國立政治大學社會科學學院經濟學系

碩士論文

Department of Economics

College of Social Sciences

National Chengchi University

Master Thesis

隨收隨付制年金與勞動內生化：疊代經濟的分析

Pay-as-you-go Pension and Endogenous Labor Supply in an Overlapping Generations Economy

黃宇諒

Huang, Yu-Liang

指導教授： 賴景昌 博士

Advisor: Lai, Ching-Chong, Ph.D.

中華民國 105 年 7 月

July, 2016

謝辭

時間過得真快，明明才感覺剛大學畢業要進入研究所就讀，轉眼間研究生的生涯也要結束了。回想起來，大學時唸的是物理系，但是研究所卻跨考了經濟所，差異如此大的兩個科系，更讓我覺得這段求學的旅程是多麼的不可思議。

這篇論文能夠完成，首先要感謝我的指導教授賴景昌老師，感謝老師在寫作論文的過程中，給予了我許多的幫助，要是沒有老師的幫忙，我的論文可能寫不出來，當口試前一個禮拜，發現論文模型有一個大問題的時候，真的很緊張，很害怕不能畢業，結果老師隔天就拿了一篇論文和我說：「你的問題我幫你解決了，這篇文章裡就有你遇到的問題。」當老師笑著說，全台灣除了我可能沒幾個人知道你該怎麼辦的時候，我真的覺得老師好帥！而我也是在那個時候才真正感受到特聘研究員這五個字的意義是多麼的強大。除了學問之外，老師的圓融的處事態度還有凡事提早準備的做事方法也對我影響很深，這些都是我這一年來跟在老師身邊學到的東西，能遇到像老師這樣好的老闆真的是我當研究生的福份。

另外，也很感謝政治大學的洪福聲老師及東海大學的朱巡老師，在百忙之中撥空參與口試，給予我非常多寶貴有用的意見，讓我的論文內容能更加的完整充實。

感謝政治大學的老師們兩年來的教導，以及系辦的賀翔助教平日在各種事務上的協助。此外，也要感謝平河學長、世夫學長、玫英學姐、偉奇學長以及好戰友閔傑、宗霖、鎧勵、孝容、聖沛，在中研院的這一年內，給予我許多鼓勵及幫助，論文其實就是在每天去買飯和吃午餐聊天中，一點一滴討論出來的。

最後，要感謝我的家人，當初在我毅然決然決定跨考的時候，仍然不遺餘力的支持我，就是有家人的支持，才能讓我無後顧之憂地順利完成學業。

黃宇諒 謹誌於

國立政治大學經濟學研究所

中華民國一百零五年七月

摘要

本文擬修改 Heijdra (2009)的模型假設，並參考 Ihori (1996)與金志婷 (2011)的處理方式，建立一個以線性所得稅融通之隨收隨付年金的疊代模型。在考慮勞動外生化以及勞動內生化兩種情況下，分別探討所得稅率變動以及人口成長率變動將會如何影響經濟體系的總體均衡，並得到以下結果：

一、勞動外生化模型中，政府提高隨收隨付年金的所得稅率將會影響民眾的儲蓄行為而不利於每人資本的累積。

二、不同於 Heijdra (2009)勞動供給量為常數的結果，本文的勞動內生模型將涉及勞動的差分方程式。同時，在總體均衡下此經濟體系會存在多重均衡，而發生均衡的不確定性，當政府提高所得稅率，將會造成長期均衡的勞動量和資本勞動比都同時降低。

三、不論勞動外生或是勞動內生模型，人口成長率降低皆有助於每人資本及資本勞動比的增加。

關鍵字：隨收隨付年金、疊代模型、勞動外生化、勞動內生化、不確定性

Abstract

Based on the Ihori (1996) analysis, this thesis makes a revision from Heijdra (2009), and develops a simple two-period overlapping-generations model with a Pay-as-you-go pension and linear income taxation. This thesis then analyzes the dynamic properties of the model and how the change in the income tax rate and the population growth rate affect the household's optimizing behavior and the economy's capital accumulation. The analysis includes both the exogenous labor supply case and the endogenous labor supply case.

Several main findings emerge from the analysis. First, in the presence of exogenous labor supply, a rise in the income tax rate leads to a negative impact on private savings and decreases physical capital per capita. Second, in the presence of endogenous labor supply, running in contrast to Heijdra (2009), labor supply would not be a constant but relates to its amount in the next period. As a result, coupled with the difference equation in capital-labor ratio, the simultaneous difference equations in both labor supply and capital-labor ratio are present in the overlapping-generations model. By imposing some plausible conditions, it is found that the overlapping generations economy exhibits local indeterminacy and a rise in the income tax rate would reduce both the capital-labor ratio and labor supply in the long run. Third, a reduction in the population growth rate would stimulate both physical capital per capita and the capital-labor ratio, regardless of whether labor supply is exogenous or endogenous.

Keywords: Pay-as-you-go pension, overlapping-generations model,
exogenous labor supply, endogenous labor supply, indeterminacy

目錄

圖目錄

第一章 緒論

第一節 研究動機

近年來，由於醫療技術的進步以及生活品質的提升，人口老化已成為已開發國家的趨勢。根據台灣行政院主計總處國情統計通報 (2015)，近二十年來，台灣國人的平均壽命已從 1984 年的 70.5 歲上升至 2014 年的 79.8 歲，老化指數高達 91.6[1]。除了高齡化的問題外，我國出生率亦不斷地下降，幼年人口從 2005 年的 426.9 萬降至 2015 年的 319.3 萬，十年間幼年人口減少逾百萬人，隨著人口高齡化以及生育率降低，對於未來壯年人口扶養老人的負擔勢必會更加沉重。因此，近年來，有關老人福利政策以及社會安全保險的探討已成為一個備受關注的重要議題。

美國於 1935 年通過社會安全法案，提供年金保險制度，以保障退休勞工的基本生活。根據賴景昌 (2011，頁 578)的定義，「年金是指，參與社會安全保險者，每年獲得的定期而且持續的給付。當中，定期是指，參與社會安全保險者可以按月、按季、甚或按年請領給付；持續則是指，參與社會安全保險者在滿足特定條件下[2]，可以終身請領給付」。

隨著國人平均壽命延長，出生率降低，我國已邁入聯合國世界衛生組織所定義的高齡化社會，根據勞動部勞工保險局估計，至 2026 年時，我國的老年人口將占全國人口的百分之二十。此外，由於社會結構的變遷與家庭生活型態的改變，傳統家庭扶養老人的功能正逐漸式微，因此，提供國民老年的基本生活保障，將成為我國社會安全體系中重要的一環。

---

[1] 老化指數＝（65 歲以上人口）/（14 歲以下人口）*100，為衡量一地區人口老化程度的重要指標。我國 2015 年 14 歲以下幼年人口為 319.3 萬，佔總人口數的 13.6%，而 65 歲以上老年人口為 292.4 萬，佔總人口數的 12.5%，因此該年的老化指數為 91.6。

[2] 例如年滿 65 歲或遭遇重度以上身心障礙等。

以往我國有軍保、公保、農保、勞保等以在職工作者為納保對象的社會安全保險，但是仍有多達三百多萬 25 歲以上、65 歲以下的國民，無法參加任何的社會安全保險，而這些人中，不乏無工作者及家庭主婦等經濟弱勢族群。國民年金制度即是針對這方面的不足，設計一個以全體國民為受保對象的保險制度，讓以往未能被納入社會安全保險體系的國民，也能享有社會安全保險的福利。而採用年金的型式辦理，則可避免年金在一次性給付後，受保人因資金使用不當而造成的損失，同時，年金制度亦具有配合物價指數調整的性質，這樣的特性可以避免通貨膨脹所帶來的損失，以確保受保人的生活無虞。

我國於 2008 年 10 月開辦國民年金制度，主要納保對象為 25 歲以上、65 歲以下，在國內設有戶籍，且沒有參加軍保、公保、農保及其他社會安全保險的國民。國民年金提供包含老年年金、身心障礙年金、遺屬年金在內的三大年金給付，以及生育給付、喪葬給付兩種一次性給付。受保人只要按時繳納保費，即可在生育、遭遇重度以上身心障礙、死亡事故，以及年滿 65 歲時，依照規定請領相關的年金給付或者一次性給付。

然而，近年來，政府的財政收支緊絀，中央政府的負債比率已經逼近40.6%的法定債限，沉重的債務壓力使得年金體系的運行日益困難。同時，人口老化與出生率降低更是讓原本瀕臨崩潰的年金體系遭遇更大的挑戰，年金改革的聲浪日益高漲，基於上述所面臨的情況，促使我們有動機進行國民退休年金等相關議題的討探與研究。

第二節 文獻回顧

為了探討國民退休年金對總體經濟所造成的影響，必須考慮經濟體系裡同時存在在職勞工以及退休人口兩個世代；而在同時具備多個世代的模型中進行分析，文獻上稱之為疊代 (overlapping generations)。疊代的經濟模型主要可分為以下兩

種:1.Diamond (1965)與 Samuelson (1958)的間斷時間疊代模型; 2. Yaari (1965)、Blanchard (1985)、Buiter (1988)與 Weil (1989)的連續時間疊代模型。其中，間斷時間疊代模型一般假設代表性個人存活兩期：第一期是年輕世代，參與在職工作；第二期是年老世代，退休在家休養。

而連續時間模型則假設代表性個人在任何時點的瞬間死亡機率為常數，且任一期出生的人數佔當期總人口數的比值亦為定值。Blanchard (1985)將總人口數單位化為一，因此，每單位時間的死亡機率等於出生率。Buiter (1988)則放寬這個假設，令每單位時間的死亡機率不等於出生率，因而在他的分析架構下，人口將會成長。Weil (1989)則假定任何個人皆存活無窮期，也就是死亡的機率為零。由於本文設定年輕世代參與在職工作而年老世代退休在家休養，為了著重這兩個世代的行為分析，因此選用 Diamond (1965)與 Samuelson (1958)的間斷時間疊代模型，做為本文的主要分析模型。

一般而言，社會安全退休年金的財源籌措方式有兩種：第一種是提存準備制 (fully funded system)，這種制度是指：政府在勞工工作的期間，對勞工及其雇主同時課徵保費，並將取得的資金設立專門的基金帳戶，等勞工退休後，再以年金的型式給付勞工。第二種是隨收隨付制 (pay-as-you-go system)，這種制度則是指：政府向在職工作的勞工收取保費的同時，立即以年金的型式給付給當年退休的勞工，而不再設立專門的基金帳戶。

與隨收隨付制相比，由於提存準備制參與社會安全保險的勞工，是在年輕在職期間繳交保費，而在年老退休期間領回年金，因此提存準備制並不涉及跨代間的移轉；而隨收隨付制卻是政府向當年在職工作的勞工收取保費，立即以年金的型式給付給當年退休的勞工，因此將涉及跨代間的移轉。跨代移轉的涉及與否，為這兩種年金體制的最大不同之處。

在研究國民退休年金財源措籌方式的文獻中，關於隨收隨付年金制與提存準備年金制的優劣比較，曾出現以下幾種的論述：1.隨收隨付年金制恆等於提存準

備年金制，例如，Sheshinski and Weiss (1981)、Valde´z-Prieto (1997)與 Belan and Pestieau (1997)在藉由公債調整以固定跨代之間所得分配的情況下，兩種年金制度將有同樣的效果而無差異；2.隨收隨付年金制優於提存準備年金制，例如，Pollard and Pecchenino (1997) 指出隨收隨付年金制可降低投資風險而優於提存準備年金制；3.提存準備年金制優於隨收隨付年金制，例如，Kotlikoff (1996)、Altig and Gokhale (1997)、Feldstein and Samwick (1998)等實證結果表示隨收隨付年金制將削弱在職勞工的工作意願，Belan et al. (1998)說明提存準備年金制可以矯正生產的外部性。

金志婷 (2011)以不同的財政政策為指標，進行一系列隨收隨付年金制與提存準備年金制的比較，並得到以下結論：1.不論財政政策指標為釘住固定的政府支出規模或者釘住固定的勞動所得稅率，隨收隨付年金制都將使得經濟成長率降低、提升年老世代福利而降低未來世代的福利；2.若以固定政府支出規模為政策指標，隨收隨付年金制將不利於當代年輕世代的福利，而以固定勞動所得稅率為政策指標，隨收隨付年金制則有利於年輕世代福利的提升；3.若以固定政府支出規模為政策指標，提存準備年金制將完全不會對經濟成長以及社會福利帶來任何的影響；4.若政策的指標為固定勞動所得稅率，提存準備年金制對經濟成長、年輕世代福利、未來世代的福利皆有正面的影響。

退休年金給付不僅會影響民眾當期的消費及儲蓄行為，同時，也會影響民眾的勞動供給決策，為了探討退休年金與民眾勞動供給決策之間的關係，將勞動內生引入疊代模型勢在必行。此外，有鑑於人口成長率降低以及提存準備制不涉及跨代移轉的事實，必須選擇隨收隨付制做為分析模型才能探討人口成長率降低對經濟體系造成的影響。綜合上述的原因，Heijdra (2009，頁 609-618)建立了一個勞動內生化的隨收隨付制年金經濟體系，同時以勞動所得稅的方式融通其年金支付，並分析所得稅率變動對經濟體系相關變數的影響。惟 Heijdra (2009)的模型在考慮分權解的情況下，代表性個人決策的處理方式將下一期的年金視為內生變

數代入求解，有違單一的代表性個人無法影響整體政府行為的經濟邏輯。

Ihori (1996，頁 228-232)與金志婷 (2011)在考慮分權解的情況下，則是將下一期領到的年金當作外生給定，與一般代表性個人無法影響政府行為的經濟邏輯相符。據此，本文修改了 Heijdra (2009)的代表性個人最適化處理方式，並參考 Ihori (1996)與金志婷 (2011)的分析方法，建構了一個隨收隨付年金制的疊代經濟模型，並著重探討當政府提高年金的保費費率與以及發生外生人口成長率降低，將會對經濟體系帶來何種影響。

第三節 本文架構

本文的架構共分為四章。第一章為緒論，介紹研究動機與相關文獻回顧。第二章則建構一個勞動外生化的疊代經濟模型，並分別探討隨收隨付年金的保費費率變動，以及人口成長率變動，將會對經濟體系的總體均衡造成何種影響。第三章則建構一個勞動內生化的疊代經濟模型，分析隨收隨付年金的保費費率變動，以及人口成長率變動，將會對經濟體系的總體均衡造成何種影響。最後，第四章綜合本文做出結論。

第二章 勞動外生化的理論模型

本文以 Ihori (1996)與金志婷 (2011)及 Heijdra (2009)的模型為基礎，建立一個由家計部門、廠商以及政府所組成的疊代經濟模型，並探討當政府提高隨收隨付制年金的保費費率，以及外生人口成長率降低時，將會對經濟體系的總體均衡造成何種影響。本章擬以勞動外生化的假定進行分析，接下來我們將依序描述這些部門的行為決策。

第一節 模型架構

假定經濟體系中的代表性個人存活兩期，在第t期時為年輕世代參與在職工作，在第$t+1$期時退休成為年老世代，該代表性個人的目標為追求終身效用折現極大。則其效用函數可以表示如下：

$$\Lambda_t^i \equiv lnc_t^{Yi} + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \;；\rho > 0 \tag{2.1}$$

