果就二變數 X_1 與 X_2 取其離均差，則

$$x_1 = X_1 - M_{x_1}$$

$$x_2 = X_2 - M_{x_2}$$

由算平的性質可知，離均差的總和爲零，即 $\Sigma x_1 = 0$ ， $\Sigma x_2 = 0$ 於是，以平均數爲原點的廻歸方程式， $x'_1 = a' + b' x_2$ 的廻歸參數爲

$$a' = 0$$

$$b' = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_2^2} \qquad ⑦$$

廻歸方程式乃變成

$$x_1' = bx_2$$

或

$$x_1' - M_{x_1} = b\,(x_2 - M_{x_2})$$

爲簡單起見，上面僅說明了兩個變數的廻歸方程式的參數的測定。但上述最小平方法的原理與計算方法仍可適用於三個以上的變數的多元廻歸方程式的參數的測定。

如上章第二節所述，影響任一經濟現象的因素固然很多，但變數的增加只要不是重大而顯著，則祇使計算過程變爲更複雜。因此儘管某一物品 x_i 的需要量 x_i ，除了受其本身的價格 p_i 之影響外，還受其他代替品價格以及 y 所得的影響，但我們假定與物品 X_1 的需要有密切關係者，祇有 X_i， X_3 與 X_2 。於是 X_i 的需要函數可寫成如下：

$$X_i = f(p_i, p_j, p_k, p_e, y) \quad ⑧$$

進一步，假定以一般物價水準 p 近似地代表與物品 X_i 的需要有關的其他物品的價格，則 X_i 的需要函數又可簡化爲

$$X_i = f(p_i, p, y) \quad ⑨$$

再就 $\frac{p_i}{p}$ 計算相對價格，將之規爲獨立變數，則上式更可簡化爲

$$X_i = f\left(\frac{p_i}{p}, y\right) \quad ⑩$$

如果⑧⑨⑩三式，近似地得以直線表示，那麼，

$$X_i = \alpha_1 + \alpha_2 p_i + \alpha_3 p_j + \alpha_4 p_k + \alpha_5 p_e + \alpha_6 y \quad ⑪$$

$$X_i = \beta_1 + \beta_2 p_i + \beta_2 p + \beta_3 y \quad ⑫$$

$$X_i = \gamma_1 + \gamma_2 \left(\frac{p_i}{p}\right) + \gamma_3 y \quad ⑬$$

測定這些多元迴歸方程式的參數所需步驟與上述兩變數迴歸方程式的場合完全相同。

一般地說，多元直線迴歸方程式可示之如下，

$$X_1' = a_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \cdots\cdots + a_n X_n \quad ⑭$$

X_1' 爲估計值，X_2, $X_3 \cdots\cdots X_n$ 爲觀察值，a_1, a_2, ……a_n 爲常數。不過，爲說明之方便起見，假定 X_1 爲 X_2，X_3 與 X_4 的函數，那麼，

$$X_1' = a_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 \quad ⑮$$

假使估計值的直線式爲最佳的直線式，可做爲估計之最好根據，那麼，如上所述，估計值 X'_1 與觀察值 X_1 之間的殘差的平方和應該是最小，

$$S = \Sigma(X_1 - X'_1)^2$$

$$= \Sigma\,[X_1 - (a_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)]^2$$

$$=\min$$

要使 s 爲最小，則其條件爲

$$\frac{\partial s}{\partial a_1}=-2\Sigma\ (X_1-a_1-a_2X_2-a_3X_3-a_4X_4)=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_2}=-2\Sigma X_2\ (X_1-a_1-a_2X_2-a_3X_3-a_4X_4)\ =0$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_3}=-2\Sigma X_3\ (X_1-a_1-a_2X_2-a_3X_3-a_4X_4)\ =0$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_4}=-2\Sigma X_4\ (X_1-a_1-a_2X_2-a_3X_3-a_4X_4)\ =0$$

於是，其標準方程式爲

$$\Sigma X_1-na_1-a_2\Sigma X_2-a_3\Sigma X_3-a_4\Sigma X_4=0$$

$$\Sigma X_2X_1-a_1\Sigma X_2-a_2\Sigma X_2^2-a_3\Sigma X_2X_3-a_4\Sigma X_2X_4=0$$

$$\Sigma X_3X_1-a_1\Sigma X_3-a_2\Sigma X_3X_2-a_3\Sigma X_3^2-a_4\Sigma X_3X_4=0 \qquad ⑯$$

$$\Sigma X_4X_1-a_1\Sigma X_4-a_2\Sigma X_4X_2-a_3\Sigma X_4X_3-a_4\Sigma X_4^2=0$$

如果以離均差 x 代替變數 X，則⑮式將變成

$$x'_1=a'_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4 \qquad ⑰$$

因爲 a'_1, Σx, Σx_2, Σx_3 與 Σx_4 皆爲零，$a'_i=a_i$，故其標準方程式爲

$$a_2\Sigma x_2^2+a_3\Sigma x_2x_3+a_4\Sigma x_2x_4=\Sigma x_1x_2$$

$$a_2\Sigma x_2x_3+a_3\Sigma x_3^2+a_4\Sigma x_3x_4=\Sigma x_1x_3 \qquad ⑱$$

$$a_2\Sigma x_2x_4+a_3\Sigma x_3x_4+a_4\Sigma x_4^2=\Sigma x_1x_4$$

解之，卽得 a_2, a_3 與 a_4 之值。再將⑯之第一式以 n 除其兩邊，卽可 a_1 求如下：

$$\frac{\Sigma x_1}{n}=\frac{na_1}{n}+\frac{a_2\Sigma x_2}{n}+\frac{a_3\Sigma x_3}{n}+\frac{a_4\Sigma x_4}{n} \quad ⑲$$

或 $Mx_1=a_1+a_2Mx_2+a_3Mx_3+a_4Mx_4$

$\therefore\ a_1=Mx_1-a_2Mx_2-a_3Mx_3-a_4Mx_4$ （註1）

㈡最小平方法的計算例與 Doolittle 法：

就一九二〇年到一九四二年的美國投資淨額（X_1），本期利潤（X_2），前期利潤（X_3）與前期資本存量（X_4）的資料，計算多元直線迴歸方程式，則由表一可知，其標準方程式爲

（Ⅰ）$356.1980a_2+261.4952a_3-168.8809a_4=276.8133$ ⑳

（Ⅱ）$261.4952a_2+324.5180a_3-123.2276a_4=219.7233$

（Ⅲ）$-168.8809a_2+123.2276a_3+1,967.5495a_4=-259.9233$

表　一

t	1920	1921	1922	1923	1924	1525	1926	1927	1928	1929	1930	1931
X_1	2.7	−0.2	1.9	5.2	3.0	5.1	5.6	4.2	3.0	5.1	1.0	−3.4
X_2	12.7	12.4	16.9	18.4	19.4	20.1	19.6	19.8	21.1	21.7	15.6	11.4
X_3		12.7	12.4	16.9	18.4	19.4	20.1	19.6	19.8	21.1	21.7	15.6
X_4	180.1	182.8	182.6	184.5	189.7	192.7	203.4	203.4	207.6	210.6	215.7	216.7

t	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943
X_1	−6.2	−5.1	−3.0	−1.3	2.1	2.0	−1.9	1.3	3.3	4.9		
X_2	7.0	11.2	12.3	14.0	17.6	17.3	15.3	19.0	21.1	23.5		
X_3	11.4	7.0	11.2	12.3	14.0	17.6	17.3	15.3	19.0	21.1	23.5	
X_4	213.3	207.1	202.0	199.0	197.7	199.8	201.8	199.9	201.0	204.5		

資料來源：L.R. Klein, Economic Fluctuations in the United States, 1921-41, New York 1950 Appendix, p. 135.