式中c_t^{Yi}表示代表性個人i在第t期，年輕工作時的消費；c_{t+1}^{Oi}表示代表性個人i在第$t+1$期，年老退休時的消費，ρ代表時間偏好率。

在考慮隨收隨付制的年金體制下，第i個代表性個人將會面臨以下的兩期預算限制式：

$$c_t^{Yi} + s_t^i = w_t - \tau w_t = (1-\tau)w_t \tag{2.2}$$

$$c_{t+1}^{Oi} = (1+r_{t+1})s_t^i + z_{t+1}^i \tag{2.3}$$

其中，s_t^i為代表性個人i在第t期的儲蓄決策，w_t為第t期市場的工資水準，而τw_t則表示政府向年輕世代所收取的社會安全保險費用，τ為保費的費率。由於保費收取的型式為勞動所得的某一固定比例τ，因此，保費費率τ亦可視為所得稅稅率。r_{t+1}為第$t+1$期市場的利率水準，z_{t+1}^i表示代表性個人i在第$t+1$期退休時，可以領到一筆由政府給付的退休年金。

將式 (2.2)、(2.3)合併，可推得第i個代表性個人的終身預算限制式為：

$$c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} = w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^{i}}{1+r_{t+1}} \tag{2.4}$$

由於勞動外生模型裡時間稟賦單位化為一，因此稅後工資率$w_t(1-\tau)$就表示了代表性個人的稅後所得；$\frac{z_{t+1}^{i}}{1+r_{t+1}}$則表示代表性個人$i$在下一期所拿到的退休年金的折現值，兩者的相加即為代表性個人i的終身所得，因此式 (2.4)的經濟意義為：代表性個人終身消費的折現值會等於其終身所得的折現值。

準此，第i個代表性個人的最適決策可以表示如下：

$$Max\ \Lambda_t^i = lnc_t^{Yi} + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \tag{2.5}$$

$$s.t.\ c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} = w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^{i}}{1+r_{t+1}} \tag{2.6}$$

上述兩式表示，代表性個人i在受限於終身預算限制式之下，選擇兩期的消費c_t^{Yi}、c_{t+1}^{Oi}以追求終身的效用極大。依據上述的最適決策，可以設定以下的 Lagrange 函數L進行求解：

$$L = lnc_t^{Yi} + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} - \lambda_t\left(c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} - w_t(1-\tau) - \frac{z_{t+1}^{i}}{1+r_{t+1}}\right) \tag{2.7}$$

上式中，λ_t為拉氏乘數因子 (Lagrange multiplier)，則依據式 (2.7)，我們可以推得最適的一階條件如下：

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^{Yi}} = \frac{1}{c_t^{Yi}} - \lambda_t = 0 \tag{2.8.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^{Oi}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} = 0 \tag{2.8.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = -c_t^{Yi} - \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} + w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^{i}}{1+r_{t+1}} = 0 \tag{2.8.3}$$

將式 (2.8.1)、(2.8.2)兩式相除可得：

$$\frac{c_t^{Yi}}{c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}} \tag{2.9}$$

上式即為 Euler 方程式，表明了第i個代表性個人兩期之間消費的抵換關係。由式 (2.9)可知，當等式右邊的時間偏好率ρ上升時，等式左邊的當期消費c_t^{Yi}也會增加，這符合了時間偏好率較大的代表性個人會想提前消費的經濟特性；而等

式右邊的利率r_{t+1}上升時，等式左邊的下一期消費c_{t+1}^{Oi}會對應增加，這表示了當市場利率較高時，代表性個人會有較高的儲蓄意願[3]，而下一期消費恰好又為本期儲蓄在下一期的本利和，因此利率上升會造成下一期的消費對應增加。

將式 (2.9)代入式 (2.8.3)可解得兩期消費分別為：

$$c_t^{Yi} = \frac{1+\rho}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{2.10}$$

$$c_{t+1}^{Oi} = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{2.11}$$

由式 (2.6)可知$w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}$表示的是第$i$個代表性個人的終身所得，準此，上式消費決策的經濟意義可以解釋如下：代表性個人將終身所得的$\frac{1+\rho}{2+\rho}$比例用於年輕時的消費，而剩餘的$\frac{1}{2+\rho}$比例則分配於儲蓄，此比例乘上$1+r_{t+1}$倍就是代表性個人在年老時可以拿到的儲蓄本利和，同時也就是代表性個人在年老時的消費。

此外，我們也可以看出時間偏好率ρ所代表的意義，當$\rho = 0$時，$\frac{1+\rho}{2+\rho}$趨近於$\frac{1}{2}$，這表示對於完全沒有時間偏好的代表性個人而言，兩期消費是無異的，他將會把他的終身所得平均分配於當期的消費和當期的儲蓄；另一個極端的例子是，當ρ趨近於無窮大時，$\frac{1+\rho}{2+\rho}$將趨近於一，這表示代表性個人會把全部的終身所得都用於當期的消費；而不會從事任何的儲蓄行為，從數學式來看，此時儲蓄的比例$\frac{1}{2+\rho}$將趨近於零，這也印證了代表性個人不會儲蓄的結果。

---

[3] 事實上 logarithmic 型式效用函數的所得效果會等於替代效果，因此利率並不會影響消費及儲蓄行為，但在考慮隨收隨付年金制度下，代表性個人終身所得裡會包含一筆下一期政府給付的年金，而這筆年金在當期計算時，必須透過利率來折現，因此利率將影響代表性個人的儲蓄行為。而儲蓄函數可表示為：$s_t = \frac{1-\tau}{2+\rho}w_t - \frac{1+\rho}{2+\rho}\left(\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right)$，由此式可知$\frac{\partial s_t}{\partial z_{t+1}^i} < 0$。會有這樣的結果原因在於：隨收隨付年金制是一種政府在這一期向民眾收取保費，並在下一期發還年金的制度，因此該制度可視為一種政府強迫民眾儲蓄的概念，而當民眾預期政府會強迫儲蓄時，則勢必會減少該期的私人儲蓄做為因應，也就造成了$\frac{\partial s_t}{\partial z_{t+1}^i} < 0$的結果。

廠商的生產函數為新古典生產函數，產出Y_t為總勞動人口N_t[4]和資本K_t的一次齊次函數，採用 Cobb-Douglas 的型式：

$$Y_t = F(N_t, K_t) = N_t^{\epsilon} K_t^{1-\epsilon} \tag{2.12}$$

準此，廠商的利潤函數可表示如下：

$$\pi_t = F(N_t, K_t) - w_t N_t - r_t K_t \tag{2.13}$$

在廠商追求利潤極大的目標下，可推得廠商雇用的勞動和資本的一階最適條件為：

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial N_t} = \epsilon N_t^{\epsilon-1} K_t^{1-\epsilon} - w_t = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} = (1-\epsilon) N_t^{\epsilon} K_t^{-\epsilon} - r_t = 0 \tag{2.15}$$

上述兩式表示，廠商將雇用勞動與資本直到該要素的邊際生產力等於該要素的市場價格為止[5]。此外，若我們將產出和資本都改寫成每人產出以及每人資本的型式，即$y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t}$[6]、$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t}$則工資水準及利率水準亦可表示為：

$$w_t = \epsilon k_t^{1-\epsilon} \tag{2.16}$$

$$r_t = (1-\epsilon)\, k_t^{1-\epsilon} \tag{2.17}$$

在實施隨收隨付制年金的架構底下，政府將對年輕的在職工作勞工收取保費，並將這筆費用支付給年老的退休勞工作為年金。準此，政府的預算限制式可以表示如下：

$$\sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i = \sum_{i=1}^{N_t} \tau w_t \tag{2.18}$$

上述的預算限制式也反映了隨收隨付制的特色：當期政府支付給年老退休勞工的年金來自於當期政府向年輕在職勞工所收取的保費。其中N_{t-1}、N_t分別為第$t-1$

[4] 一般而言，廠商決策為雇用最適的勞動工時與資本，以追求利潤極大，惟考慮勞動工時l外生時間稟賦為一的情況下，此時的總勞動工時Nl會退化為文中的總勞動人口N。

[5] 僅管本文考慮完全折舊的情況，但由於持有資本的是家計部門的年老世代而非廠商，廠商僅只是向持有資本的年老世代租借機器設備、廠房、建築物等資本進行生產，因此資本的折舊將不是廠商由負擔。準此，廠商的的利潤函數裡，將不存在折舊。

[6] 根據定義，我們亦可得每人產出與每人資本的關係式為：$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = \frac{N_t^{\epsilon} K_t^{1-\epsilon}}{N_t} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{1-\epsilon} = k_t^{1-\epsilon}$。

期和第t期的勞動人口。

社會的資本累積式可由以下的方法推得，首先，在考慮完全折舊的情況下，產出等於總合消費加上投資：

$$Y_t = C_t + I_t = C_t + K_{t+1} \tag{2.19}$$

而社會的總合消費又可細分為年輕世代的總消費以及年老世代的總消費，數學式表示如下：

$$\begin{aligned} C_t &= N_{t-1}c_t^O + N_t c_t^Y \\ &= r_t K_t + N_{t-1}z_t + N_t(w_t - s_t - \tau w_t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

式 (2.20)中，由於年老世代持有資本[7]，而且考慮完全折舊，其消費就來自於租借資本的租金以及政府給付的退休年金；而對年輕世代而言，勞動工資扣除掉儲蓄以及繳交的保費後即為個人的可支配所得，再乘上勞動人口數N_t，所對應的就是年輕世代的總消費。整體社會的總合消費即為年輕世代的總消費和年老世代的總消費兩者加總。

結合式 (2.19)、(2.20)可以推得：

$$\begin{aligned} Y_t &= r_t K_t + N_{t-1}z_t + N_t(w_t - s_t - \tau w_t) + K_{t+1} \\ &= r_t K_t + (N_{t-1}z_t - N_t\tau w_t) + N_t(w_t - s_t) + K_{t+1} \\ &= r_t K_t + N_t(w_t - s_t) + K_{t+1} \end{aligned} \tag{2.21}$$

由於政府支付給年老世代的年金來自於政府向年輕世代所收取的保費，因此，$N_{t-1}z_t - N_t\tau w_t$這一項為零，這也意味著隨收隨付制年金其實可視為一種移轉性支付。此外，假定廠商生產並無超額利潤，其產出全部用於支付生產產品時所投入的要素成本，意即：

$$Y_t = r_t K_t + N_t w_t \tag{2.22}$$

[7] 代表性個人在年輕時選擇消費以及儲蓄，而在本文的架構下，儲蓄的手段就是去購買機器設備、廠房、建築物等資本，並且租借給廠商。準此，代表性個人在年輕時透過儲蓄行為來持有資本，並且在下一期年老時得到租借資本的報酬。

結合式 (2.21)、(2.22)可以推得：

$$N_t s_t = K_{t+1}\text{[8]} \tag{2.23}$$

上式即為資本累積式，表示這一期在職勞工的儲蓄行為將會形成下一期資本存量的累積。

第二節 總體均衡

在長期總體均衡時，由於對稱均衡的結果，式 (2.18)的政府預算限制式可以改寫如下：

$$z_t = \tau(1+n)w_t \tag{2.24}$$

其中$(1+n) = \frac{N_t}{N_{t-1}}$，$n$為人口成長率[9]，假設為定值。在本文中，所得稅率τ為外生的情況下，年金z就視為內生，表示政府藉由z的調整來維持預算的平衡。而由上式亦可看出隨收隨付式的優點，若人口成長率大於零，則代表性個人在下一期收到的年金將會大於在這一期所繳交的保費。由式 (2.24)亦可得：

$$z_{t+1} = \tau(1+n)w_{t+1} \tag{2.25}$$

另由資本累積式$N_t s_t = K_{t+1}$可以推得：

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \tag{2.26}$$

據此，可將本節模型的總體均衡條件表示如下：

$$\frac{1}{c_t^Y} = \lambda_t \tag{2.27.1}$$

$$\frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^O} = \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} \tag{2.27.2}$$

$$c_t^Y + \frac{c_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = w_t(1-\tau) + \frac{z_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{2.27.3}$$

$$w_t = \epsilon k_t^{1-\epsilon} \tag{2.27.4}$$

---

[8] 在一般的情形下，資本累積式應為：$S_t = N_t s_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t = I_t$，表示投資等於民眾的儲蓄，在考慮完全折舊$\delta = 1$的情況下，上式將退化為本文的式 (2.23)，意即本文的資本累積式僅只是上式$\delta = 1$的特例。

[9] $n = \frac{N_t}{N_{t-1}} - 1 = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}}$為人口成長率。

$$r_t = (1-\epsilon)k_t^{-\epsilon} \tag{2.27.5}$$

$$z_{t+1} = \tau(1+n)w_{t+1} \tag{2.27.6}$$

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \tag{2.27.7}$$

在長期總體均衡下，以上七個方程式求解c_t^Y、c_{t+1}^O、λ_t、w_t、r_t、z_{t+1}、k_t七個內生變數，其中k_t變數涉及差分方程。

接下來，我們將求解式 (2.27.7)的差分方程式。首先，由式 (2.3)可知：$s_t = \frac{c_{t+1}^O - z_{t+1}}{1+r_{t+1}}$，再將式 (2.11)、(2.25)代入式 (2.26)，即可得到每人資本的差分方程式如下：

$$\frac{1-\tau}{2+\rho}w_t - \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)w_{t+1}}{1+r_{t+1}} = (1+n)k_{t+1} \tag{2.28}$$

將此式在靜止均衡點做一階線性泰勒展開，可以得到：

$$\left\{(1+n)(2+\rho) + \beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}} + \frac{\widetilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]\right\}\left[k_{t+1} - \tilde{k}\right] = \epsilon(1-\tau)\tilde{r}\left[k_t - \tilde{k}\right] \tag{2.29}$$

為了便於書寫，我們令$\beta = \epsilon\tau(1+\rho)(1+n) > 0$，$\tilde{k}$、$\widetilde{w}$、$\tilde{r}$為每人資本、工資和利率的靜止均衡值，於靜止均衡時，$\widetilde{w}$、$\tilde{r}$分別為：

$$\widetilde{w} = \epsilon\tilde{k}^{1-\epsilon} \tag{2.30}$$

$$\tilde{r} = (1-\epsilon)\tilde{k}^{-\epsilon} \tag{2.31}$$

參考自 Gandolfo (1980)的方法，此差分方程式的一般解我們令為：

$$k_t = \tilde{k}(\tau, n) + A\eta^t \tag{2.32}$$

上式中，η為此差分方程式的特性根，而等號右邊第一項為差分方程的特殊解 (particular solution)，該解由所得稅率、人口成長率等外生變數的長期均衡值所組成，反映了市場基要 (market fundamentals)。另外等號右邊的第二項為差分方程的齊次解 (homogeneous solution)，A則為待解參數。

由式 (2.32)我們亦可知，$k_{t+1} = \tilde{k} + A\eta^{t+1}$，據此可推得以下數學式：

$$k_{t+1} - \tilde{k} = \eta\left(k_t - \tilde{k}\right) \tag{2.33}$$

將式 (2.33)代入式 (2.29)，可以解得η為：

$$1 > \eta = \frac{\epsilon(1-\tau)\tilde{r}}{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]} 0 \tag{2.34}$$[10]