註：unit: billions of 1934 dollars

解之，即得

$$a_2=0.4797$$

$$a_3=0.3329$$

$$a_4=0.1117$$

又根據（19）式，

$$a_1=10.1080$$

於是，所求之廻歸方程式爲

$$X'_1=10.1080+0.4797X_2+0.3329X_3-0.1117X_4$$

上述計算方法，在代入與消去之過程容易發生錯誤，因此最近乃利用其標準方程式的聯立對稱直線式（simultaneous symmetrical linear equation）的特性而有 Doolittle 法之發現（註二）。這種方法分下列兩個階段逐步加以計算。

①前段之解（forward solution）

（甲）、首先以標準方程式中之（I）式的第一個係數（356.1980）除其他項，改變其符號，則由（I）式可獲得（I）′式如下：

$$(\mathrm{I})\ 356.1980a_2+261.4952a_3-168.8809a_4=276.8133$$

$$(\mathrm{I}')\ -1a_2-0.7341a_3+0.4741a_4=-0.7771$$

（乙）、其次，將（II）式與（I）式乘上（I′）式第二項係數（0.7341）所獲結果並列，然後，求這兩個方程式之合計（M_2），再以（M_2）中的 a_3 的係數除其他項，並改變符號即得：

$$(\text{II})\quad 261.4952a_2+324.5180a_3+123.2276a_4=219.7233$$

$$(-0.7341)\ (\text{I})\ -261.4952a_2-191.9636a_3+123.9755a_4=-203.2086$$

$$(\Sigma_2)\qquad 132.5544a_3+247.2031a_4=16.5147$$

$$(\text{II}')\qquad -1a_3-1.8649a_4=-0.1246$$

在上面的演算過程，因爲（−0.7341）是$\frac{261.4952}{356.1980}$的商數，因此將（−0.7341）乘上(I)式，則其第一項必爲（−261.4952）。由於係數的對稱性，這一數值與（II）式第一項係數的絕對值必定彼此相等，但符號却恰好相反。從而將二式相加，則 a_2 項由此消失，得（Σ_2）式。以 a_3 的係數除其他項，改變其符號，則爲（II′）式。

（丙）、最後，將（II）式與（I）式乘上（I′）式第三項係數（0.4741）以及（Σ_2）式乘上（II′）式第二項係數（−1.8649）所獲結果並列，則

$$(\text{II})\quad -168.8809a_2+123.2276a_3+1,967.5495a_4=-259.9233$$

$$(0.4741)\ (\text{I})\quad 168.8809a_2+123.9755a_3-80.0664a_4=131.4181$$

$$(-1.8640)\ (\Sigma_2)\qquad -247.2031a_3-461.0091a_4=-30.7945$$

$$1,426.4740a_4=-159.2997$$

$$-1a_4=0.1117$$

在上面的演算過程裡，（0.4747）爲$\frac{-168.8809}{356.1980}$的商數，將之與（356.1980）相乘，則必定爲（+168.8809），由於係數之對稱性，在演算上項將會消失。至於 a_3 項，則爲第三個方程式的 a_3 項的係數（−247.2031）爲（Σ_2）之 a_4 的係數，祇是符號相反，等於一（123.2276+123.9755），從而將三個方程式的 a_2 項相加，則這一項目亦將消失。結果 Σ_3 便成爲 a_4 的方程式。由（II′）式卽得 $a_4=-0.1117$。上面之計算步驟稱爲前段之解。

②後段之解（back solution）

後段之計算步驟較爲簡單，將 $a_4=-0.1117$代入（II′）式，

卽得　　$a_3=0.1246-1.8649\ (-0.1117)$

$$=0.1246+0.2083$$

$$=0.3329$$

將 a_4 與 a_3 之值代入（I′）式，即得

$$a_2=+0.7771-0.7341\ (0.3329)\ +0.4741\ (-0.1117)$$

$$=0.7771-0.2974$$

$$=0.4797$$

至於 a_1 則由（19）式可知

$$a_1=Mx_1-a_2Mx_2-a_3Mx_3-a_4Mx_4$$

$$=1.2667-(0.4797)(16.8905)-(0.3329)(16.3726)-(0.1117)(200.4952)$$

$$=10.1080$$

上面之計算步驟稱爲後段之解，所求之廻歸方程式爲

$$_1=10.1080+0.4797X_2+9.3329X_3-0.1117X_4$$

上述計算步驟亦可利用如表二之計算表以簡化如下：

表二　Doolittle 法之計算表

		X_2	X_3	X_4	X_1	S
I	X_2	356.1980	126.4952	−168.8809	276.8133	725.6256
II	X_3		234.5180	123.2276	219.7233	928.9641
III	X_4			1,967.5495	−259.9233	1,661.9729
	I	356.1980	261.4952	−168.8809	276.8133	725.6256
	I′	−1.0000	−0.7341	+0.4741	−0.7771	−2.0371

	II		324.5180	123.2276	219.7233	928.9281
(−0.7341)	I		−191.9636	+123.9755	−203.2086	−532.6553
	M_2		132.5544	247.2031	16.5147	396.2722
	II′		−1.0000	−1.8649	−0.1246	−2.9895
	III			1,967.5495	−259.9233	1,661.9729
(0.4741)	I			−80.0664	131.4181	344.0020
(−1.8649)	M_2			−461.0091	−30.7945	−739.0080
	M_3			1,426.4740	−159.2997	1.267.1743
	III′			−1.0000	0.1117	−0.8883
		+0.7771	+0.1246	−0.1117		
		−0.2444	+0.2083	−0.1117		
		−0.0530	+0.3329			
		+0.4797				

(1)表二的最上面的部分表示標準方程式之係數，不過這些係數的行列（matrix）是對稱的，從而主對角線（main diagonal）之下方並無記載之必要，祇需按上述步驟加以計算即可。

(2)爲便於核對計算過程上可能發生之錯誤，乃排列S欄，以便記入各別的合計。最上面的三列乃表示三個標準方程式的係數的合計，其餘各列則可利用這些數值，以核對計算是否準確。例如，第四列的合計爲（725.6265），以（−356.1980）除之，即得（−2.0371），應該等於第五列的合計。

(3)這一計算表有下列兩個特點。這一特點是，各階段之乘數皆與各別的最初項目出現在同一行。例如，第十一列與第十二列的乘數（0.474）與（−1.8649）皆與（1,967.5495）排在同一行，並且表示各計算階段之最後數字。第二個特點是，上述後段之解變成非常的簡單。在第十四行算出（0.1117）以後，，改變第五列與第九列同一行之數字（−0.1246）與（−0.7771）之符號，由第三行向左排列，然後將（0.1117）與同行第九列與第五列之數字相乘，將其乘積向左排列，如第十六列。（因爲（−0.1117）（−1.8649）＝0.2083∴（−0.1117）（0.4741）＝−0.0530）。將第二行之兩個數字（0.1246）與（0.2083）相加，即得 a_2＝0.3329。最後，將（0.3329）與同行第五列之數字（0.7341）相乘，將其乘積寫在第十七列（−0.2444）之左面，再將第一行之三個數字（+0.7771），（−0.2444）與（−0.0530）相加，即得 a_3＝0.4797。至於 a_1 則只好利用（19）

式加以計算。

Doolittle 法有兩個優點，其一卽爲縱然不了解如何利用消去法以求聯立方程式之解，只要記住計算過程，卽可機械地計算所需參數。其二卽爲，可提高計算效率，在各階段計算所獲結果，立卽應用在下一階段，同一數值又在前段與後段應用兩次。不過，這一方法只有聯立方程式之各係數成對稱行列時才能加以應用（註三）。

㈢線型關係之重合

最後，在廻歸分析的應用上，往往遇到非常難於解決的線型關係重合的問題（multicollinearity problem）（註四）。例如，以 x ，p 與 y 代表需要量，價格與所得，並且皆以離均差表示，那麼，需要函數便爲，

$$x=\alpha p+\beta y$$

根據最小平方法，α β 卽爲下列標準方程式之解

$$\Sigma xp=\alpha\Sigma p^2+\beta\Sigma py \tag{21}$$

$$\Sigma xy=\alpha\Sigma py+\beta\Sigma y^2 \tag{22}$$

利用行列式以求 α 與 β 之解，則

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma xp & \Sigma py\\ \Sigma xy & \Sigma y^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma py\\ \Sigma py & \Sigma y^2\end{vmatrix}}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma xp\\ \Sigma py & \Sigma xy\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma py\\ \Sigma py & \Sigma y^2\end{vmatrix}} \tag{23}$$

不過，假定獨立變數 p 與 y 之間有直線關係 $y=\lambda p$ 則

$$\Sigma py=\lambda\Sigma p^2$$

$$\Sigma y^2=\lambda\Sigma py$$

$$\Sigma xy=\lambda\Sigma xp$$

於是

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma xp & \Sigma py\\ \lambda\Sigma xp & \lambda\Sigma py\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma py\\ \lambda\Sigma p^2 & \lambda\Sigma py\end{vmatrix}}=\frac{\lambda\Sigma xp\Sigma py-\lambda\Sigma py\Sigma xp}{\lambda\Sigma p^2\Sigma py-\lambda\Sigma p^2\Sigma py}=\frac{0}{0}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma xp\\ \lambda\Sigma p^2 & \lambda\Sigma xp\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma p^2 & \Sigma py\\ \lambda\Sigma p^2 & \lambda\Sigma py\end{vmatrix}}=\frac{\lambda\Sigma xp^3-\lambda\Sigma xp^3}{\lambda\Sigma yp^3-\lambda\Sigma yp^3}=\frac{0}{0}$$

不管是 α 或 β 皆不能確定（undeterminate）。這是因爲我們假定獨立變數 x 與 p 之間有線型關係的原故。在這種場合，線型關係乃在獨立變數與從屬變數之間，以及獨立變數相互間重合。爲着這個原故，我們稱變數 x，p，y 之間有線型關係之重合（註五）。此時要從 x，p，y 之觀察值分離 p 對 x 的效果 α，以及 y 對 x 的效果 β 是不可能的。假如變數 x，p，y 皆含有機遇誤差（random error），則原來等於零的行列式却不再等於零。不過，由而取得的 α，β 之計算值却不表示眞正的廻歸參數。

爲檢定各變數統計數列之間有無線型關係之重合，並判斷那些變數應包括在廻歸方程式之中，乃有 R. Frisch 所提起的 bunch map 的方法（註六）。同時上列㉑式，$x=\alpha p+\beta y$ 表示需要量是價格與所得的函數。儘管由時間數列的資料證明其間有線型關係之重合，但就經濟理論而言，㉑式是完全準確的。在這種場合，從時間數列的資料固然不能測定 α 與 β，但假使

能够利用其他資料預先確定 β 值，那麼，將代入㉑式後自能測定 α 值。事實上，β 值可以從家計調查等橫斷面的資料（cross-section data）加以測定，然後以爲限制條件可測定 α 值。這種方法乃稱爲附條件的廻歸分析（conditional regression anlaysis）（註七）。

二、聯立方程式法

爲着各經濟變數之間有非常密切的相互依存關係，我們可利用若干與某一商品的需要有關的構造方程式（structural equation），同時求其解以測定該商品的需要函數。由此求出的需要函數的測定值，顯然地較單一方程式所求出的結果更爲準確。因爲經濟本身較單一方程式所表示的複雜得多。

㈠構造方程式

在經濟理論上，表示各種經濟現象之間的相互關係的方程式大致有下列幾種基本形態：

第一、定義式（definitional identity）例如：

支出總額＝各種商品的購入總量×各種商品的價格

卽爲定義式，表示一種自明之道理（truism）。

第二、技術關係式（technical relation）：例如生產函數（production function）卽爲技術關係式。不過，除了這種生產因素之轉變爲生產品的技術法則之外，這種關係式，還廣義地包括了表示租稅制度或價格管理等制度關係式（institutional relations）。

第三、行爲方程式（behavior equation）：例如需要函數，供給函數，儲蓄函數，投資函數等表示經濟活動的方程式皆屬於行爲方程式。

第四、調整方程式（adjustment equation）：例如供需均等式卽爲調整方程式，表示各經濟主體的行爲在市場上相互交

涉的結果，如何透過價格這一市場變數（market variable）的變動調整其行爲而達成市場均衡的條件。

上述四種方程式乃在一定的假設（hypothesis）之下，表示各種變數相互結合的狀態，亦即表示經濟的構造，從而稱爲構造方程式。前三種方程式爲個別的或基本的方程式，最後一種方程式則爲總合的或引申的方程式。在這些方程式裡，需要彈性或邊際消費傾向等即爲連結各變數，表示其經濟構造的特質之參數，稱之爲構造係數（structural coefficients）。計量經濟分析的主要目的即在於，藉現實統計資料測定這些構造係數。上節所說明的便是，如何利用單一方程式法，配直線需要函數，由而求價格彈性或所得彈性等構造係數。不過，爲着這種方法，在整個相互關連的經濟構造中，僅抽出單一的構造關係式，從而不能令人滿意。假使利用單一方程式法以測定需要函數

$$x=-\alpha p+\beta y+u$$

（p＝價格，y＝所得，u＝誤差）

那麼，x 與 p 的關係同樣出現在下列供給函數之中

$$x=\gamma p+\delta w+v$$

（w＝生產力，v＝誤差）

單一的構造方程式所表示的關係並不是孤立的，它還要受到其他關係式的約束。於是，我們應該將上述四種型態的構造方程式適當地加以組合，構成所要研究的經濟構造的聯立方程式模型（simultaneous equation model），利用統計方法上所謂聯立方程式法以測定各種構造係數（註八）。

例如將上述供需函數加以組合，即得某一商品的市場構造模型如下：

$$x=-\alpha p+\beta y+u \tag{24a}$$

$$x=\gamma p+\delta w+v \tag{24b}$$

在上列模型之中，變數 x 與 p 依存於經濟體系內部的市場機能（market mechanism）的情況，從而稱之爲內生變數（endogenous variable）。爲着方程式的數目與內生變數的數目相等，這個聯立方程式體系可以說是完整的（complete），可以

得到唯一的解答（unique solution）。至於所得 y 係由模型外的變數加以決定的，根據市場構造模型預測 x 時，y 構成既與的條件，從而稱爲外生變數（exogenous variable）或既定變數（predetermined variable）。不過，我們要記住，外生變數未必非經濟變數（non-economic variable），在我們所提起的模型裡，所得 y 乃被假定由模型外的變數加以決定，並不假定所得是決定於非經濟變數。

上列方程式係由成體系的部分（systematic part）與機遇的部分（random part）組成。就（24a）式而言，（$-\alpha p+\beta y$）表示前一部分，屬於理論的部分。誤差項 u 則表示後一部分，屬於不確定的偶然的部分，從而稱爲機遇變數（random variable）。爲方便起見，假定內生變數與外生變數皆不包括觀察誤差，則 u 與 v 將爲各方程式的殘差。

至於誤差項是基於下列幾個原因發生的（註九）：

①不充分的理論（incomplete theory）：理論必然是不充分的，它祇是不能充分加以說明的事象的一種抽象（an abstraction）。

②被提起的函數型態不完全（imperfect specification）：我們可能把非直線關係假定爲直線關係。

③資料的總計（aggregation of data）：我們雖然總計了非齊質的個人，但表示各個人的特徵的變數或表示所得分配的方程式却付諸闕如。

④測定誤差（errors of measurement）：縱使經濟行爲是正確的，調查方法却不能如此。統計數列往往包括若干測定誤差。不過，如上章第五節所述，我們姑且假定所有變數都沒有測定上的誤差。

不管誤差項發生的原因如何，其存在是計量經濟學根據特定假設所作各種分析的基礎。關於誤差項，我們通常作如下的假定（註十）：

① u 與 v 是眞正機遇變數（random real variable）。

②就各個特點而言，u_t 與 v_t 的期待值或平均值皆爲零。

③ u_t 的歷時變異數（variance over time）是固定不變的，也就是說，招致誤差項的基本原因的數目，相對的重要性或絕對的影響力皆維持不變。

④誤差項構成常態分配。

⑤不同時期的誤差項是彼此獨立的。

⑥誤差項與任何外生變數或既定變數都沒有相關。

㈡最大概似法（maximum likelihood method）與最小平方法：

在上述假定之下，假使所要測定的是單一方程式，那麼，我們即可利用最小平方法以求構造參數。這樣求得的構造參數又爲最大概似估計值（maximum likelihood estimates）。

所謂最大概似法，照字義，係指所求得的參數 θ 的估計值 θ' 的概似（likelihood）爲最大的方法。換句話說，根據這種方法估計的 θ' 值，經常是或然率爲最大的或最可能的（most probable）參數的估計值（註十一）。例如在某袋子裡有黑球與白球兩種，我們僅知其間比率爲一比四，但不知黑球究竟是其中的一或四。在這種情況下，假定由袋子裡抽出一球，而其爲黑球的或然率爲 θ，則 θ 爲 1/5 或 4/5 是已知的，但究竟是其中的那一數值是未知的。現在爲估計未知的參數 θ，假定從袋子裡抽出一球而後又放回，連續抽三次，則三次中黑球出現 x 個的或然率可藉二項分配（binominal distribution）的公式示之如下：

$$f(x, \theta) = \binom{3}{x}\theta^x(1-\theta)^{3-x}$$

$$= \frac{3!}{x!\,(3-x)!}\,\theta^x\,(1-\theta)^{3-x} \qquad (25)$$

$$(x=0, 1, 2, 3)$$

就 $\theta=1/5$ 與 $\theta=4/5$ 的場合分別計算 $f(x\ \theta)$，則如表三。

表三　實驗結果＝樣本的或然率

x	0	1	2	3
f (x, 1/5)	64/125	48/125	12/125	1/125
f (x, 4/5)	1/125	12/125	48/125	64/125