至此，可以求得每人資本k_t的一般解為：

$$k_t = \tilde{k}(\tau,n) + A\eta^t = \tilde{k}(\tau,n) + A\left\{\frac{\epsilon(1-\tau)\tilde{r}}{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]}\right\}^t \tag{2.35}$$

解出了模型的一般解之後，接下來，我們將利用圖 2.1 說明k_t的動態調整過程，並探討該經濟體系的動態安定性。

如圖 2.1 所示，我們先將所有滿足式 (2.28)的k_{t+1}與k_t的組合繪於k_{t+1}與k_t的平面，這些組合所形成的軌跡稱之為KK線。由於$k_{t+1} = k_t = 0$會滿足式 (2.28)，因此KK線將會通過圖 2.1 的原點。另外，由式 (2.33)、(2.34)可以推得：

$$1 > \frac{k_{t+1}-\tilde{k}}{k_t-\tilde{k}} = \eta > 0 \tag{2.36}$$

式 (2.36)表示，在靜止均衡點KK線的斜率值會小於一，這證明了此靜止均衡點具有動態安定的性質，而靜止均衡點斜率值$\frac{\Delta k_{t+1}}{\Delta k_t}$小於一的這個結果，我們以虛線表示於圖 2.1。

接下來將說明動態調整的過程，在圖 2.1 中，假定期初的每人資本為k_0，由於KK線為滿足所有k_{t+1}與k_t的軌跡組合，因此可以知道下一期的每人資本會對應增加至k_1，表示於圖中的 A 點。以 45 度線做為輔助線，此線具有$k_{t+1} = k_t$的特性，則 B 點對應的每人資本恰好就為k_1，再一次利用KK線的性質，則下一期的每人資本會再度增加至k_2，表示於圖中的 C 點。不斷重覆上述的過程，我們可以知道，在經濟體系的動態調整的過程中，每人資本k_t會隨著時間不斷增加，然而其增加並非沒有限制，最終每人資本會逐漸收斂到某個靜止均衡點E_0[11]，此時對應的每人資本為$\tilde{k}$。

[10] η的分母$(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right] > 2$；而$\eta$的分子$\epsilon(1-\tau)\tilde{r} < 1$，因此我們可以知道$\eta$的範圍：$0 < \eta < 1$。

[11] 由於靜止均衡時，經濟體系滿足$k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$的特性，因此靜止均衡點必落在$KK$線與 45 度線相交之處。

第三節 所得稅率變動的比較靜態分析

由式 (2.25)可知，所得稅率及人口成長率這兩個外生變數都會對下一期的年金造成影響。準此，第三節與第四節將進行所得稅率變動及人口成長率變動的比較靜態分析。本節擬先在勞動外生化的隨收隨付制年金體系中，探討提高所得稅率τ將會對新的靜止均衡造成何種影響。首先，在靜止均衡時，以下的方程式必然成立：

$$\frac{1-\tau}{2+\rho}\tilde{w}-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}=(1+n)\tilde{k} \tag{2.37}$$

將上式對$\tilde{k}$、τ進行全微分，整理可得：

$$-\left[\tilde{w}+\frac{(1+\rho)(1+n)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}\right]d\tau=\left\{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]-\epsilon(1-\tau)\tilde{r}\right\}d\tilde{k} \tag{2.38}$$

由式 (2.34)，可以推得以下條件：

$$(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]>\epsilon(1-\tau)\tilde{r} \tag{2.39}$$

根據式 (2.38)、(2.39)，我們可以確定所得稅率和靜止均衡的每人資本，兩者之間的變動關係為：

$$\frac{d\tilde{k}}{d\tau}=-\frac{\tilde{w}+\frac{(1+\rho)(1+n)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}}{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]-\epsilon(1-\tau)\tilde{r}}<0 \tag{2.40}$$

依據上式可以推論，當政府提高隨收隨付制年金的所得稅率時，將造成每人資本的長期靜止均衡值下降，這樣的結果，我們可由民眾的儲蓄函數著手進行探討，首先，將式 (2.28)的儲蓄函數重述如下：

$$s_t=\frac{1-\tau}{2+\rho}w_t-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)w_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{2.28}$$

將上式對所得稅率進行微分可得：

$$\frac{\partial s_t}{\partial\tau}=-\frac{w_t}{2+\rho}-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{(1+n)w_{t+1}}{1+r_{t+1}}<0 \tag{2.41}$$

由上式可知，政府提高所得稅率將會導致民眾儲蓄量的降低，而不利於每人資本累積。於圖 2.2 中，所得稅率的提高將對應著KK線的下移，使得原本均衡

點E_0脫離了靜止均衡，因此下一期的每人資本將降低為k_0'，表示於圖中的E_0'。類似於上一節的分析，我們可以知道，此動態調整過程每人資本會不斷的減少，直到達成新的靜止均衡點E_1為止，此時對應的每人資本為$\tilde{k}_1$。此外，由於每人資本的降低，亦可推知所得稅率提高將造成新的均衡工資下降而均衡利率提高。

第四節 人口成長率變動的比較靜態分析

有鑑於近年來，已發展國家出生率降低的事實，本節擬探討在勞動外生化的隨收隨付制年金體系中，人口成長率n降低，將會對新的靜止均衡造成何種影響。首先，在靜止均衡時，式 (2.37)必然成立，我們將式 (2.37)重述如下：

$$\frac{1-\tau}{2+\rho}\tilde{w}-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}=(1+n)\tilde{k} \tag{2.37}$$

將上式對n、$\tilde{k}$進行全微分，整理可得：

$$-\left[(2+\rho)\tilde{k}+\frac{\tau(1+\rho)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}\right]dn=\left\{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]-\epsilon(1-\tau)\tilde{r}\right\}d\tilde{k} \tag{2.42}$$

根據式 (2.38)、(2.42)的結果，我們將確定人口成長率和靜止均衡的每人資本，兩者之間的變數關係為：

$$\frac{d\tilde{k}}{dn}=-\frac{(2+\rho)\tilde{k}+\frac{\tau(1+\rho)\tilde{w}}{1+\tilde{r}}}{(1+n)(2+\rho)+\beta\left[\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}+\frac{\tilde{w}\tilde{r}}{(1+\tilde{r})^2\tilde{k}}\right]-\epsilon(1-\tau)\tilde{r}}<0 \tag{2.43}$$

依據上式可以推論，人口成長率降低時將造成每人資本的長期靜止均衡值上升，類似於上一節的分析，這樣的結果亦可由民眾的儲蓄函數著手進行分析，我們將式 (2.28)的儲蓄函數重述如下：

$$s_t=\frac{1-\tau}{2+\rho}w_t-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)w_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{2.28}$$

將上式對人口成長率進行微分可得：

$$\frac{\partial s_t}{\partial n}=-\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau w_{t+1}}{1+r_{t+1}}<0 \tag{2.44}$$

由上式可知，人口成長率降低將會導致民眾儲蓄量的上升，利於每人資本累

積。其經濟邏輯為：人口成長率降低將使得下一期每人分到的資本增加，因此代表性個人將有誘因增加儲蓄量，而造成每人資本增加的結果。在圖 2.3 中，人口成長率的降低將對應著KK線的上移，此時原本的均衡點E_0將脫離靜止均衡，因此下一期的每人資本將上升為k_0'，表示於圖中的E_0'。此動態調整過程每人資本會不斷增加，直到達成新的靜止均衡點E_1為止，此時對應的每人資本為$\tilde{k}_1$。此外，由於每人資本的增加，亦可推知人口成長率降低將造成新的均衡工資上升而均衡利率下降。

值得注意的是，人口成長率降低雖然有助於每人資本的累積，但根據我們的定義$k_t = \frac{K_t}{N_t}$。將此關係式等號兩邊取對數，再對時間微分可得：

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N} \tag{2.45}$$

由於在靜止均衡時，每人資本會是一個定值，因此每人資本的成長力會是零。另一方面，根據每人產出的定義$y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t}$，類似於上述的作法，我們可以得到以下的關係式：

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{N}}{N} \tag{2.46}$$

由於$y_t = k_t^{1-\epsilon}$，因此在靜止均衡時，每人產出與每人資本會有相同的成長力，且同時為零。結合式 (2.45)、(2.46)則可推得產出成長力、資本成長力、人口成長力三者關係如下：

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} \tag{2.47}$$

上式的經濟意涵可解釋為：於靜止均衡時，經濟體系的產出與資本會有共同的成長率且與人口成長率相等。因此，人口成長率降低儘管有助於每人資本的提高，但對於整體社會來說，人口成長率降低將不利於經濟的成長。

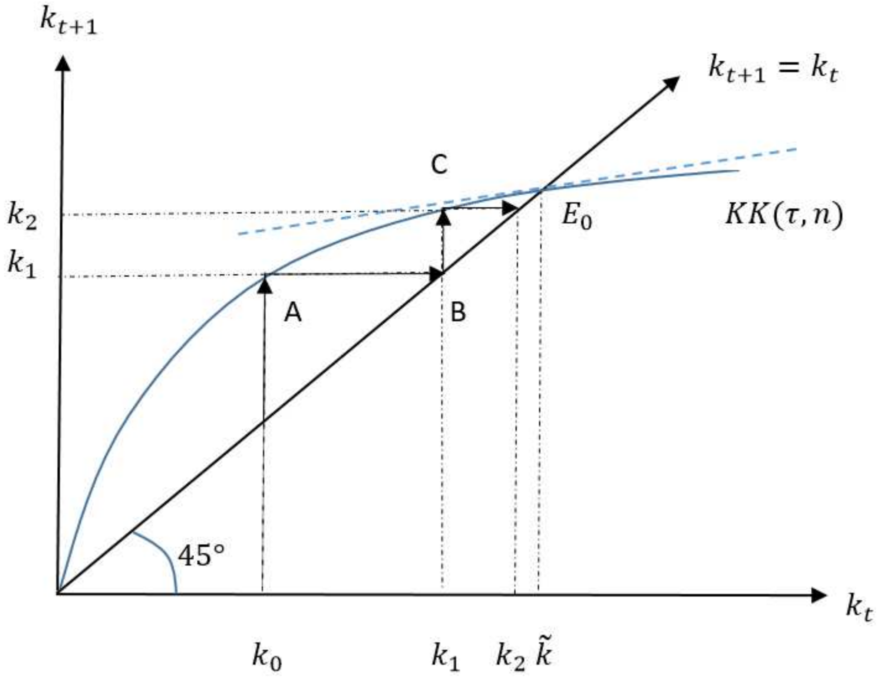

圖 2.1 勞動外生：每人資本k的動態調整過程

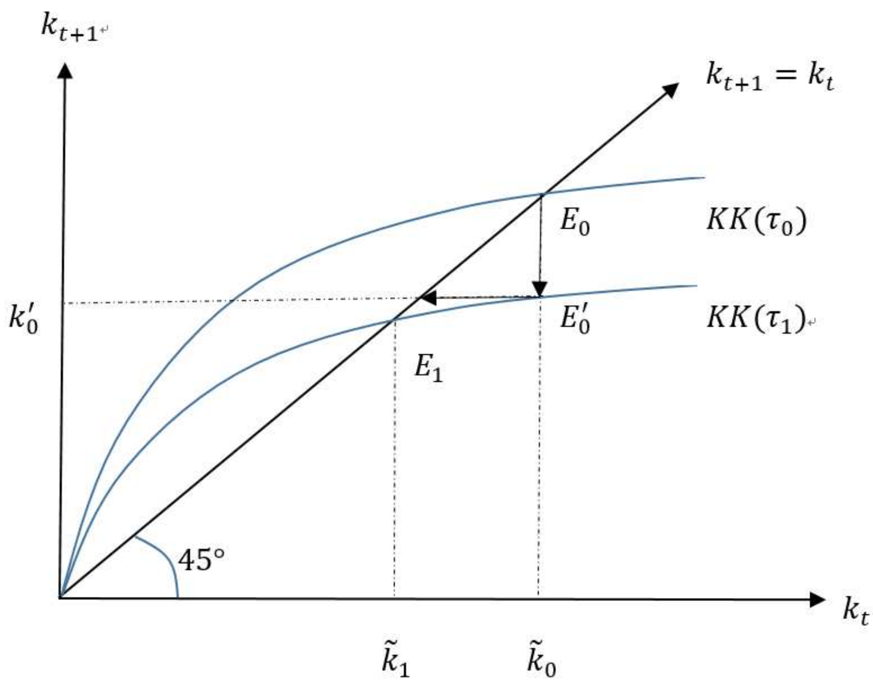

圖 2.2 勞動外生：所得稅率變動的比較靜態分析

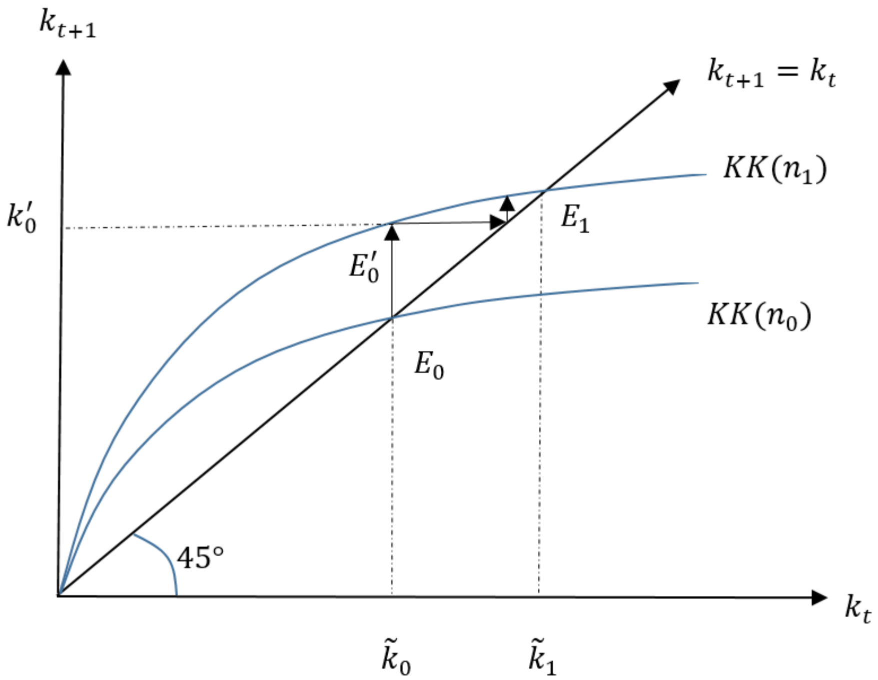

圖 2.3 勞動外生：人口成長率變動的比較靜態分析

第三章 勞動內生化的理論模型

第二章的模型係在勞動供給外生的情形下，進行相關的分析。本章擬放寬勞動供給外生的假定，探討在勞動工時內生化的情形下，當政府提高所得稅率，以及外生人口成長率降低時，將會對經濟體系的總體均衡造成何種影響。於勞動內生化的情形下，我們可以將模型架構重述如下。

第一節 模型架構

仿照上一章的分析，在代表性個人i追求終身效用折現值極大的假定下，其效用函數可以表示如下：

$$\Lambda_t^i \equiv lnc_t^{Yi} + \sigma \ln\left(1 - l_t^i\right) + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \text{ ；} \sigma > 0 \text{ ；} \rho > 0 \tag{3.1}$$