假定連續抽出三次而三次皆不出現黑球（x＝0），那麼由表三可知，假使被抽出的或然率爲 4/5，則 $f(0, 1/5) = \frac{64}{125}$，又假使被抽出的或然率爲 4/5，則 $f(0, 4/5) = \frac{1}{125}$。由此可知，$\theta = \frac{1}{5}$ 時，獲得這種實驗結果或樣本的或然率較 $\theta = 1/5$ 的或然率大，從而判斷 $\theta = 1/5$ 爲最大概似估計值。相反地，假使實驗的結果三次皆出現黑球（x＝3），那麼，$\theta = 1/5$ 時 $f(3, 1/5) = \frac{1}{125}$，$\theta = 4/5$ 時 $f(3, 4/5) = \frac{64}{125}$，從而判斷 $\theta = 4/5$ 爲最大概似估計值。

總之，如㉕式的函數稱爲概似函數（likeolihood function），從而根據最大概似法求得的參數估計值 θ'，將使概似函數爲最大。至於最大概似法的統計計算過程，則大致可摘要如下：

①確定樣本的概似函數，例如

$$L = f(x_i, \theta)$$

②求其對數函數，

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta)$$

③解下列方程式，使概似函數爲最大

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L = 0$$

這樣求出的 θ 值即爲最大概似估計值。

具體地說，假定有一迴歸方程式，

$$y' = a + bx + u \tag{26}$$

如果利用最大概似法以估計其參數 a 與 b，則計算過程將如下（註十二）。

假定觀察誤差不存在，令 y_i 爲第 i 個觀察值，y_i' 爲其估計值，則

$$y_i - y'_i = y_i - a - bx_i = u_i \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots\cdots n) \tag{27}$$

再假定，① x_i 與 u_i 是各自獨立的。

② u_i 亦是彼此獨立的。

③ u_i 成一個常態分配，其母羣體的平均值爲零，變異數爲 σ^2。

則誤差的分配函數爲

$$p(u_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} u_i^2} \tag{28}$$

因爲我們假定誤差是彼此獨立的，從而獨立事象同時發生的或然率 p' 或 x_1，x_2，…… x_n …… y_1，y_2 …… y_n 等一系觀察值產生的概似函數 L 乃等於 n 個 $p(u_i)$ $(i = 1, 2 \cdots\cdots n)$ 的乘積

$$L = p'(p_1, p_2, \cdots\cdots p_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2} \tag{29}$$

求㉙式的對數函數，則

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \Sigma u_i^2 \tag{30}$$

就 a 與 b 加以偏微分，則

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-1) \tag{31}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-x_i) \tag{32}$$

爲使概似函數爲最大，令㉛㉜二式爲零，則

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)\, x_i = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 \tag{33}$$

㉝式便是上述標準方程式。由此我們即可證明；在誤差項與獨立變數以及誤差項相互間各自獨立，誤差項成一個常態分配的場合，最大概似法所估計的參數 a ， b 與最小平方法所估計者，將會完全一致。這樣求出的估計值，在統計學上通常稱爲最好的無偏誤的直線估計值（best linear unbiased estimates）。

不過，在聯立方程式的場合，就各個構造方程式，利用最小平方法算出的參數估計值却不具備最大概似估計值的條件。要使最小平方估計值成爲最大概似估計值，則如上所述，誤差項與獨立變數應該是各自獨立的。但是在內生變數有兩個以上的聯立方程式裡，這個條件却不能成立。舉例來說，假定有一聯立方程式

$$y_1 = a_1 + b_1 y_2 + c_1 z + e_1 \tag{34a}$$

$$y_1 = a_2 + b_2 y_2 + c_2 z + e_2 \tag{34b}$$

（y_1 y_2 爲內生變數，z 爲外生變數，e 爲誤差項）

就 y_1 與 y_2 解之，即得

$$y_1 = \frac{b_1(a_2+c_2z+e_2)-b_2(a_1+c_1z+e_1)}{b_1-b_2} \qquad (35)$$

$$y_2 = \frac{(a_2+c_2z+e_2)-(a_1+c_1z+e_1)}{b_1-b_2} \qquad (36)$$

由(36)式可知，y_2 不但受（34b）式的誤差項 e_2 的影響，而且對（34a）式的誤差項 e_1 也不是獨立的。同樣，由㉟式可知，y_1 亦同時受到兩個誤差項 e_1 與 e_2 的影響。縱使利用最小平方法以估計（34a）式的參數，e_1 固然是該式的誤差項，但獨立變數 y_2 與誤差項 e_1 却不是各自獨立的。同理，在（34b）式，獨立變數 y_2 與誤差項 e_2 亦不是各自獨立。縱使將 y_2 視爲從屬變數，y_1 視爲獨立變數，也是如此。

一般地說，在聯立方程式模型的場合，由於上述理由，參數的最小平方估計值甚至沒有一致性（consistency）這一優良估計值所應具備的條件。在這種場合，爲取得良好的估計值，則應該利用最大概似法以加估計。因此，參數的估計並不是就各個構造方程式單獨地加以計算，而是就整個聯立方程式同時計算其中所包括的全部參數（註十三）。

假定有一完整的聯立方程式模型

$$\alpha_1+\beta_{11}y_1+\beta_{12}y_2+\cdots\cdots+\beta_{1n}y_n+\gamma_{11}z_1+\cdots\cdots+\gamma_{1m}z_m=e_1$$

$$\alpha_2+\beta_{21}y_1+\beta_{22}y_2+\cdots\cdots+\beta_{2n}y_n+\gamma_{21}z_1+\cdots\cdots+\gamma_{2m}z_m=e_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n+\beta_{n1}y_1+\beta_{n2}y_2+\cdots\cdots+\beta_{nn}y_n+\gamma_{n1}z_1+\cdots\cdots+\gamma_{nm}z_m=e_n$$

在上列模型，y_1 爲內生變數，z_1 爲外生變數，並且假定誤差項 e 成一種常態分配，則按上述方法可以構成參數 α、β、γ 的概似函數。使概似函數爲最大的 α、β、γ 的估計值即爲各參數的最大概似估計值。不過，利用這種方法以求最大概似估計值，就得求許多非直線方程式之解。此時，除非利用高速計算機，將不易加以計算。爲期計算之方便，適用比較簡單的最小平方法，以求得良好的參數估計值，乃有下述誘導法之產生。

㈢誘導法（reduced form method）

將第一節㉔式

$$x = -\alpha p + \beta y + u \qquad (24a)$$

$$x = \gamma p + \delta w + v \qquad (24b)$$

就內生變數 x ，p 解之，以外生變數 y w 與誤差項 u v 加以表示，則

$$x = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma} y + \frac{\alpha\delta}{\alpha+\gamma} w + \frac{\gamma u + \alpha v}{\alpha+\gamma} \qquad (37a)$$

$$p = \frac{\beta}{\alpha+\gamma} y + \frac{\delta}{\alpha+\gamma} w + \frac{u+v}{\alpha+\gamma} \qquad (37b)$$

㉔式稱爲原型（original form），㊲式則稱爲誘導型（reduced form）。解聯立方程式模型的原型，令由而求得的各個方程式僅含一個內生變數，其餘皆爲外生變數時，這種型態的聯立方程式模型乃稱爲誘導型。將原型換成誘導型後，利用最小平方法以估計這些方程式的構造參數的方法，卽稱爲誘導法。

如上所述，在廻歸方程式的獨立變數與誤差項各自獨立的場合，最小平方法的參數估計值與最大概似法所估計者，將會完全一致。不過，就㉔式而言，內生變數 x ，p 不但是各方程式的誤差項的函數，而且對其他方程式的誤差項也不是互爲獨立的。從而在㉔式，參數的最小平方估計值却不能滿足優良估計值的條件。相反地，在㊲式，獨立變數爲 y ，w 等外生變數。這些外生變數與誤差顯然是各自獨立的。因爲誤差項所能影響者，以內生變數爲限。從而在㊲式，參數的最小平方估計值將與最大概似估計值相一致。求出 $\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}$ ，$\frac{\alpha\delta}{\alpha+\gamma}$ 等參數估計值以後，根據這些數值自能間接地計算 α 、β 與 γ δ 。

一般地說，直線構造方程式可示之如下：

$$\beta_{11} y_1 + \cdots\cdots + \beta_{1n} y_n + \gamma_{11} z_1 + \cdots\cdots + \gamma_{1m} z_m = u_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n1}\ y_1+\cdots\cdots+\beta_{nn}\ y_n+\gamma_{n1}\ z_1+\cdots\cdots+\gamma_{nm}\ z_m=u_n \tag{38}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\ y_j+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{ik}\ z_k=u_i$$

其誘導型爲

$$\begin{aligned}
y_1&=\delta_{11}\ z_1+\cdots\cdots+\delta_{1m}z_m+v_1\\
y_2&=\delta_{21}\ z_1+\cdots\cdots+\delta_{2m}z_m+v_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n&=\delta_{n1}\ z_1+\cdots\cdots+\delta_{nm}\ z_m+v_n
\end{aligned} \tag{39}$$

或

$$y_i=\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}\ z_k+v_i$$

在㊴式，利用最小平方法求出 δ_{ik} 後，根據這些數值自能間接地計算 β_{ij} 與 γ_{ik} 等值。這種方法卽是誘導法。不過，要利用這種方法，則如下表所示，應滿足適合認定 (Just identified or exactly identified) 的條件。

㊃認定問題

如上節所述，聯立方程式的構造參數可利用誘導法加以測定。由此算出的結果與最大概似估計值完全一致。但我們也得知道，並不是任何聯立方程式都能適用誘導法。究竟能否應用誘導法，須視該方程式是否滿足適合認定的條件而定。在第一章第一節我們提到，認定的概念性的觀點 (conceptual point of view)。在此具體地說，任何方程式皆可分成①適合認定，②過剩認定 (over-identified) 與③不能認定 (under-identified) 的三種場合，不過唯有第一種場合適用誘導法。第二種場合，雖然不能應用誘導法，但可應用部分情報法 (limited information method)。

在第一章第一節我們提到，在直接關係的範圍內，認定的標準乃在於將那些構成理論體系的若干或所有構造方程式做直線組合以後，所導出的另一方程式是否包括與我們所考慮的方程式恰好相等的變數呈現同一型式。根據這種看法，經濟模型中第

i 個構造方程式的認定的必要條件是 $N \geqq G-1$。G 爲構造方程式的個數，與模型中內生變數的個數相等。N 爲構成體系的內生變數與外生變數中，在第 i 個方程式中沒有表現出來的個數。令 G 與 H 爲經濟模型所包括的內生變數與外生變數的個數，G′ 與 H′ 爲第 i 個方程式所包括的內生變數與外生變數的個數，那麼，

$$N=G+H-(G'+H')$$

就第 i 個方程式而言，

① $N<G-1$ 則不能認定

② $N=G-1$ 則適合認定

③ $N>G-1$ 則過剩認定

在（24b）式，$G=2$，$N=4-2=1$ 從而 $N=G-1$ 故滿足適合認定的條件。

至於在過剩認定的場合，則可利用部分情報最大概似法（limited information maximum likelihood method）。這種方法並沒有利用模型中的完全情報（full information），祇是在整個模型中細心地選擇一個或若干構造方程式，利用與這些方程式的參數有關的情報，故意地忽略其他情報，應用上述最大概似法以估計這一個或若干構造方程式的參數。換句話說，所謂部分情報最大概似法，乃避免採取所有方程式，將情報或變數的個數限制於所要估計的一個或若干方程式有關的範圍，然後利用最大概似法以估計各個構造參數（註十四）。

三、統計假設的檢定（testing of statistical hypothesis）：

現代統計推論（modern statistical inference）由下列兩個部分構成，即㈠估計母羣體的參數，與㈡檢定統計假設。關於前一部分，我們在上面二節已作過簡單的說明（註十五）。在此，擬就統計假設的檢定做扼要的說明。

通常我們對於母羣體某一未知的參數，可預先提出一種假設。不過，這種統計假設是根據經濟理論上的判斷而來，與統計觀察無關。從而我們必須進一步檢討這種假設能否成立。所謂統計假設的檢定，其目的即在根據樣本觀察結果，以判斷有關母

羣體參數的假設的接受或摒棄。然而我們也得知道，儘管根據統計假設的檢定，認爲假設應予接受或應加承認，這亦不是證明該假設是完全準確的。它不過表示該假設成立的可能性比較大。被接受的假設自然還會包括虛僞的假設（false hypothesis）。相反的，摒棄該假設也不表示該假設是完全錯誤的，它不過表示該假設成立的可能性比較小。被摒棄的假設自然還會包括眞實的假設（true hypothesis）。摒棄眞實的假設，通常稱爲第一種過誤（type 1 error）以 α 表示之。至於接受虛僞的假設，則稱爲第二種過誤（type 2 error），以 β 表示。

一般地說，一種統計假設可以在大小不同的顯着水準（level of significance）下被摒棄或被承認。通常所選擇的顯著水準卽爲百分之五或百分之一。至於所謂顯著水準乃表示第一種過誤出現的或然率。顯着水準愈低，則承認區域（accept region）愈大，摒棄區域（critical region）愈小。因此，顯著水準愈高，則假設被摒棄的機會愈大，被接受的機會愈小，眞實的假設亦有時被摒棄。相反的，顯著水準愈低，則假設被摒棄的機會愈小，被接受的機會愈大，虛僞的假設亦有時被接受。由此可知，顯著水準愈高，虛僞的假設被接受的機會固愈減少，但眞實的假設被摒棄的機會却愈增加；反之亦然。

統計假設的檢定當中，在經濟理論上有重要意義者，卽爲參數估計值的顯著性檢定（test of significance）這種檢定大致按下列步驟進行之：

㈠決定所要檢定之假設，卽擬定虛無假設（null hypothesis）以 H_0 表示之。這種假設乃與對立假設（alternative hypothesis）H_1 相對應。

㈡確定顯著水準與樣本個數（sample size），使我們對母羣體參數之假設的取捨有一客觀標準。

㈢根據目的及已知條件選擇適當之統計量（statistic），並假定虛無假設下的樣本統計量分配（sampling distribution）。

㈣根據假設之性質決定其棄却區域應包括正負兩尾（two tails）或集中於某一尾（one tail）。

㈤根據顯著水準及自由度查表，以確定其棄却區域。

㈥將所假設之母羣體之參數值代入所選擇的統計量，得假設下的統計量。

㊐根據由㊄㊅獲得之棄却區域與計算結果，判斷假設是否能成立（註十六）。

下面，我們將舉一個數值例，具體地說明如何根據廻歸係數b，算出統計量，以檢定有關母羣之廻歸係數的假設（註十七）。

X	Y	X^2	XY	Y^2
1	4	1	4	16
3	2	9	6	4
0	2	0	0	4
4	4	16	16	16
總計 8	12	26	26	40

在上表，觀察次數爲四，從而 $n=4$，並將表上 ΣX，ΣY，ΣX^2 與 ΣXY 之值代入標準方程式，即得

$$\begin{cases} 4a+8b=12 \\ 8a+26b=26 \end{cases}$$

解之，即得

$$a=2.6 \quad , \quad b=0.2$$

於是，我們所求之廻歸方程式爲

$$Y=2.6+0.2X$$

現在我們要問，在顯著水準百分之五之下，該母羣體的廻歸係數是否等於零，在母羣體的 X 與 Y 之間是否有直線關係存在。

首先我們決定虛無假設 H_0 與對立假設 H_1 如下：

$$H_0: \beta=0$$

$H_1: \beta \neq 0$

根據樣本統計量之分配，統計量 $t = \frac{b-\beta}{S}$ 乃爲以自由度爲 $(N-2)$ 的 t 分配。在此，b 爲廻歸係數的估計值，β 爲假設的母羣體廻歸係數，S 爲廻歸係數的標準差，其平方爲，

$$S^2 = \frac{N\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - \left\{ \frac{[N\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)]^2}{N\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \right\}}{(N-2)[N\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2]},$$