其中l_t^i為代表性個人i在第t期的勞動工時，假設總時間單位化為 1，則$1 - l_t^i$表示代表性個人i在第t期的休閒時間，σ為常數，表示代表性個人偏好休閒的程度，若$\sigma > 1$表示相對於當期消費而言，代表性個人偏好當期休閒；反之，若$\sigma < 1$表示相對於當期休閒而言，代表性個人偏好當期消費。其餘c_t^{Yi}、c_{t+1}^{Oi}、ρ所代表的經濟意義與前述章節的定義相同。在考慮隨收隨付制年金體制下，第i個代表性個人將會面臨以下的終身預算限制式：

$$c_t^{Yi} + s_t^i = w_t l_t^i - \tau w_t l_t^i = (1 - \tau) w_t l_t^i \tag{3.2}$$

$$c_{t+1}^{Oi} = (1 + r_{t+1}) s_t^i + z_{t+1}^i \tag{3.3}$$

上述的式子中，s_t^i、w_t、τ、r_{t+1}、z_{t+1}^i表示的經濟意義與前述章節的定義相同，惟勞動內生化之後，代表性個人i在第t期的勞動所得不再只是w_t，而是$w_t l_t^i$，因此，政府向年輕世代收取的保險費用也變為$\tau w_t l_t^i$。

將式 (3.2)、(3.3)合併，可推得第i個代表性個人的終身預算限制式：

$$c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} = w_t(1 - \tau) l_t^i + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}} \tag{3.4}$$

上述預算限制式為本文與 Heijdra (2009)最大的模型差異。不同於中央集權解，在分權解中，代表性個人將受限於個人預算限制式，同時由於單一的個人並無法影響整體政府的行為，因此，個人預算限制式中的下一期年金應當作外生給定，然而 Heijdra (2009)在考慮分權解的情況下，卻將下一期的年金視為內生變數代入求解。在 Ihori (1996)及金志婷 (2011)考慮分權解的文章中，其處理方式亦是將下一期的年金視為外生給定。準此，我們修改了 Heijdra (2009)的模型處理方式，並參考了 Ihori (1996)與金志婷 (2011)的處理方式，建構了本文的模型。

依據上述的模型架構，第i個代表性個人的最適決策可以表示如下：

$$Max\ \Lambda_t^i = lnc_t^{Yi} + \sigma ln\left(1 - l_t^i\right) + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \tag{3.5}$$

$$s.t.\ c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} = w_t(1-\tau)l_t^i + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}} \tag{3.6}$$

上式表示，代表性個人i在受限於終身預算限制式之下，選擇兩期的消費c_t^{Yi}、c_{t+1}^{Oi}與休閒時間$1 - l_t^i$以追求終身的效用極大。依據上述的最適決策，可以設定以下的 Lagrange 函數L：

$$L = lnc_t^{Yi} + \sigma ln\left(1 - l_t^i\right) + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} - \lambda_t\left(c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} - w_t(1-\tau)l_t^i - \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right) \tag{3.7}$$

依據式 (3.7)可推得以下最適的一階條件：

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^{Yi}} = \frac{1}{c_t^{Yi}} - \lambda_t = 0 \tag{3.8.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^{Oi}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} = 0 \tag{3.8.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial (1-l_t^i)} = \frac{\sigma}{1-l_t^i} - \lambda_t w_t(1-\tau) = 0 \tag{3.8.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = -c_t^{Yi} - \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} + w_t(1-\tau)l_t^i + \frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}} = 0 \tag{3.8.4}$$

將 (3.8.1)、(3.8.2)相除可得：

$$\frac{c_t^{Yi}}{c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}} \tag{3.9}$$

式 (3.9)即為 Euler 方程式，表明了代表性個人兩期之間消費的抵換關係。將式

(3.9)代入式 (3.8.4)可解得的兩期消費分別為：

$$c_t^{Yi}=\frac{1+\rho}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau)l_t^i+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{3.10}$$

$$c_{t+1}^{Oi}=\frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau)l_t^i+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{3.11}$$

結合式 (3.8.1)、(3.8.3)、(3.10)可解出代表性個人的勞動決策為：

$$l_t^i=\frac{(2+\rho)w_t(1-\tau)-\sigma(1+\rho)\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}}{[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]w_t(1-\tau)} \tag{3.12}$$

在我們將下一期年金視為外生給定的架構下，上式解出的個人勞動決策與 Heijdra (2009)已經有所不同。Heijdra (2009)解出的個人最適勞動供給量為常數[12][13]，同時，工資並不影響勞動供給，也就是勞動供給曲線為垂直線，替代效果將等於所得效果。而在我們的勞動決策中可以看出勞動供給曲線為正斜率，也就是工資上升時替代效果會強於所得效果[14]。

將式 (3.12)的結果代入式 (3.10)、(3.11)，可以求解代表性個人i最適的兩期消費分別如下：

$$c_t^{Yi}=\frac{1+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{3.13}$$

$$c_{t+1}^{Oi}=\frac{1+r_{t+1}}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{3.14}$$

利用上述結果，我們也可以得到代表性個人的終身預算限制式為：

$$c_t^{Yi}+\frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}}=\frac{2+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{3.15}$$

與上一章勞動外生化的結果相比較，我們可以發現，將$\sigma=0$代入，$\frac{1+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}$將轉變為$\frac{1+\rho}{2+\rho}$，$\frac{1+r_{t+1}}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}$將轉變為$\frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}$，$\frac{2+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}$將轉變為 1，

---

[12] 若不存在年金制度$z_{t+1}^i=0$，則式 (3.12)將回到 logarithmic 效用函數替代效果等於所得效果，個人的勞動供給決策為常數的結果。此式亦突顯出政府強迫儲蓄在本文中的重要性，就是因為存在政府的強迫儲蓄才使得個人勞動供給不為常數，而造成勞動供給存在差分方程式的結果。

[13] 事實上，Heijdra (2009)個人最適勞動供給量為常數的結果，不僅與下一期年金視為內生變數有關，更決定性的關鍵在於將年金視為內生後，其特定的給付型式，關於 Heijdra (2009)的推導，附錄 A 會有較詳盡的說明。

[14] 將式 (3.12)對工資做偏微分可得：$\frac{\partial l_t^i}{\partial w_t}=\frac{\sigma(1+\rho)z_{t+1}^i}{[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)](1-\tau)(1+r_{t+1})w_t^{2}}>0$，證明勞動供給曲線為正斜率，而工資上升時替代效果會強於所得效果的經濟邏輯，於附錄 B 中會有較為詳盡的說明。

則上述三式的結果將會與式 (2.10)、(2.11)、(2.6)完全一致，這說明了勞動外生化下的個人最適決策結果其實僅是勞動內生化模型$\sigma = 0$下的特例，而在$\sigma = 0$下，式 (3.12)的勞動決策l_t^i將等於一，表示當休閒完全不能帶來任何效用時，代表性個人將會把他的全部的時間都投入於工作。

另一個極端的例子是，當σ趨近於無窮大時，$\frac{1+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}$將趨近於零，此時代表性個人不論是年輕時的消費，還是年老時的消費皆為零，從經濟邏輯來看，σ趨近於無窮大表示此代表性個人完全偏好休閒，將不會提供任何勞動供給，沒有提供勞動自然就沒有勞動所得，也就沒有了消費的所得來源，一樣可以得到代表性個人兩期消費皆為零的這個結論。

廠商的生產函數為新古典生產函數，產出Y為總勞動工時Nl和資本K的一次齊次函數，採用 Cobb-Douglas 的型式：

$$Y_t = F(N_t l_t, K_t) = (N_t l_t)^{\epsilon} K_t^{1-\epsilon} \tag{3.16}$$

準此，廠商的利潤函數為：

$$\pi_t = F(N_t l_t, K_t) - w_t N_t l_t - r_t K_t \tag{3.17}$$

在廠商追求利潤極大的目標下，可推得廠商所雇用的勞動和資本的一階最適條件如下：

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial (N_t l_t)} = \epsilon (N_t l_t)^{\epsilon-1} K_t^{1-\epsilon} - w_t = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} = (1-\epsilon)(N_t l_t)^{\epsilon} K_t^{-\epsilon} - r_t = 0 \tag{3.19}$$

上述兩式表示，廠商將雇用勞動與資本直到該要素的邊際生產力等於該要素的市場價格為止。此外，若我們將產出和資本都改寫成產出勞動比和資本勞動比(capital-labor ratio)的型式，即$y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t l_t}$、$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t l_t}$。準此，工資水準及利率水準亦可表示為：

$$w_t = \epsilon k_t^{1-\epsilon} \tag{3.20}$$

$$r_t = (1-\epsilon)\, k_t^{-\epsilon} \tag{3.21}$$

與上一章勞動外生化的結果相比，式 (3.20)、(3.21)與式 (2.16)、(2.17)完全相同，儘管在勞動外生與勞動內生兩個不同的模型裡，變數k的定義有所不同，但工資與利率仍會有相同的表示型式。

在考慮勞動內生化的狀況下，政府實施隨收隨付制年金的預算限制式可以重新表述為：

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N_{t-1}} z_t^i = \sum_{i=1}^{N_t} \tau w_t l_t^i \tag{3.22}$$

N_{t-1}、N_t的經濟定義與上一章相同，惟勞動內生化之後，政府向年輕世代收取的保險費用不再是τw_t，而是$\tau w_t l_t^i$。

類似於上一章的分析方法，勞動內生化模型下的社會資本累積式亦可由相似的邏輯推得，首先，在考慮完全折舊的情況下，產出等於總合消費加上投資：

$$Y_t = C_t + I_t = C_t + K_{t+1} \tag{3.23}$$

上式的結果與式(2.19)完全相同。而社會的總合消費又可細分為年輕世代的總消費和年老世代的總消費，在年輕世代的勞動所得變為$N_t w_t\, l_t$的情況下，式(2.20)則改寫為：

$$\begin{aligned} C_t &= N_{t-1} c_t^O + N_t c_t^Y \\ &= r_t K_t + N_{t-1} z_t + N_t (w_t l_t - s_t - \tau w_t l_t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

結合式 (3.23)、(3.24)可以推得：

$$\begin{aligned} Y_t &= r_t K_t + N_{t-1} z_t + N_t (w_t l_t - s_t - \tau w_t l_t) + K_{t+1} \\ &= r_t K_t + (N_{t-1} z_t - N_t \tau w_t l_t) + N_t (w_t l_t - s_t) + K_{t+1} \\ &= r_t K_t + N_t (w_t l_t - s_t) + K_{t+1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

此外，假定廠商生產並無超額利潤，其產出全部用於支付生產產品時所投入的要素成本：

$$Y_t = r_t K_t + N_t w_t\, l_t \tag{3.26}$$

結合上述兩式，我們可以推得：

$$N_t s_t = K_{t+1} \tag{3.27}$$

式 (3.27)即為考慮勞動內生化及資本完全折舊假定下的資本累積式。上述推導過程的邏輯與前一章的推導過程，邏輯雷同，僅年輕世代的勞動所得與廠商所支付的勞動要素成本應改為$N_t w_t\, l_t$，而非原本的$N_t w_t$，然而我們還是會得到與式 (2.23)相同的資本累積式。

第二節 總體均衡

在長期總體均衡時，由於對稱均衡的結果，式 (3.22)的政府預算限制式可以改寫為：

$$z_t = \tau(1+n) w_t l_t \tag{3.28}$$

其中$(1+n) = \frac{N_t}{N_{t-1}}$，$n$為人口成長率，假定為定值。由上式亦可知：

$$z_{t+1} = \tau(1+n) w_{t+1} l_{t+1} \tag{3.29}$$

將式 (3.29)代入式 (3.12)即可得勞動供給的差分方程式如下：

$$l_t = \frac{(2+\rho)(1-\tau)-\sigma(1+\rho)\tau(\frac{w_{t+1}}{w_t})(\frac{1+n}{1+r_{t+1}})l_{t+1}}{(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} \tag{3.30}$$

式 (3.30)為本文與 Heijdra (2009)最大的差異，Heijdra (2009)即便加入了勞動內生化的假設進行求解，仍然會得到代表性個人的勞動供給量為常數的結果，造成求解總體均衡時，只存在資本勞動比k_t的一條差分方程式；而在我們的架構下，本期勞動供給將會與下期勞動供給有關，因此構成勞動l_t與資本勞動比k_t的兩條聯立差分方程式。會有這樣的結果，原因在於，式 (3.12)中代表性個人的勞動供給決策將與下一期領到的年金z_{t+1}有關，而在總體均衡時，式 (3.29)說明，下一期領到的年金將與下一期勞動者提供的勞動量有關。據此，在總體均衡下，本期勞動供給與下期勞動供給，兩者之間將形成鏈結，從而構成勞動供給的差分方程

式，這也就是本文與 Heijdra (2009)最大的不同之處。

另由資本累積式$N_t s_t = K_{t+1}$可以推得：

$$s_t = (1+n) l_{t+1} k_{t+1} \tag{3.31}$$

準此，可將總體均衡條件表示如下：

$$\frac{1}{c_t^Y} = \lambda_t \tag{3.32.1}$$

$$\frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^O} = \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} \tag{3.32.2}$$

$$c_t^Y + \frac{c_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = w_t(1-\tau) l_t + \frac{z_{t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{3.32.3}$$

$$w_t = \epsilon k_t^{1-\epsilon} \tag{3.32.4}$$

$$r_t = (1-\epsilon) k_t^{-\epsilon} \tag{3.32.5}$$

$$z_{t+1} = \tau(1+n) w_{t+1} l_{t+1} \tag{3.32.6}$$

$$l_t = \frac{(2+\rho)(1-\tau) - \sigma(1+\rho)\tau(\frac{w_{t+1}}{w_t})(\frac{1+n}{1+r_{t+1}}) l_{t+1}}{(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} \tag{3.32.7}$$

$$s_t = (1+n) l_{t+1} k_{t+1} \tag{3.32.8}$$

在長期總體均衡下，以上八個方程式求解c_t^Y、c_{t+1}^O、λ_t、w_t、r_t、z_{t+1}、l_t、k_t八個內生變數，其中l_t、k_t變數涉及差分方程。接下來，我們將求解式 (3.32.7)以及式 (3.32.8)兩條聯立差分方程式。首先，由式 (3.3)可知：$s_t = \frac{c_{t+1}^O - z_{t+1}}{1+r_{t+1}}$，再將式 (3.11)、(3.29)代入式 (3.31)，即可得到資本勞動比的差分方程式如下：

$$\frac{1-\tau}{2+\rho} w_t l_t - \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right) \frac{\tau(1+n) w_{t+1} l_{t+1}}{1+r_{t+1}} = (1+n) l_{t+1} k_{t+1} \tag{3.33}$$

首先，我們將式 (3.33)代入式 (3.32.7)，整理可得以下數學式：

$$l_{t+1} = \frac{[(1+\sigma) l_t - 1](1-\tau) w_t}{\sigma(1+n) k_{t+1}} \tag{3.34}$$