至於 N 爲樣本之個數。於是：

$$b = 0.2 \qquad \beta = 0 \qquad N = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{(4)(40) - (12)^2 - \left\{ \frac{[(4)(26) - (8)(12)]^2}{(4)(26) - (8)^2} \right\}}{(4-2)[(4)(26) - (8)^2]}} = 0.424$$

$$t = \frac{0.2-0}{0.424} = 0.47$$

因爲我們的假設是：$H_0: \beta = 0$，$H_1: \beta \neq 0$，根據最良棄却區域決定之原則可知，其棄却區域應包括正負兩尾。假使 $\beta = 0$ 這一虛無假設可以成立，那麼統計量 t 值，將構成以自由度爲二之 t 分配。在顯著水準百分之五，自由度爲二的情形下，從 t 值表可期待的 t 值爲 $t = \pm 4.303$ 從而其棄却區域爲：$|t| > 4.303$。由於實際計算之 t 值爲 $t = 0.47$，較表上的 t 值 $t = 4.303$ 爲小，我們可判斷，實際計算之 t 值乃在接受區域內，我們應該接受 $\beta = 0$ 之假設，而認爲在母羣體的 X 與 Y 之間並沒有直線關係存在。至於我們作這種判斷時，摒棄眞實的假設的可能性乃爲百分之五。

由此可知，計量分析並不是單純的統計計算。它的主要目的一方面從某一特定假設出發，求取數值的結果（numerical

results)，另一方面，又藉所獲數值結果檢定該假設是否合適。

(註一) F.C. Mills, Statistical Methods, 3rd ed., New York, 1955, ch. 17.

(註二) M. Ezekiel, Method of Correlation Analysis, 2nd ed., New York, 1941, Appendix; L. R. Klein, A. Textbook of Econometrics, New York, 1953, ch. IV, I; G.W. Snedecor, Statistical methods 4th ed., Iowa, 1946.

(註三) 係數非對稱的聯立方程式，則應該利用 Cront's method 等其他方法 (G. Tintner, Econometrics, New York, 1952, Appendix.)

(註四) ：「在計量經濟學的初期發展階段，R. Frish 特別注意到線型關係之重合，以爲這是許多有關經濟現象的時間數列所具備的典型的現象。廣義地說，線型關係之重合許多經濟數列在其歷時過程上所表現的按同一趨勢或按同一經濟循環型態 (business-cycle patterns) 變動的傾向」(L.R. Klein, An Introduction to Econometrics, N.Y. 1962, p. 62.)

(註五) 例如在巴西這種生產構造屬於單作的 (monoculture) 國家，如果以咖啡的需要量爲從屬變數，咖啡價格與國民所得爲獨立變數而測定需要函數，則爲着咖啡價格與國民所得有密切的關係，並不能準確地估計迴歸係數。縱使咖啡價格與國民所得之間並無準確的線型關係，只要兩者的相關係數接近於一，則迴歸係數的估計值的信賴度必定很低。

(註六) E.F. Beach, Economic Models, New York, 1957, pp. 171-5.

(註七) H. Wold and L. Jurêen, Demard Analysis, A Study in Econometrics, New York, 1953, p. 47.

(註八) W.C. Hood and T.C. Koopmans, Studies in Econometric Method, New York, 1953; L.R. Klein, A Textbook of Econometrics.

(註九) S. Valavanis, Econometries, An Introduction to Maximum Likelihood Method, New York, 1959, pp. 5-6.

(註十) Ibid., pp. 9-17.

(註十一) 最大概似法爲 R. A. Fisher 所發明，被認爲是有關點估計 (point estimation) 的最完全的理論。因爲它通常具備有效 (efficient)、一致 (consistent) 與充分 (sufficient) 的性質。雖然未必具備無偏誤 (unbiased) 的性質，但與之相接近。所謂

有效性即是參數估計值 θ' 的變異數爲最小。一致性即是樣本個數 n 愈接近無窮大，估計值 θ' 與母羣體的參數 θ 愈相接近。充分性即是參數估計值係根據樣本的全部情報計算而得。至於所謂不偏性即是參數估計的平均與母羣體參數的平均相等。

(註十二) G. Tintner, op. cit., ch. 2.

(註十三) 森田優三，經濟變動統計分析法，一九五五，一八三頁—四頁。

(註十四) Klein, op. cit., pp. 169ff. Valavanis, op. cit., ch. 8.

(註十五) 母羣體參數的估計，有點估計 (point estimation) 與區間估計 (interval estimation) 兩種。所謂點估計係指估計值由單一數值構成的場合而言。其主要方法有上述最小平方法與最大概似法。至於區間估計，係根據一定的或然率推算估計的限界。也就是，在一定的信賴係數 (confidence coefficient) 之下，推定估計值的準確限界或信賴限界 (fiducial or confidence limits)。(Tintner, op. cit., pp. 18-9)。

(註十六) S. Siegel, Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, New York, 1956, pp. 6-7.

(註十七) Tintner, op. cit., pp. 27-31.

丙、需要函數的若干實例

在計量經濟分析上，需要函數的測定乃屬最爲進步的部分。關於需要的統計分析，早在十九世紀即有 Gregory King 的有關歉收與穀價的相關分析。至於需要函數的近代分析則始於 H. L. Moore (註一)，繼而由 A. C. Pigou，R. A. Lehfeld，W. W. Leontief 等人加以發展。到了一九三〇年代便大成於 H. Schultz 的劃時代的名著：「需要的理論與測定」(The Theory and measurement of Demand)，而且最近依然經常有人提起新的分析方法與測定結果。

就需要函數的實例而言，其分析的現象最初集中於農產品，其後才逐漸推廣到勞務與工業品上面。同時，就工業品而言，消費品的分析，非耐久品的分析早於耐久品的分析。至於其分析的對象，最初是集中於價格彈性，其後才注意到所得彈性，替

代彈性等問題。本章，我們將選擇若干典型的例子以說明計量經濟方法在需要分析與經濟政策上的應用（註二）。

（一） H. Schultz 的美國小麥需要函數的分析

H. Schultz 根據美國一九二一年到一九三四年的年資料，利用最小平方多元迴歸分析法導出如下方程式（註三）：

$$\log x = 1.0802 - 0.2143 \log P - 0.00358\, t - 0.00163\, t^2 \qquad (1)$$

（原點：1928年）

x：每人小麥消費量（單位：bushels）。

p：每一 bushels 小麥的農場價格（單位：cents）。

（以勞動統計局所編批發物價指數加以平減，1913＝100）

t：時間。

上式表示每人小麥消費量爲每一 bushel 小麥價格的函數，其最後兩項表示小麥需要在該期間當中的移動。不過，因其係數微小，小麥需要函數隨時間的經過而發生的移動是不顯著的。log P 的係數（−0.2143）是小麥需要的價格彈性。假使小麥價格增加了百分之一，則在其他條件不變的情況之下，小麥需要將會減少五分之一％。

在上例，自由度爲十，價格彈性的標準差爲0.0358。因此，自一九二一年到一九三四年的十四年間，在顯著水準爲百分之五之下，則價格彈性的信賴限界是（−0.3050）與（−0.1236）（註四）。

經濟理論家往往籠統地說，小麥的價格彈性並不高，但在這裡，我們不但提出數值的結果，同時，對於其缺乏彈性的情形也給予具體的證明。如果這一數值結果是可靠的，那麼，可用做訂定經濟政策的良好指標。假定藉公定價格等方法提高了小麥價格百分之十，則可期待美國小麥消費量將減少大約百分之二。從而在這政策之下，美國農民因販賣小麥所獲總收入將增加大約百分之八。

①式是利用傳統的最小平方法加以測定的，其數值結果可能因下列幾個原因而含有若干誤差：（甲）未檢討認定的問題。（乙）未考慮線型關係重合的可能影響。（丙）未考慮連續觀察值間的相互依存性。（丁）藉單一方程式法測定小麥需要函數。