再將式 (3.34)代回式 (3.33)，整理得以下數學式：

$$\left(\frac{1+r_{t+1}}{w_{t+1}}\right) k_{t+1} = \frac{(1+\rho)\tau[(1+\sigma) l_t - 1]}{\sigma l_t - (2+\rho)[(1+\sigma) l_t - 1]} \tag{3.35}$$

將式 (3.34)、式 (3.35)在靜止均衡點做一階線性泰勒展開，並將式 (3.35)所得到

的$k_{t+1}-\tilde{k}$代入式 (3.34)的線性展開式，整理可得到以下矩陣型式：

$$\begin{pmatrix} k_{t+1}-\tilde{k} \\ l_{t+1}-\tilde{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sigma(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\epsilon\tau(1+\rho)\left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right]^2\tilde{w}} \\ \dfrac{(1-\epsilon)\tilde{l}}{\tilde{k}} & 1+\dfrac{\epsilon\tau(1+\rho)(1+n)-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\epsilon\tau(1+\rho)(1+n)\left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t-\tilde{k} \\ l_t-\tilde{l} \end{pmatrix}$$

其中$\tilde{l}$、$\tilde{k}$、$\tilde{w}$、$\tilde{r}$為勞動、資本勞動比、工資、利率的靜止均衡值，分別表示如下：

$$\tilde{l} = \frac{[(1+\sigma)\tilde{l}-1](1-\tau)\tilde{w}}{\sigma(1+n)\tilde{k}} \tag{3.36}$$

$$\left(\frac{1+\tilde{r}}{\tilde{w}}\right)\tilde{k} = \frac{\tilde{k}^{\epsilon}-(1-\epsilon)}{\epsilon_L} = \frac{(1+\rho)\tau[(1+\sigma)\tilde{l}-1]}{\sigma\tilde{l}-(2+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]} \tag{3.37}$$

$$\tilde{w} = \epsilon\tilde{k}^{1-\epsilon} \tag{3.38}$$

$$\tilde{r} = (1-\epsilon)\tilde{k}^{-\epsilon} \tag{3.39}$$

為了便於書寫，我們令$\alpha = \left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right] > 0$[15]；且$\beta = \epsilon\tau(1+\rho)(1+n) > 0$

則可將聯立差分方程式重新表示如下：

$$k_{t+1}-\tilde{k} = \frac{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\alpha^2\beta\tilde{w}}\left(l_t-\tilde{l}\right) \tag{3.40}$$

$$l_{t+1}-\tilde{l} = \frac{(1-\epsilon)\tilde{l}}{\tilde{k}}\left(k_t-\tilde{k}\right)+\left[1+\frac{1}{\alpha}-\frac{(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}\right]\left(l_t-\tilde{l}\right) \tag{3.41}$$

與式 (2.29)相比，式 (3.40)中$k_{t+1}-\tilde{k}$與$k_t-\tilde{k}$無關，會有如此的結果，其根本原因在於式 (3.35)中下一期的資本勞動比k_{t+1}僅與本期的勞動量l_t有關，而與本期的資本勞動比k_t無關，此結果為本文勞動內生化模型與勞動外生化模型最大的差異[16]。

參考自 Gandolfo (1980)的方法，我們令η為滿足l_t與k_t的聯立差分方程組之特性根，則依據此聯立差分方程組可以推得以下的特性方程式：

---

[15] 式(3.36)中，$\tilde{l} = \frac{[(1+\sigma)\tilde{l}-1](1-\tau)\tilde{w}}{\sigma(1+n)\tilde{k}}$，且$\tilde{l}$、$(1-\tau)$、$\tilde{w}$、$\sigma$、$(1+n)$、$\tilde{k}$皆為大於零的數，因此$\alpha = \left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right] > 0$。此結果於附錄 C 另有較為詳細的數學證明，請參照附錄 C。

[16] 關於下一期資本勞動比與本期資本勞動比無關的結果，一個可能的直覺是：與第二章的每人資本$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t}$相比，本章的資本勞動比定義為$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t l_t}$，在多考慮了勞動工時$l_t$的情況下，勞動工時的效果會抵消原本每人資本存在差分方程的結果，使得本期資本勞動比與下期資本勞動比兩者之間無關。

$$\begin{vmatrix} -\eta & \frac{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\alpha^2\beta\tilde{w}} \\ \frac{(1-\epsilon)\tilde{l}}{\tilde{k}} & 1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}-\eta \end{vmatrix} = 0$$

展開上式可得：

$$\eta^2 - \left[1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}\right]\eta - \frac{\sigma(1+n)(1-\epsilon)(1+\tilde{r})^2\tilde{l}\tilde{k}}{\alpha^2\beta\tilde{w}} = 0 \tag{3.42}$$

令η_1及η_2為滿足式 (3.42)的特性根，則由根與係數關係可推得：

$$\eta_1 + \eta_2 = 1 + \frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \times \eta_2 &= -\frac{\sigma(1+n)(1-\epsilon)(1+\tilde{r})^2\tilde{l}\tilde{k}}{\alpha^2\beta\tilde{w}} \\ &= -\frac{(1-\tau)(1-\epsilon)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta} < 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

根據以上的關係式，我們可以判斷η_1及η_2為一正根一負根。令$\eta_1 < 0 < \eta_2$，則由公式解可以解得：

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta} + \sqrt{\left[1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}\right]^2 + \frac{4(1-\tau)(1-\epsilon)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}}\right\} \tag{3.45}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta} - \sqrt{\left[1+\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}\right]^2 + \frac{4(1-\tau)(1-\epsilon)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}}\right\} \tag{3.46}$$

準此，我們可以求解出式 (3.32.7)、(3.32.8)，l_t、k_t這兩個變數的聯立差分方程組的一般解為：

$$k_t = \tilde{k}(\tau,n) + A_1{\eta_1}^t + A_2{\eta_2}^t \tag{3.47}$$

$$l_t = \tilde{l}(\tau,n) + \frac{\eta_1\alpha^2\beta\tilde{w}}{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}A_1{\eta_1}^t + \frac{\eta_2\alpha^2\beta\tilde{w}}{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}A_2{\eta_2}^t \tag{3.48}$$

式 (3.47)、(3.48)中，等號右邊第一項為聯立方程的特殊解，該解由外生變數的長期均衡值所組成，反映的是市場基要。另外，等號右邊的第二項及第三項則為聯立差分方程組的齊次解，A_1、A_2則為待解參數。

解出了模型的一般解後，接下來，我們將利用圖解說明l_t與k_t的相圖，藉此來探討該經濟體系的動態調整過程。首先，式 (3.40)及式 (3.41)可分別改寫為：

$$k_{t+1} - k_t = -\left(k_t - \tilde{k}\right) + \frac{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\alpha^2\beta\tilde{w}}\left(l_t - \tilde{l}\right) \tag{3.49}$$

$$l_{t+1} - l_t = \frac{(1-\epsilon)\tilde{l}}{\tilde{k}}\left(k_t - \tilde{k}\right) + \left[\frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}\right]\left(l_t - \tilde{l}\right) \tag{3.50}$$

由式 (3.49)可以推得滿足$k_{t+1} = k_t$的所有l_t與k_t的組合，我們將這些組合所形成的軌跡稱為$\Delta k_t = 0$ 線，則該線的斜率為：

$$\left.\frac{\partial(l_t-\tilde{l})}{\partial(k_t-\tilde{k})}\right|_{\Delta k_t=0} = \frac{\alpha^2\beta\tilde{w}}{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2} > 0 \tag{3.51}$$

由上式可知，$\Delta k_t = 0$ 線為正斜率。再者，由式 (3.50)可以推得滿足$l_{t+1} = l_t$的所有l_t與k_t的組合，我們將這些組合所形成的軌跡稱為$\Delta l_t = 0$ 線。則該線的斜率為：

$$\left.\frac{\partial(l_t-\tilde{l})}{\partial(k_t-\tilde{k})}\right|_{\Delta l_t=0} = -\frac{\alpha\beta(1-\epsilon)\tilde{l}}{[\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2]\tilde{k}} \begin{array}{l} < 0 \text{ if } \beta > (1-\tau)(1+\tilde{r})^2 \\ > 0 \text{ if } \beta < (1-\tau)(1+\tilde{r})^2 \end{array} \tag{3.52}$$

由上式可知，$\Delta l_t = 0$ 線斜率的正負值無法判斷。接下來，將進行相圖的分析。

由式 (3.49)可以推得$\frac{\partial(k_{t+1}-k_t)}{\partial k_t} = -1 < 0$，此結果顯示$k_{t+1} - k_t$與$k_t$有反向的關係。同理，由式 (3.50)亦可以推得$\frac{\partial(l_{t+1}-l_t)}{\partial l_t} = \frac{\beta-(1-\tau)(1+\tilde{r})^2}{\alpha\beta}$。若$\frac{\partial(l_{t+1}-l_t)}{\partial l_t} > 0$顯示$l_{t+1} - l_t$與$l_t$有正向的關係；若$\frac{\partial(l_{t+1}-l_t)}{\partial l_t} < 0$ 則顯示$l_{t+1} - l_t$與l_t有反向的關係。在$\Delta k_t = 0$ 線確定為正斜率的情形下，配合著$\Delta l_t = 0$ 線為負斜率；$\Delta l_t = 0$ 線為正斜率且相對斜率比$\Delta k_t = 0$ 線陡峭；$\Delta l_t = 0$ 線為正斜率且相對斜率比$\Delta k_t = 0$ 線平坦，可以分別繪出三種不同的相圖。我們將這三種可能的相圖繪於圖 3.1、圖 3.2 與圖 3.3。

在圖 3.1 中，正斜率的$\Delta k_t = 0$ 線與負斜率的$\Delta l_t = 0$線將相圖平面分為四個區域，由$k_{t+1} - k_t$與k_t具反向關係且$l_{t+1} - l_t$與l_t具正向關係可知，象限 I 區域的k_t會增加而l_t會減少；象限 II 區域的k_t及l_t皆會減少；象限 III 區域的k_t會減少而l_t會增加；象限 IV 區域的k_t及l_t皆會增加。

在圖 3.2 中，同時皆為正斜率的$\Delta k_t = 0$ 線與$\Delta l_t = 0$線將相圖平面分為四個區域，由$k_{t+1} - k_t$與k_t及$l_{t+1} - l_t$與l_t皆具反向關係可知，象限 I 區域的k_t會增加而l_t會減少；象限 II 區域的k_t及l_t皆會減少；象限 III 區域的k_t會減少而l_t會增加；

象限 IV 區域的k_t及l_t皆會增加。

在圖 3.3 中，$\Delta k_t = 0$ 線及$\Delta l_t = 0$線同時皆為正斜率，與圖 3.2 唯一的不同之處在於，圖 3.3 的$\Delta k_t = 0$ 線的斜率較$\Delta l_t = 0$ 線陡峭。類似於上述分析可知，象限 I 區域的k_t會增加而l_t會減少；象限 II 區域的k_t及l_t皆會增加；象限 III 區域的k_t會減少而l_t會增加；象限 IV 區域的k_t及l_t皆會減少。

儘管存在著三種可能的情況，但透過 Azariadis (1993)的方法，我們可以確定特性根η_2的範圍，進而排除掉圖 3.1 及圖 3.2 的可能性。

首先，令$\Psi(\eta) = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)$，若計算的結果$\Psi(1) > 0$，則可推得特性根$\eta_1$、$\eta_2$必定同時大於一或者同時小於一。

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= (1-\eta_1)(1-\eta_2) \\ &= 1-(\eta_1+\eta_2)+\eta_1\eta_2 \\ &= \frac{\epsilon_L\left[(1-\tau)(1+\tilde{r})^2-\tau(1+\rho)(1+n)\right]}{\alpha\beta} > 0 \end{aligned} \quad [17] \tag{3.53}$$

配合著式 (3.44)兩特性根乘積小於零與式 (3.53)的結果，最終我們可以確定特性根η_2的範圍為：

$$0 < \eta_2 < 1 \tag{3.54}$$

另一方面，若$A_1 = 0$，根據式 (3.47)、(3.48)可以推知：

$$\left.\frac{\partial(l_t-\tilde{l})}{\partial(k_t-\tilde{k})}\right|_{A_1=0} = \frac{\eta_2\alpha^2\beta\tilde{w}}{\sigma(1+n)(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2} > 0 \tag{3.55}$$

上式表示，當$A_1 = 0$僅有特性根η_2運作時，將存在一條正斜率的收斂路徑，由於此種情況與圖 3.1 及圖 3.2 的動態調整過程相抵觸。據此，這兩種情況將予以排除，進而確立僅有圖 3.3 的動態調整過程才會與數學的計算結果一致。

[17] 由式(3.70)可知，$(1-\tau)(1+\tilde{r})^2 > \tau(1+\rho)(1+n)$，事實上這個結果來自於我們要求$\tilde{k} > 0$的結果，於附錄 C 有一個較為詳盡的討論。

第三節 所得稅率變動的比較靜態分析

本節將在勞動內生化的隨收隨付制年金體系下進行比較靜態分析，探討提高所得稅率τ時，將會對相關經濟變數造成何種影響。首先，將式 (3.34)、(3.35) 重新改寫如下：

$$k_{t+1}=\left\{\frac{\epsilon\tau(1+\rho)[(1+\sigma)l_t-1]}{\sigma l_t-(2+\rho)[(1+\sigma)l_t-1]}+(1-\epsilon)\right\}^{\frac{1}{\epsilon}}=J(l_t,\tau) \tag{3.56}$$

$$l_{t+1}=\frac{[(1+\sigma)l_t-1](1-\tau)w_t}{\sigma(1+n)J(l_t,\tau)}=H(k_t,l_t,\tau) \tag{3.57}$$

由式 (3.56)可知：

$$k_{t+1}-k_t=J(l_t,\tau)-k_t \tag{3.58}$$

由於靜止均衡時，$k_{t+1}=k_t=\tilde{k}$，$l_{t+1}=l_t=\tilde{l}$，$\tau=\tau_0$，則上式可以重新改寫如下：

$$0=J(\tilde{l},\tau_0)-\tilde{k} \tag{3.59}$$

將式 (3.58)、(3.59)兩式相減可以得到：

$$\begin{aligned}k_{t+1}-k_t&=J(l_t,\tau)-J(\tilde{l},\tau_0)-(k_t-\tilde{k})\\&=J_l(l_t-\tilde{l})+J_\tau(\tau_1-\tau_0)-(k_t-\tilde{k})\end{aligned} \tag{3.60}$$

滿足$\Delta k_t=k_{t+1}-k_t=0$下，我們可以得到：

$$\left.\frac{\partial(l_t-\tilde{l})}{\partial(\tau_1-\tau_0)}\right|_{\Delta k_t=0}=-\frac{J_\tau}{J_l}<0 \tag{3.61}$$

其中J_τ與J_l的數值分別如下：

$$J_\tau=\frac{1}{\epsilon}\frac{J}{J^\epsilon}\left\{\frac{\epsilon(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]}{\sigma\tilde{l}-(2+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]}\right\}>0 \tag{3.62}$$

$$J_l=\frac{1}{\epsilon}\frac{J}{J^\epsilon}\left\{\frac{(1+\rho)\sigma\tau_0}{\left[\sigma\tilde{l}-(2+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]\right]^2}\right\}>0 \tag{3.63}$$