（二）H. Schultz 的牛肉與猪肉需要的相關分析

①式僅以小麥這一商品的價格說明其需要的情形。但事實上，任一商品的價格不僅依存於該商品本身的價格，同時還依存於替代品的價格以及購買者的所得等。於是，Schultz 又根據美國一九二二年到一九三三年的年資料，利用最小平方多元廻歸分析法導出如下方程式（註五）

$$x_b = 3.4892 - 0.0899y_b + 0.0637y_p + 0.0187I \qquad (2)$$

x_b：牛肉的聯邦消費總量（單位：百萬磅）

y_b：牛肉一磅的總平均零售價格（單位：cents）

y_p：猪肉一磅的總平均零售價格（單位：cents）

I：所得（落後三個月的薪給指數 1923－25＝100）。

由②式算出的整個期間的各個彈性的平均如下：

以牛肉價格表示的牛肉需要的價格彈性	－0.49
以猪肉價格表示的牛肉需要的交叉彈性	＋0.46
牛肉需要的價格彈性	＋0.36

由此可知，假使其他條件不變而牛肉價格上漲百分之一，則其需要將減少百分之〇•五。再者，假使其他條件不變而猪肉價格上漲百分之一，則牛肉需要將增加大約百分之〇•五。這即表示牛肉與猪肉有一種替代關係。這種交叉彈性（cross elasticity）之大小，實即表示替代能力的高低（degree of substitutability）。至於第三項則表示，假使其他條件不變，而所得增加

百分之一，則牛肉需要將增加大約於$\frac{1}{3}$%。

由②式獲得的數值結果，將會遇到如同①式的問題。不過，假使這些數值是可靠的，那麼，政府以公定價格等方法提高猪肉價格百分之十，則牛肉需要將會增加百分之四•六。再者，如果政府提高勞動者收入百分之十，則牛肉需要將會增加百分之三•六。這種相互關係的酌量，在農業計劃上是非常重要的。

(三) R. Stone 的英國啤酒消費量的分析

在較爲後期的需要分析當中，R. Stone 所分析的有關英國與美國商品的統計測定是非常有趣的（註六）。他較 Schultz 更注意認定的問題，並且利用 bunch map 的方法以檢定各變數統計數列之間有無線型關係的重合。在此，我們將引用他所做的有關英國啤酒消費量的分析。

根據一九二〇年到一九三八年的年資料，他導出下列廻歸方程式所示之啤酒的需要函數：

$$p=1.058Q^{0.136}P^{0.727}\pi^{0.914}g^{0.816} \qquad (3)$$

p：啤酒消資量

Q：眞實所得總額

P：啤酒平均零售價格

π：所有其他物品的平均零售物價水準

g：啤酒强度的指數

由上式可知，啤酒消費量的所得彈性爲 0.136。假使其他條件不變而所得增加百分之一，則啤酒消費量將增加大約$\frac{1}{7}$%。啤酒需要的價格彈性爲負數，因此假使啤酒價格上漲百分之一而其他條件不變，則啤酒需要將會減少大約$\frac{7}{10}$%。g的指數爲正，表示消費者喜歡强烈的啤酒而不喜歡淡薄的啤酒。

至於在政策上的應用則如下：假使政府主張戒酒，想減少啤酒消費量，那麼，藉啤酒價格的提高可達成此一目的。根據上式，在其他條件不變的情況下，要減少啤酒消費量百分之十，則必須提高啤酒條件大約百分之十四，這種價格的上漲可藉特別捐的徵收而達成。

（四）R. H. Whitman 的鋼鐵動態需要函數的分析

上舉三個例子皆爲較簡單的非耐用消費品的需要函數。如果以生產品需要函數爲分析的對象，那麼，我們就要面臨引申需要（derived demand）或投機等問題。R. H. Whitman 可以說是從事生產品需要函數分析的先驅者（註七）。

R. H. Whitman 根據一九二一年到一九三〇年的月資料，利用最小平方多元廻歸分析法導出如下方程式：

$$y = 1.49 - 1.27p + 6.27\frac{dp}{dt} + 4.64I - 0.03t \qquad (4)$$

y：鋼鐵販賣指數（單位：millions of gross tons）

p：以趨勢變動加以修正的鋼鐵一磅的價格（單位：cents）。

$\frac{dp}{dt}$：鋼鐵價格的時間變化率

I：工業生產指數

t：時間

由上式可知，除 t 的係數以外，其他廻歸係數在統計上都是顯著的。t 的係數並不顯著不外乎表示鋼鐵需要曲線的時間變化非常微小。在該期間內需要曲線並沒有發生過任何值得注意的向上或向下的移動。p 的係數爲負，表示如果其他條件不變，而鋼鐵價格上漲，則會引起鋼鐵需要量的減少。至於鋼鐵價格的時間變化率 $\frac{dp}{dt}$ 的係數，不但是正，而且大於 p 的係數，這一事實乃表示，鋼鐵需要經常受到投機因素，預測（expectation）的影響。如果鋼鐵漲價了，需要者便預測更進一步的上漲，從而增加鋼鐵購買量。相反的，如果鋼鐵跌價了，需要者便預測更進一步的下跌，從而減少鋼鐵購買量。工業生產指數的

係數爲正，表示鋼鐵需要爲一種派生需要。當一般工業活動繁盛時，鋼鐵需要便顯著地增加。

上述種種測定結果，完全與理論經濟學家對於生產品需要的看法相吻合。而且鋼鐵需要的投機性，在經濟政策的應用上亦是非常重要的。假使其他條件不變，政府想要增加鋼鐵需要，則應該維持鋼鐵價格的上漲趨勢。例如發動公共工程，對鋼鐵作長期訂購以刺激鋼鐵價格的上漲，由而鼓勵民間的投機需要便是一個有效的方法。不過，④式所獲結果，將會遇到如同①式的問題。

（五） C.F. Roos 與 Uvon Szeliski 的美國汽車需要函數的分析

汽車是一種耐久消費品，在分析這種消費品時，我們應該特別注意其存量。一般地說，新車的需要，除了受所得與汽車價格等因素之影響外，還要受到既存車輛的年齡分配或廢車指數（index for the scrapping of cars）的影響。Roos 與 Szeliski 曾利用最小平方法估計乘客用汽車的需要函數如下（註八）

$$S=0.92I^{1.07}P^{-0.74}T^{1.10} \qquad (5)$$

S：汽車換新銷售量（replacement sales of automobiles）

I：剩餘所得（supernumerary income）

P：一部汽車的平均價格

T：廢車指數

由上式可知，汽車需要的價格彈性爲（−0.74），所得彈性爲（1.07），後者大於前者，乃汽車等奢侈品通常具備的特性。

⑤式所獲結果，亦會遇到如同①式的問題。不過，假使這些數值是可靠的，那麼，當廢車增加百分之十時，新車需要將會增加大約百分之十一。因此，爲刺激新車的需要，政府可禁止一定年齡以上的汽車的行駛。這種辦法不但可以維持交通的安全，同時還可控制廢車的數量。

（六） L.R. Klein 的戰後英國向美元地區的輸出的分析

上學實例皆利用單一物品的資料，在此我們將提起 L. R. Klein 的另一高度總合性的需要函數。他根據一九四八年以來每三月爲一季的資料，利用最小平方法導出如下式之需要函數（註九）：

$$X\$t = -211.63 + 0.91\left(\frac{P\$}{P£}\right)_{t-1} + 2.27(P\$)_{t-1} - 14.86\theta_{1t} + 0.53\theta_{2t} + 1.00\theta_{3t} \qquad (6)$$

X$：英國對美元地區（美國，加拿大與拉丁美洲美元地區）的輸出量指數。

P$：美元地區非農產品批發物價指數）美國非農產品批發物價指數，加拿大製造物價指數與委內瑞拉輸入品一般物價指數的加權平均）

P£：英國輸出品物價指數

p$：美元地區工業生產量指數（美國與加拿大工業生產量指數以及委內瑞拉輸出量指數的加權平均）。

t：時間

θ_1：在第一季爲一、在其餘各季則爲零。

θ_2：在第二季爲一、在其餘各季則爲零。

θ_3：在第三季爲一、在其餘各季則爲零。

由⑥式可知，假使其他條件不變而相對價格指數變動百分之一，則會引起輸出量指數的大約〇•九％的變動。假使美元地區的物價較英磅地區的物價相對地上漲，英國輸出量會增加，相反的，英國輸出量卽會減少。p$ 的係數表示國際貨幣需要上的生產或所得效果。美元地區的生產量指數變動百分之一，則英國輸出量將會變動二•二七％。如所週知，國際貿易市場上的生產或所得效果顯然地超過其價格效果。至於 θ_{1t} 的係數則表示季節影響。各季數值如下：