由式 (3.61)，我們可以確定，當所得稅率τ上升時，則$\Delta k_t=0$ 線會整條線往下移動。如圖 3.4 所示，當所得稅率為τ_0時，$\Delta k_t=0$ 線上 A 點對應著的原來的l_0、k_0，而當所得稅率提高至τ_1時，$\Delta k_t=0$ 線會平行向下移動，A 點將會下移至 B 點，在k_0不變之下，此時所對應的勞動將從l_0減少至l_1。

類似於上述的分析，我們亦可以分析當所得稅率τ變動時，$\Delta l_t = 0$ 線將會如何移動。首先，將式 (3.57)改寫如下：

$$l_{t+1} - l_t = H(k_t, l_t, \tau) - l_t \tag{3.64}$$

由於靜止均衡時，$k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$，$l_{t+1} = l_t = \tilde{l}$，$\tau = \tau_0$，式 (3.64)可以重新改寫如下：

$$0 = H(\tilde{k}, \tilde{l}, \tau_0) - \tilde{l} \tag{3.65}$$

將式 (3.64)、(3.65)兩式相減可以得到：

$$\begin{aligned} l_{t+1} - l_t &= H(k_t, l_t, \tau) - H(\tilde{k}, \tilde{l}, \tau_0) - (l_t - \tilde{l}) \\ &= H_k(k_t - \tilde{k}) + H_l(l_t - \tilde{l}) + H_\tau(\tau_1 - \tau_0) - (l_t - \tilde{l}) \end{aligned} \tag{3.66}$$

滿足$\Delta l_t = l_{t+1} - l_t = 0$下，我們可以得到：

$$\left.\frac{\partial(k_t - \tilde{k})}{\partial(\tau_1 - \tau_0)}\right|_{\Delta l_t = 0} = -\frac{H_\tau}{H_k} > 0 \tag{3.67}$$

其中H_k與H_τ的數值分別如下：

$$H_k = \frac{(1-\epsilon)}{\tilde{k}} H(\tilde{k}, \tilde{l}, \tau_0) > 0 \tag{3.68}$$

$$H_\tau = -\frac{H}{(1-\tau_0)} - \frac{H}{\epsilon J^\epsilon}\left\{\frac{(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l} - 1]}{\sigma\tilde{l} - (2+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l} - 1]}\right\} < 0 \tag{3.69}$$

由式 (3.69)，我們可以確定，當所得稅率τ上升時，$\Delta l_t = 0$ 線會整條線往右移動[18]。如圖 3.5 所示。當所得稅率為τ_0時，$\Delta l_t = 0$ 線上 A 點對應著的原來的l_0、k_0，而當所得稅率提高至τ_1時，$\Delta l_t = 0$ 線會平行向右移動，A 點將會右移至 B 點，在l_0不變之下，此時k_0將增加至k_1。

然而僅從所得稅率τ上升時，$\Delta k_t = 0$ 線會下移以及$\Delta l_t = 0$ 線會右移並無法判斷均衡值$\tilde{l}$、$\tilde{k}$的變化究竟為何。以下，我們擬以數學證明輔助判斷，當所得稅率上升時，$\tilde{l}$、$\tilde{k}$的確切變化為何。首先，將式 (3.36)、(3.37)重述如下：

$$\tilde{l} = \frac{[(1+\sigma)\tilde{l} - 1](1-\tau)\tilde{w}}{\sigma(1+n)\tilde{k}} \tag{3.36}$$

---

[18] 我們亦可由$\left.\frac{\partial(l_t - \tilde{l})}{\partial(\tau - \tau_0)}\right|_{\Delta l_t = 0} = -\frac{H_\tau}{H_l}$來判斷所得稅率變動時$\Delta l_t = 0$ 線的上下移動，惟計算過程中H_l的正負號無法判斷，是以我們僅能判斷所得稅率變動時$\Delta l_t = 0$ 線的左右移動。

$$\left(\frac{1+\tilde{r}}{\widetilde{w}}\right)\tilde{k}=\frac{(1+\rho)\tau[(1+\sigma)\tilde{l}-1]}{\sigma\tilde{l}-(2+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]} \tag{3.37}$$

將式 (3.36)、式 (3.37)對$\tilde{l}$、$\tilde{k}$以及τ進行全微分，並將兩式化簡整理，可得到矩陣的型式如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\sigma(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\epsilon\tau(1+\rho)\left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right]^2\widetilde{w}} \\ \dfrac{(1-\tau)\epsilon^2}{\tilde{k}^{1+\epsilon}} & \dfrac{-\sigma(1+n)}{\left[(1+\sigma)\tilde{l}-1\right]^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{d\tilde{k}}{d\tau} \\ \dfrac{d\tilde{l}}{d\tau} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{(1+\tilde{r})\tilde{k}}{\tau\epsilon} \\ -\dfrac{\epsilon}{\tilde{k}^{\epsilon}} \end{pmatrix}$$

接下來，我們將利用 Cramer 法則計算$\frac{d\tilde{k}}{d\tau}$、$\frac{d\tilde{l}}{d\tau}$的大小為何。首先，我們先求出以下的行列式值。

$$令\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{-\sigma(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\epsilon\tau(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2\widetilde{w}} \\ \frac{(1-\tau)\epsilon^2}{\tilde{k}^{1+\epsilon}} & \frac{-\sigma(1+n)}{[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2} \end{vmatrix}=\frac{\sigma\left[(1-\tau)(1+\tilde{r})^2-\tau(1+\rho)(1+n)\right]}{\tau(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2}>0^{19} \tag{3.70}$$

$$令\ \Delta_{\tilde{k}}=\begin{vmatrix} \frac{(1+\tilde{r})\tilde{k}}{\tau\epsilon} & \frac{-\sigma(1+\tilde{r})^2\tilde{k}^2}{\epsilon\tau(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2\widetilde{w}} \\ -\frac{\epsilon}{\tilde{k}^{\epsilon}} & \frac{-\sigma(1+n)}{[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2} \end{vmatrix}=-\frac{\sigma(1+\tilde{r})\tilde{k}[(1+\rho)(1+n)+(1+\tilde{r})]}{\epsilon\tau(1+\rho)[(1+\sigma)\tilde{l}-1]^2}<0 \tag{3.71}$$

$$令\ \Delta_{\tilde{l}}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{(1+\tilde{r})\tilde{k}}{\tau\epsilon} \\ \frac{(1-\tau)\epsilon^2}{\tilde{k}^{1+\epsilon}} & -\frac{\epsilon}{\tilde{k}^{\epsilon}} \end{vmatrix}=-\frac{\epsilon[\tau+(1-\tau)(1+\tilde{r})]}{\tau\tilde{k}^{\epsilon}}<0 \tag{3.72}$$

據此，我們可以利用 Cramer 法則得到以下結果：

$$\frac{d\tilde{k}}{d\tau}=\frac{\Delta_{\tilde{k}}}{\Delta}<0 \tag{3.73}$$

$$\frac{d\tilde{l}}{d\tau}=\frac{\Delta_{\tilde{l}}}{\Delta}<0 \tag{3.74}$$

由式 (3.73)及式 (3.74)我們可以推論，當政府提高隨收隨付制年金的所得稅率時，會造成勞動工時和資本勞動比的長期靜止均衡值同時下降，會有這樣的結果其原因在於，面對所得稅率的提高，勞動者勢必會降低其工作意願，進而造成長期均衡的勞動工時減少；另一方面，由於工作意願的降低也導致了勞動者的勞動所得減少，進一步使得儲蓄量也減少，這些都不利於資本的累積，因此所得稅

[19] 由附錄 C 中，$\tilde{k}>0$的結果可知：$(1-\tau)(1+\tilde{r})^2-\tau(1+\rho)(1+n)>0$。

率上升會使得資本勞動比的長期均衡值降低，並且造成工資水準下降、利率水準提升。

於圖 3.6 中，在所得稅率為τ_0時，此時對應的均衡點為E_0，然而當政府提高所得稅率至τ_1時，$\Delta k_t = 0$線與$\Delta l_t = 0$線皆會移動，由於勞動內生化模型下k_t與l_t兩者皆為跳躍變數，因此這兩個變數都可以瞬時地調整，然而其調整並非沒有限制。根據定義$l_t k_t = \frac{K_t}{N_t}$，基於$K$與$N$皆為前定變數(predetermined variable)，因而在所得稅率變動之際，它們皆維持於期初水準，分別為K_0與N_0，因此這兩個變數在所得稅率變動之際，必須維持在$l_t k_t = \frac{K_0}{N_0}$的條件，而這個在相圖平面上，兩軸乘積為定值的條件恰為等軸雙曲線。據此，我們參考 Jha, Wang and Yip (2002)的方法，繪出了一條通過原均衡點E_0且兩軸乘積為$\frac{K_0}{N_0}$的等軸雙曲線。當所得稅率變動時，雖然l_t與k_t這兩個跳躍變數可以瞬時調整，但其跳躍的軌跡都必須落在此雙曲線上，此時的l_t與k_t可能瞬時跳躍至 A 點或者 B 點，而分別對應著不同的l_{0^+}與k_{0^+}，然而不管何種情況，最終都將收斂至E_1，由於不論跳躍變數瞬時調整至雙曲線上任何一點，動態調整過程都會收斂至E_1，因此，經濟體系的均衡會發生不確定性。

第四節 人口成長率變動的比較靜態分析

本節將在勞動內生化的隨收隨付制年金體系下進行比較靜態分析，探討人口成長率n降低，將會對新的靜止均衡造成何種影響。首先，將式 (3.56)、(3.57)重述如下：

$$k_{t+1} = \left\{\frac{\epsilon\tau(1+\rho)[(1+\sigma)l_t-1]}{\sigma l_t-(2+\rho)[(1+\sigma)l_t-1]} + (1-\epsilon)\right\}^{\frac{1}{\epsilon}} = J(l_t) \tag{3.56}$$

$$l_{t+1} = \frac{[(1+\sigma)l_t-1](1-\tau)w_t}{\sigma(1+n)J(l_t,\tau)} = H(k_t, l_t, n) \tag{3.57}$$

由式 (3.56)可知，人口成長率n並不會對k_{t+1}造成任何的影響，因此人口成長率

降低時，$\Delta k_t = 0$ 線並不會移動。接下來，我們將式 (3.57)改寫為：

$$l_{t+1} - l_t = H(k_t, l_t, n) - l_t \tag{3.75}$$

由於靜止均衡時，$k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$，$l_{t+1} = l_t = \tilde{l}$，$n = n_0$，式 (3.75)可以重新改寫如下：

$$0 = H(k_t, l_t, n) - \tilde{l} \tag{3.76}$$

將式 (3.75)、(3.76)兩式相減可以得到：

$$\begin{aligned} l_{t+1} - l_t &= H(k_t, l_t, n) - H(\tilde{k}, \tilde{l}, n_0) - (l_t - \tilde{l}) \\ &= H_k(k_t - \tilde{k}) + H_l(l_t - \tilde{l}) + H_\tau(n_1 - n_0) - (l_t - \tilde{l}) \end{aligned} \tag{3.77}$$

滿足$\Delta l_t = l_{t+1} - l_t = 0$下，我們可以得到：

$$\left.\frac{\partial(k_t - \tilde{k})}{\partial(n_1 - n_0)}\right|_{\Delta l_t = 0} = -\frac{H_n}{H_k} > 0 \tag{3.78}$$

其中H_k與H_n的數值分別如下：

$$H_k = \frac{(1-\epsilon)}{\tilde{k}} H(\tilde{k}, \tilde{l}, n_0) > 0 \tag{3.79}$$

$$H_n = -\frac{H(\tilde{k}, \tilde{l}, n_0)}{1+n} < 0 \tag{3.80}$$

由式 (3.78)，我們可以確定，當人口成長率降低時，$\Delta l_t = 0$ 線會整條線往左移。在圖 3.7 中，由於人口成長率的降低，造成E_0已脫離新的均衡，此時l_t與k_t可能瞬時跳躍至 A 點或者 B 點，而對應著不同的l_{0^+}與k_{0^+}，然而不論何種情況，最終動態調整過程都將收斂至新的均衡點E_1，造成長期均衡的勞動供給量以及資本勞動比同時上升，而得到與勞動外生一致的結論。

值得注意的是，類似於上一章的分析，將本章所定義之$y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t l_t}$與$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t l_t}$兩個變數分別取對數，再對時間微分可得：

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{l}}{l} \tag{3.81}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{l}}{l} \tag{3.82}$$

由於在靜止均衡時，資本勞動比與勞動會是一個定值，因此兩者的成長力皆為零，

而根據定義$y_t = k_t^{1-\epsilon}$，因此我們可以確定，靜止均衡時的產出成長力、資本成長力、人口成長力三者關係如下：

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} \tag{3.83}$$

上式的經濟意涵可解釋為：於靜止均衡時，經濟體系的產出與資本會有相同的成長率且與人口成長率相等。因此，人口成長率降低儘管有助資本勞動比的增加，但對於整體社會來說，人口成長率降低並不利於經濟的成長。