第一季的數值　　-226.49（$=-211.63-14.86$）

第二季的數值　　$-211.10\ (=-211.63+0.53)$

第三季的數值　　$-210.63\ (=-211.63+1.00)$

第四季的數值　　-211.63

這些數值表示，假使我們考慮物價與生產的季節變動，則輸出指數在聖誕節後的第一季最低，在聖誕節前的第三季最高，其他二季則介在這兩個數值之間。

一般地說，輸出的增加有國內與國外的原因。不通，由上式可知，國外的所得或生產增加的效果遠超過國內的物價下降的效果。世界各國藉彼此之合作以維持經濟繁榮之重要性，由此可見。

（七）K. A. Fox 的美國猪肉需要的聯立方程式模型

令 p 爲猪肉價格，q 爲猪肉消費量，y 爲可用所得，z 爲猪肉生產量，u、v 爲機遇變數，Fox 構成如下之構造方程式（註十）：

需要函數　　$p=\frac{1}{b}q+cy+u$　　(7a)

供給函數　　$q=\beta p+\gamma z+v$　　(7b)

每一方程式都滿足適合認定的條件。由此，可獲其誘導方程式如下：

$$p=\left(\frac{cb}{b-\beta}\right)y+\left(\frac{\gamma}{b-\beta}\right)z+\left(\frac{bu+v}{b-\beta}\right)\qquad(8a)$$

$$q=\left(\frac{cb\beta}{b-\beta}\right)y+\left(\frac{b\gamma}{b-\beta}\right)z+\frac{b(\beta u+v)}{b-\beta}\qquad(8b)$$

就一九二二年到一九二四年的資料加以計算，則其誘導方程式爲

$$p=-.9581z+.9707y\qquad(8a')$$

$$q=+.8370z+.0641y\qquad(8b')$$

於是其構造方程式爲

$$p = -1.1447q + 0.8974y \qquad (7a')$$

$$q = -0.0660p + 0.7738z \qquad (7b')$$

(7a') 式各參數的意義，從上舉實例的說明自可類推，並且由上面的說明，當可瞭解，利用適當的資料測定的結果，對經濟政策可提供具體的判斷標準。

(八) 臺灣的貨幣需要函數

上舉實例皆屬於實物面的分析。最後，筆者擬就臺灣的貨幣需要作一統計測定。根據一九五二年到一九六四年的貨幣供給額，國民生產淨額，以及金融事業以外的信用借貸利率等統計資料，利用最小平方多元對數廻歸方程式配線，卽得（註十二）

$$\ln\frac{M}{p} = \ln a + b\ln r + c\ln\frac{y}{p} + u$$

$$= -2.53 - 0.56\ln r + 1.11\ln\frac{y}{p} + u$$

t 值		6.58	9.25
淨相關係數	−0.93		+0.94

M：貨幣供給額

r：金融事業以外的信用借貸利率

y：國民生產淨額

p：國民生產淨額平減指數

u：誤差項

上式之標準差爲〇•一，複相關係數爲〇•九三。因此，上式似乎表示對臺灣實際資料的良好的配合。而且由上式可知，就一

九五二年到一九六四年的期間而言，貨幣需要之利率彈性爲（−0.56），貨幣需要之眞實所得彈性則爲（+1.11）。這些結果顯然與貨幣理論上所獲結果不相矛盾。而且在上式，自由度爲十，利率彈性與眞實所得彈性的標準差各爲（0.085）與（0.12）。因此，在我們所測定的十三年間，在顯著水準爲百分之五之下，利率彈性的信賴限界是（−0.75）與（−0.37）。至於眞實所得彈性的信賴限界，則爲（+0.84）與（+1.38）。同時，進一步就利率與眞實所得計算其個別決定係數（coefficient of seperate determinants），我們又發現，百分之七十七的眞實貨幣餘額的變動得以眞實所得的變動加以說明。利率的變動則祇說明了百分之十九的眞實貨幣餘額的變動而已（註十二）。眞實所得的變動似乎是決定眞實貨幣餘額的較重要的因素。而且眞實所得的變動將會引起幅度較大的眞實貨幣餘額的變動。當然進一步的計量經濟分析，有待於國民所得與金融統計資料的改善以及國富統計的編製。

（註一）H.L. Moore, Economic Cycles: Their Law and Their Course New York, 1914, Forecasting the Yield and Price of Cotton, New York, 1917.

（註二）G. Tintner, Economitrics, pp. 36–43.

（註三）H. Schultz, The Theory and Measurement of Demand, Chicago, 1938, pp. 361ff

（註四）如果需要的價格彈性爲（−0.2143）而其標準差爲（0.0398），則七值爲 $t=\frac{b-\beta}{S}=\frac{-0.2143-\beta}{0.0398}$。在自由度爲十，顯著水準爲百分五之下，由七值表可知

$$[-2.228<t<+2.228]_{0.95}$$

或 $[-3.228<\frac{-0.2146-\beta}{0.0398}<+2.229]_{0.95}$

即 $[-0.3050<\beta<-0.1236]_{0.95}$

因此，以百分之九五之信賴指數（confidence index），我們可相信母羣體的價格彈性在（−0.3050）與（−0.1236）之間。

（註五）Sehultz, op. cit., pp. 582ff

（註六）R. Stone, "The Analysis of Market Demand" Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 108, 1945, pp. 1ff;

The Role of Measurement in Economics, Cambridge, 1951. pp. 71ff.

(註七) R.H. Whitman, "The Statistical Law of Demand for a Producer's Good as illustrated by the Demand for Steel," Econometrica, Vol. 4, 1936, pp. 138ff

(註八) C.F. Roos and V. von Szelisk, The Dynamics of Automobile Demand, Detroit 1939, pp. 21ff.

(註九) L.R. Klein, An Introduction to Econometrics, pp. 33-9.

(註十) K.A. Fox, Econometric Analysis for Public Policy, Iowa, 1958, pp. 69-73.

(註十一) 拙作：貨幣的需要與流通速度（中國財政第廿五期）。

(註十二) F.C. Mills, Statistical Methods, Third ed., New York: Holt, Rinehart and Winston, 1955, pp. 646~652.

結　語

在計量經濟分析上，需要函數的測定屬於最爲進步的部分。計量經濟學上的主要分析方法的問題，大致可以藉需要的統計分析作原則性的說明。本文由需要函數的基本概念，統計方法在需要分析上的應用，以及需要函數的若干實例等三章組成，大致概括了計量經濟學的主要內容。

在第一章，筆者根據現代計量經濟學者 L. R. Klein 的名著「計量經濟學導論」（An Introduction to Econometrics, N. J. 1962）的第二章，對需要函數的若干基本問題，如認定，其他條件不變的假定，需要函數的理論方程式，個別需要的總合，以及統計方程式上的誤差項的性質等問題加以扼要的檢討。在第二章，筆者將需要函數分成單一方程式體系與聯立方程式體系兩大類，就測定需要函數中各種參數之主要統計方法，諸如最小平方法，最大概似法與誘導法等加以簡單的說明，並附帶地提起檢定統計假設的方法。計量經濟學所以被認爲是，在經濟科學的一般領域裡，爲達到數值結果並檢定經濟理論而採取的特殊方法，其道理卽在於此。第三章，則主要根據 G. Tintner，選擇若干典型的實例，以說明計量經濟方法在需要

分析及經濟政策上的應用。

因限於時間與資料，筆者僅測定了臺灣的貨幣需要函數。至於臺灣主要產品的需要函數則未作具體的計量分析。不過，在今後經濟計劃的設計上，各產業部門的需要趨勢的預測必定構成極重要的部分。凡有生產卽能脫售的戰後復興期間已成過去，假使忽略國內外市場的需要，盲目的從事擴張，則任何產業都可能招致過剩生產，資本設備不能充分利用的危險。紡織業及若干農業品加工業等確已發生這種現象。假使發生過剩生產，資本設備不能充分利用，則個個產業不免要受損失，對國民經濟而言，也是一種資源的浪費。在可用資源極爲有限的臺灣，資源實不容有絲毫的浪費。爲避免這種浪費，各種物品與勞務的需要函數的測定與將來需要趨勢的預測，產銷計劃的釐訂，各個部門的更爲平衡的發展是非常重要的。

（本文之完成曾受國家長期發展委員會的補助，特誌於此，以表謝意）