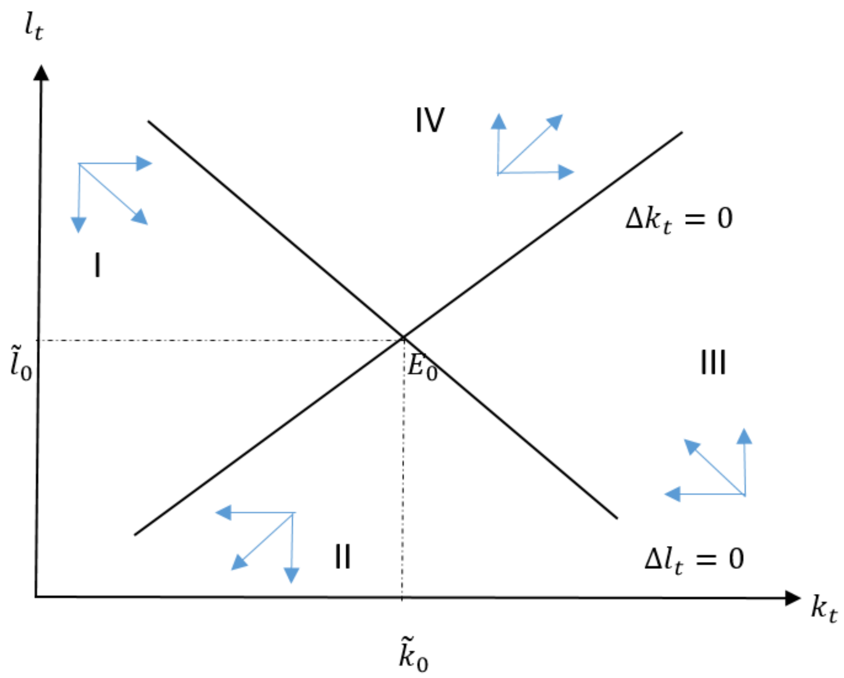

圖 3.1 勞動內生：$\Delta l_t = 0$ 線為負斜率的相圖

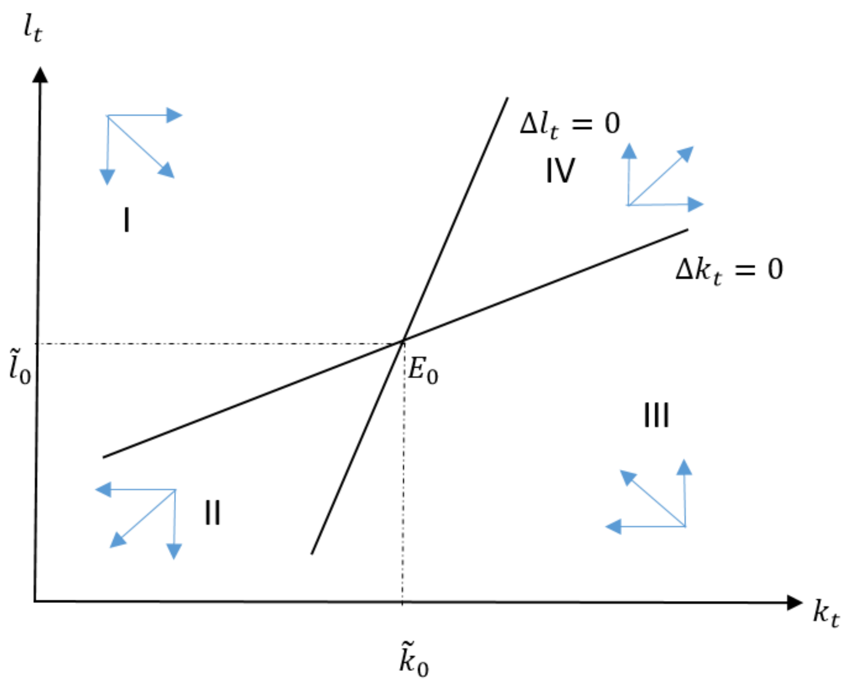

圖 3.2 勞動內生：$\Delta l_t = 0$ 線為正斜率且相對斜率比$\Delta k_t = 0$線陡峭的相圖

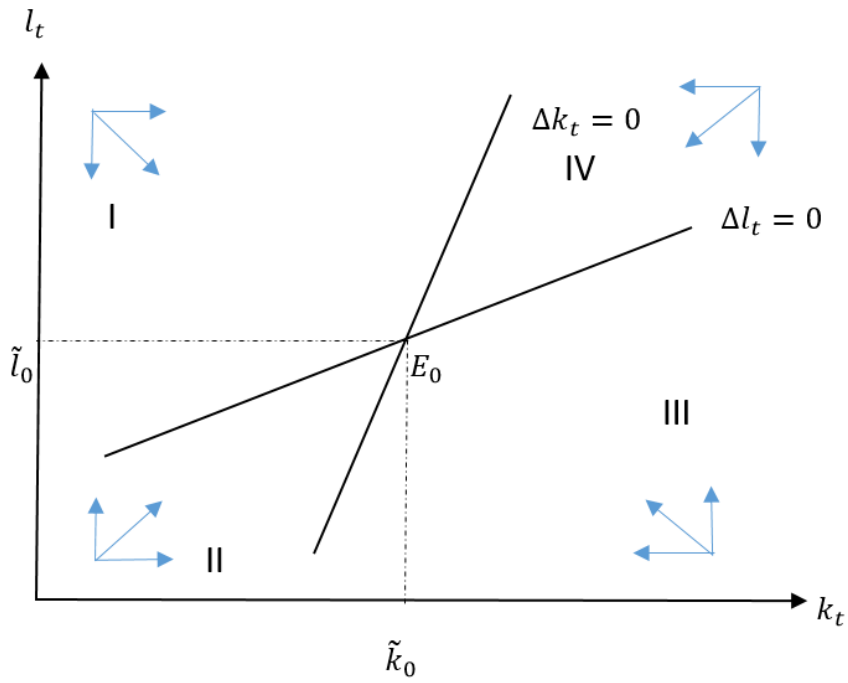

圖 3.3 勞動內生：$\Delta l_t = 0$ 線為正斜率且相對斜率比$\Delta k_t = 0$線平坦的相圖

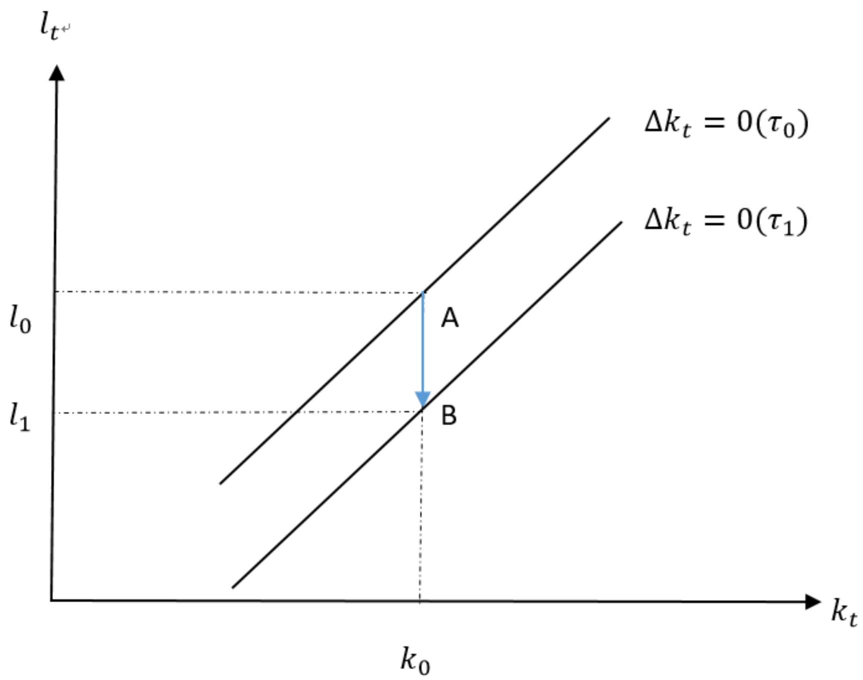

圖 3.4 勞動內生：所得稅率變動與$\Delta k_t = 0$ 線的移動

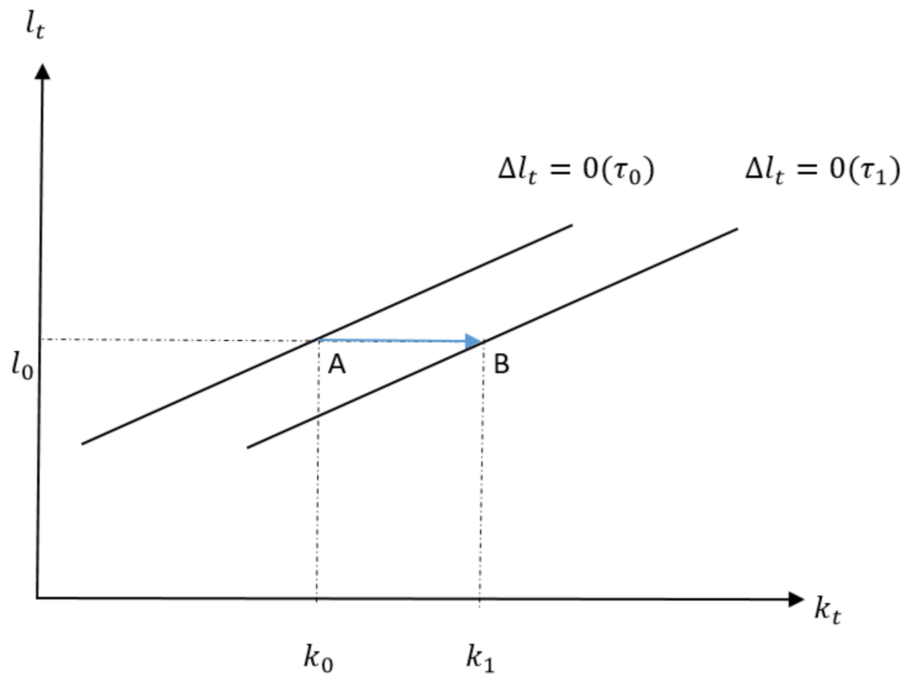

圖 3.5 勞動內生：所得稅率變動與$\Delta l_t = 0$ 線的移動

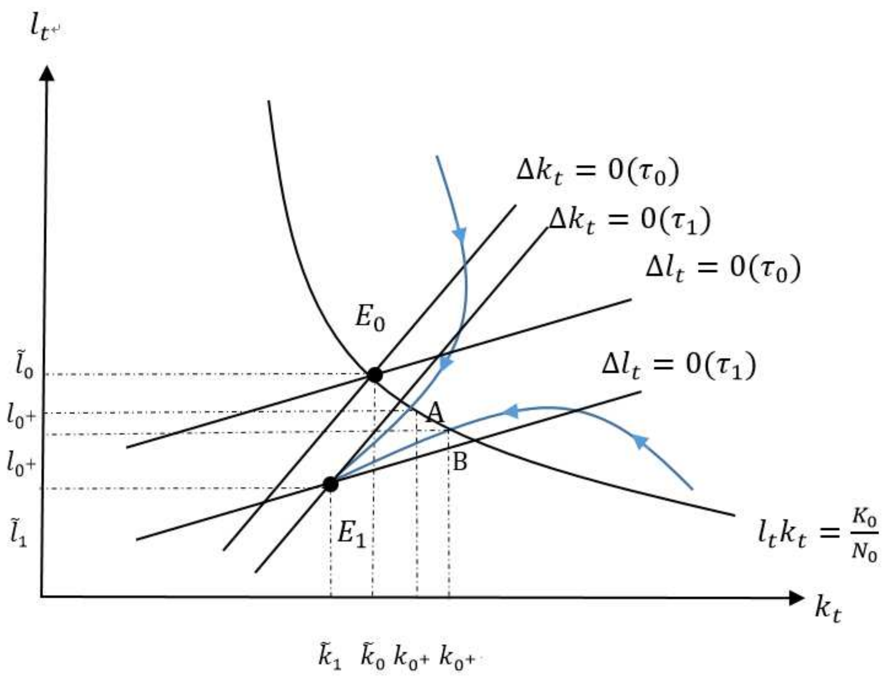

圖 3.6 勞動內生：所得稅率變動的比較靜態分析

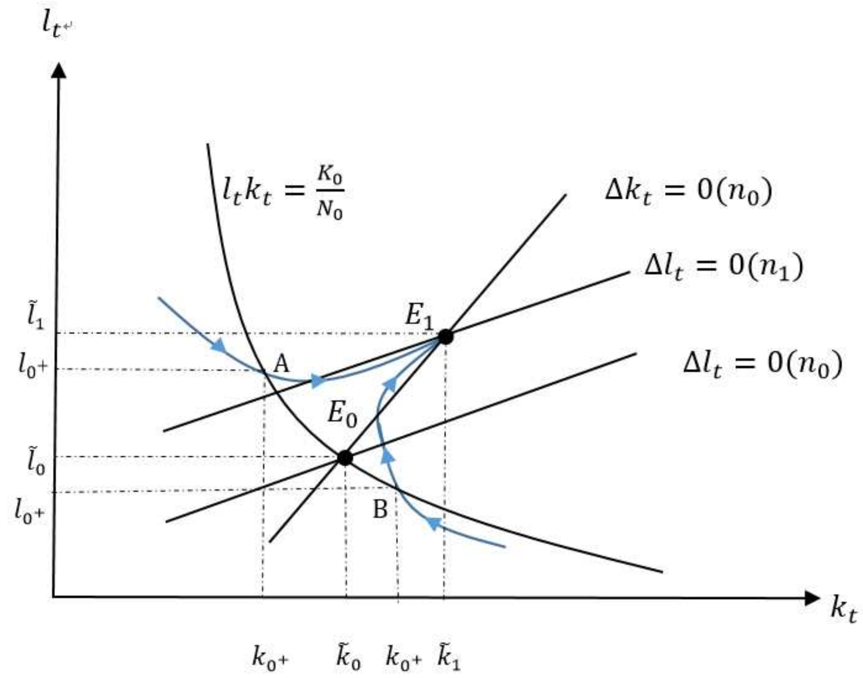

圖 3.7 勞動內生：人口成長率變動的比較靜態分析

第四章 結論與延伸

本文建立一個隨收隨付制年金的疊代經濟模型，並以線性所得稅融通其年金支付。不同於中央集權解，在考慮分權解的情況下，單一的代表性個人無法影響整體政府的行為，因此，代表性個人受限於個人預算限制式下做的決策，應將下一期得到年金視為外生給定，然而 Heijdra (2009)的模型設定，卻在分權解中將下一期的年金視為內生變數代入求解。據此，我們修改了 Heijdra (2009)的代表性個人最適化處理方式，並參考 Ihori (1996)與金志婷 (2011)的分析方法，建構了本文的模型。

在此模型架構，我們分別探討勞動外生及勞動內生的狀況下，政府調高所得稅率以及外生人口成長率降低會對經濟體系造成何種影響。根據本文的分析，我們發現，在勞動外生的情況下，政府的隨收隨付制年金政策將影響代表性個人的儲蓄決策，因此，政府提高所得稅率將降低個人的儲蓄意願而不利於每人資本的累積；而人口成長率降低則會造成下一期每人分得的資本增加，使得民眾有誘因增加儲蓄，利於每人資本的累積。

在勞動內生化的情況下，不同於 Heijdra (2009)代表性個人最適的勞動供給量為常數的結果，求解模型的總體均衡，將涉及勞動與資本勞動比兩條聯立差分方程式，且經濟體系會發生均衡的不確定性。最後，我們發現，如果政府提高所得稅率，將會將降低勞動者的工作意願，進而減少長期均衡的勞動量以及勞動所得，造成儲蓄量降低而不利於資本累積；而人口成長率降低則會增加勞動量及資本勞動比的長期均衡值，而得到與勞動外生化一致的結論。

礙於時間因素的考量，本文並未透過動態效率條件，來確認隨收隨付年金的存在與否是否會對經濟體系帶來正面的影響；若動態效率條件確認的結果為隨收隨付年金制的存在有利於經濟體系，那麼即使政府不出面開辦隨收隨付年金，民眾也會有誘因出來成立保險公司，進行隨收隨附的社會安全保險。此外，關於隨

收隨付年金的福利分析以及考慮勞動內生化的提存準備年金模型，這些相關的模型延伸也都會是非常有趣而且值得後續的研究者繼續探討的議題。

附錄 A

這個附錄的主旨在說明 Heijdra (2009)代表性個人最適勞動供給量為常數的推導過程。首先，代表性個人i的效用函數可表示為：

$$\Lambda_t^i \equiv lnc_t^{Yi} + \sigma \ln\left(1 - l_t^i\right) + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \text{；} \sigma > 0 \text{；} \rho > 0 \quad (\mathrm{A.1})$$

在考慮隨收隨付年金體制下，第i個代表性個人將面臨以下的終身預算限制式：

$$c_t^{Yi} + s_t^i = w_t l_t^i - \tau w_t l_t^i = (1-\tau) w_t l_t^i \quad (\mathrm{A.2})$$

$$c_{t+1}^{Oi} = (1 + r_{t+1}) s_t^i + z_{t+1}^i \quad (\mathrm{A.3})$$

參考自 Breyer and Straub (1993)的年金給付型式，在考慮跨代公平性(intragenerationally fair)的情形下，下一期的年金給付型式可表示為：

$$z_{t+1}^i = \left(\tau w_{t+1} \textstyle\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i\right) \left(\frac{l_t^i}{\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i}\right) \quad (\mathrm{A.4})$$

上式中，等號右邊的第一項為下一期的總稅收，等號右邊第二項為代表性個人i提供的勞動佔總勞動的份額；換言之，代表性個人在年輕時提供越多的勞動量，其年老時就能領到更多的年金。

將式 (A.2)、(A.3)、(A.4)合併，可以得到代表性個人i的終身預算限制式為：

$$c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} = w_t l_t^i - \tau\left(1 - \frac{w_{t+1}\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i}{w_t(1+r_{t+1})\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i}\right) w_t l_t^i \quad (\mathrm{A.5})$$

上式即為 Heijdra (2009)代表性個人將年金視為內生變數，且給付型式考慮跨代公平性下的終身預算限制式。 據此，可以設定以下的 Lagrange 函數L：

$$\begin{aligned} L = {} & lnc_t^{Yi} + \sigma ln\left(1 - l_t^i\right) + \frac{1}{1+\rho} lnc_{t+1}^{Oi} \\ & -\lambda_t \left[c_t^{Yi} + \frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}} - w_t l_t^i - \tau\left(1 - \frac{w_{t+1}\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i}{w_t(1+r_{t+1})\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i}\right) w_t l_t^i\right] \quad (\mathrm{A.6}) \end{aligned}$$

依據式 (A.6)可推得以下最適的一階條件：

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^{Yi}} = \frac{1}{c_t^{Yi}} - \lambda_t = 0 \quad (\mathrm{A.7.1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1}{1+\rho} \frac{1}{c_{t+1}^{Oi}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} = 0 \quad (\mathrm{A.7.2})$$

$$\frac{\partial L}{\partial(1-l_t^i)}=\frac{\sigma}{1-l_t^i}-\lambda_t w_t-\lambda_t w_t\tau\left(1-\frac{w_{t+1}\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i}{w_t(1+r_{t+1})}\right)\frac{(\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i)-l_t^i}{\left(\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i\right)^2}=0 \qquad (\mathrm{A.7.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t}=-c_t^{Yi}-\frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}}+w_t l_t^i-\tau\left(1-\frac{w_{t+1}\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i}{w_t(1+r_{t+1})\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i}\right)w_t l_t^i=0 \qquad (\mathrm{A.7.4})$$

其中令$\tau^E=\tau\left(1-\frac{w_{t+1}\sum_{i=1}^{N_{t+1}} l_{t+1}^i}{w_t(1+r_{t+1})\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i}\right)$，且假定個人勞動量佔社會總勞動量平方的比例很小$\frac{l_t^i}{\left(\sum_{i=1}^{N_t} l_t^i\right)^2}$這一項近似於零，則式 (A.7.3)、(A.7.4)可改寫為：

$$\frac{\sigma}{1-l_t^i}=\lambda_t w_t(1-\tau^E) \qquad (\mathrm{A.8})$$

$$c_t^{Yi}+\frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}}=w_t(1-\tau^E)l_t^i \qquad (\mathrm{A.9})$$

將式 (A.7.1)、(A.7.2)相除可得 Euler 方程式為：

$$\frac{c_t^{Yi}}{c_{t+1}^{Oi}}=\frac{1+\rho}{1+r_{t+1}} \qquad (\mathrm{A.10})$$

將式 (A.10)代入式 (A.9)可得兩期消費為：

$$c_t^{Yi}=\frac{1+\rho}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau^E)l_t^i\right] \qquad (\mathrm{A.11})$$

$$c_{t+1}^{Oi}=\frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}\left[w_t(1-\tau^E)l_t^i\right] \qquad (\mathrm{A.12})$$

將式 (A.7.1)、(A.11)代入式 (A.8)可解得代表性個人i的勞動決策為：

$$l_t^i=\frac{2+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)} \qquad (\mathrm{A.13})$$

上式顯示，Heijdra (2009)在代表性個人將下一期年金z_{t+1}^i視為內生變數且給付型式考慮跨代公平性下，將使得個人的最適勞動供給量為常數，而有別於本文存在勞動供給的差分方程式的分析結果。

若社會安全退休年金的開辦是由民間的保險公司來負責，則代表性個人最適決策將年金視為內生的處理方式尚屬合理，然而一般而言，國民年金制度的開辦是由政府出面執行，因此本文仍認為在代表性個人決策將年金視為外生給定是較為妥當的處理方式。

附錄 B

這個附錄的主旨在說明當工資率上升時，勞動供給的替代效果將強於所得效果。首先，我們將式 (3.6)的個人預算限制式重新改寫為：

$$c_t^{Yi}+\frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}}+w_t(1-\tau)\left(1-l_t^i\right)=w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}} \tag{B.1}$$

據此，第i個代表性個人的最適決策可以重新表示如下：

$$Max\ \Lambda_t^i=lnc_t^{Yi}+\sigma ln\left(1-l_t^i\right)+\frac{1}{1+\rho}lnc_{t+1}^{Oi} \tag{B.2}$$

$$s.t.\ \ c_t^{Yi}+\frac{c_{t+1}^{Oi}}{1+r_{t+1}}+w_t(1-\tau)\left(1-l_t^i\right)=w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}} \tag{B.3}$$

整理成上述的型式後，其實式 (B.2)、(B.3)的最適化問題就等價於：

$$Max\ U=\alpha lnX+\beta lnY+\gamma lnZ \tag{B.4}$$

$$s.t.\ \ P_XX+P_YY+P_ZZ=M \tag{B.5}$$

由於 logarithmic 型式的效用函數僅只是 Cobb-Douglas 效用函數的單調遞增轉換，因此兩者會有相同的解，而由 Cobb-Douglas 效用函數的公式解可知X、Y、Z的解分別為：

$$X=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{M}{P_X} \tag{B.6}$$

$$Y=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{M}{P_Y} \tag{B.7}$$

$$Z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{M}{P_Z} \tag{B.8}$$

準此，式 (B.3)個人預算限制式的經濟意涵可以重新詮釋為：當期消費c_t^{Yi}的價格為 1，下一期消費c_{t+1}^{Oi}的價格為$\frac{1}{1+r_{t+1}}$，休閒$1-l_t^i$的價格為放棄工作的代價，即稅後工資率$w_t(1-\tau)$，等號右邊為終身所得$w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}$。代表性個人將在受限於終身所得下，分別消費$c_t^{Yi}$、$c_{t+1}^{Oi}$、$1-l_t^i$這三種財貨，以追求個人的終身效用極大。

由式 (B.6)、(B.7)、(B.8)可知，我們的最適化問題c_t^{Yi}、c_{t+1}^{Oi}、$1-l_t^i$的解為：

$$c_t^{Yi}=\frac{1+\rho}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)}\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right] \tag{B.9}$$

$$c_{t+1}^{Oi} = \frac{1}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)} \frac{\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right]}{\frac{1}{1+r_{t+1}}} \tag{B.10}$$

$$1 - l_t^i = \frac{\sigma(1+\rho)}{\sigma(1+\rho)+(2+\rho)} \frac{\left[w_t(1-\tau)+\frac{z_{t+1}^i}{1+r_{t+1}}\right]}{w_t(1-\tau)} \tag{B.11}$$

我們將從式 (B.11)著手說明工資率上升對勞動供給的替代效果以及所得效果。根據定義，價格效果指的是相對價格改變後對需求量造成的變動，而所得效果指的是所得改變後對需求量造成的影響。式 (B.11)中，等號右邊第二項的分母為休閒的價格，分子則為終身所得，因此工資變動的價格效果就反映在式 (B.11)的分母，而所得效果則是反映在式 (B.11)的分子。工資率上升將使得休閒的代價提高而導致休閒減少，勞動增加，此為工資率上升的價格效果；另一方面，由於工資率上升也會使得終身所得增加，在休閒是正常財的情形下，將會增加休閒而減少勞動，此為工資率上升的所得效果。

由數學式可知，當不存在年金時，工資率上升的替代效果應等於所得效果，此時的勞動供給量為常數。而我們的模型因為存在隨收隨付年金，這筆年金可視為一種稟賦，因此將削弱工資率上升帶來的所得效果，從而造成工資率上升時，勞動供給的替代效果將強於所得效果。這樣的結果也再度印證了，本文與 heijdra (2009)的結果有所不同的最根本差異在於：在考慮代表性個人最適決策時，我們將下一期的年金當作外生給定，而非視為內生變數代入進行求解。

附錄 C

這個附錄的主旨在說明均衡值$\tilde{k} > 0$的條件下，式 (3.53)、(3.70)的條件會自動成立。首先，我們先將勞動內生化時的 Euler 方程式以及兩條差分方程式重述如下：

$$\frac{c_t^{Yi}}{c_{t+1}^{Oi}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}} \tag{C.1}$$

$$l_t = \frac{(2+\rho)(1-\tau)-\sigma(1+\rho)\tau(\frac{w_{t+1}}{w_t})(\frac{1+n}{1+r_{t+1}})l_{t+1}}{(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} \tag{C.2}$$

$$\frac{1-\tau}{2+\rho}w_t l_t - \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right)\frac{\tau(1+n)w_{t+1}l_{t+1}}{1+r_{t+1}} = (1+n)l_{t+1}k_{t+1} \tag{C.3}$$

於靜止均衡時我們可知：$k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$、$l_{t+1} = l_t = \tilde{l}$、$c_t^{Yi} = c_{t+1}^{Oi} = \tilde{c}$，因此由式 (C.1)我們可以得到以下關係式：

$$\tilde{r} = \rho \tag{C.4}$$

意即長期靜止均衡時，利率的靜止均衡值會等於時間偏好率，另外，我們由$k_{t+1} = k_t = \tilde{k}$亦可推知：

$$w_{t+1} = w_t = \widetilde{w} \tag{C.5}$$

根據以上的關係式，則式 (C.1)、(C.2)可分別改寫如下：

$$\tilde{l} = \frac{(2+\rho)(1-\tau)-\sigma\tau(1+n)\tilde{l}}{(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} \tag{C.6}$$

$$[(1-\tau)-\tau(1+n)]\widetilde{w} = (1+n)(2+\rho)\tilde{k} \tag{C.7}$$

由於我們要求均衡值$\tilde{k} > 0$，因此可以得到以下的限定條件：

$$(1-\tau) > \tau(1+n) \tag{C.8}$$

上式的經濟意涵為：一個安定的疊代經濟體系，必須存在一個所得稅率的上限值，否則勞動者的稅後所得將會低於下一期拿到的年金，在這種情況下，勞動者將沒有誘因提供勞動，從而造成經濟體系的崩潰。

式 (C.8)成立的情況下，式 (3.53)、(3.70)的條件將會自動成立。而由式 (C.6)、(C.7)我們亦可解得$\tilde{l}$、$\tilde{k}$的靜止均衡值為：

$$\tilde{l} = \frac{(2+\rho)(1-\tau)}{\sigma\tau(1+n)+(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} \tag{C.9}$$

$$\tilde{k} \ = \left\{\frac{\epsilon[(1-\tau)-\tau(1+n)]}{(1+n)(2+\rho)}\right\}^{\frac{1}{\epsilon}} \tag{C.10}$$

若$\sigma = 0$代入式 (C.9)，則會得到$\tilde{l} = 1$，此結果將與勞動外生化的情形一致，再度驗證了勞動外生化僅為勞動內生化模型$\sigma = 0$的特例。

利用式 (C.9)我們亦可計算α的真實數值為：

$$\alpha = (1+\sigma)\tilde{l} - 1 = \frac{\sigma[(1-\tau)-\tau(1+n)]}{\sigma\tau(1+n)+(1-\tau)[\sigma(1+\rho)+(2+\rho)]} > 0 \tag{C.11}$$

運用了式 (C.8)的限定條件，我們即可證明文中提及的α確實為大於零的正數。

參考文獻

行政院主計處國情統計通報資料 (2015)，「103 年國人平均壽命 79.8 歲，104 年 11 月老化指數達 91.6」，URL: http://www.dgbas.gov.tw/public/Data/5123016245198HDYFK.pdf。

行政院勞動部勞工保險局全球資訊網 (2016)，「國民年金簡介」，URL: http://www.bli.gov.tw/sub.aspx?a=DUbMXxAoFv4%3d。

金志婷 (2011)，「隨收隨付與完全提存的國民退休年金：不同財政政策指標之比較」，《經濟論文叢刊》，第 39 卷，第 2 期，頁 213-241。

賴景昌 (2011)，《總體經濟學》，第十九章。台北：雙葉。

Altig, D. and Gokhale, J., (1997), Social security privatization: A simple proposal, *Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper* 9703, 36.

Azariadis, C., (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Ch. 5 Oxford: Blackwell.

Belan, P., Michel, P. and Pestieau, P., (1998), Pareto-improving social security reform, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 23, 119-125.

Belan, P. and Pestieau, P., (1999), Privatizing social security: A critical assessment, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Issues and Practice* 24, 114-130.

Blanchard, O. J., (1985), Debt, deficits and finite horizons, *Journal of Political Economy* 93, 223-247.

Breyer, F. and Straub, M., (1993), Welfare effects of unfunded pension systems when labor supply is endogenous, *Journal of Public Economics* 50, 77-91.

Buiter, W. H., (1988), Death, productivity growth and debt neutrality, *Economic Journal* 98, 279-293.

Diamond, P. A., (1965), National debt in a neoclassical growth model, *American Economic Review* 55, 1126-1150.

Feldstein, M. S. and Samwick, A. A., (1998), The transition path in privatizing social security, in M. S. Feldstein (ed.), *Privatizing Social Security*, Chicago: University of Chicago Press.

Gandolfo, G., (1980), *Economic Dynamics: Methods and Models*, Ch. 2 and Ch. 8. Amsteradam: North-Holland.

Heijdra, B. J., (2009), *Foundations of Modern Macroeconomics*, Ch. 17. Oxford: Oxford University Press.

Ihori, T., (1996), *Public Finance in an Overlapping Generations Economy*, Ch. 3 and Ch. 10. London: Macmillan Press.

Jha, S. K., Wang, P. and Yip, C. K., (2002), Dynamics in a transactions-based monetary growth model, *Journal of Economic Dynamics & Control* 26, 611-635.

Kotlikoff, L. J., (1996), Privatizing social security: How it works and why it matters, in J. M. Poterba (ed.), *Tax Policy and the Economy*, Cambridge, MA: MIT Press.

Pollard, P. S. and Pecchenino, R. A., (1997), The transition from a pay-as-you-go to a fully-funded social security system: Is there a role for social insurance, *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Papers* 97, 22.

Samuelson, P. A., (1958), An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money, *Journal of Political Economy* 66, 467-482.

Sheshinski, E. and Weiss, Y., (1981), Uncertainty and optimal social security system, *Quarterly Journal of Economics* 96, 189-206.

Valde´z-Prieto, S., (1997), Financing a pension reform towards private funded pensions, in S. Valde´z-Prieto (ed.), *The Economics of Pensions. Principles, Policies and International Experiences*. Cambridge: Cambridge University

Press.

Weil, P., (1989), Overlapping families of infinitely-lived agents, *Journal of Public Economics* 38, 183-198.

Yaari, M. E., (1965), Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer, *Review of Economic Studies* 32, 137-150.