隨機動態經濟模型之研究——無限期貼現型動態規劃模型

汪 義 育

（作者爲本校國貿系專任講師）

摘 要

本文係根據動態經濟決策過程之性質，建立貼現型隨機動態經濟基本模型，並討論模型之數理特性。對於模型之價值函數與最適政策函數之主要性質亦加以討論。

首先，說明基本模型數理上實爲函數方程式，並證明模型本質爲一種緊縮映射，故存在單一解，此解卽爲模型之價值函數。

其次，根據基本模型之假設，導出並討論價值函數（連續、有界、單調增加、凹函數及存在最適政策）與最適政策函數（連續與遞歸性）之特性外，並討論價值函數之可微分性。

最後，我們檢討模型之實用性與限制，並納入數學附錄以期體系之完整。

㈠前 言

經濟體系普遍存在若干動態結構關係，故經濟行爲主體之決策或行動，必將左右未來經濟情況且進而影響決策者未來之福祉。更由於決策者所追求或考慮之目標爲長久之福祉而非當時之利害；因此，理性決策者必須考慮決策對未來經濟情況與福祉之影響。雖決策者對於未來主要經濟情況可藉對於體系動態結構之了解而能作相當精確之預期；然，若干無法控制或預期的未來干擾因素對於未來之情況與決策之效果，亦有相當之影響；故決策者不能忽略此一因素。於是，典型經濟決策者根據決策每期之經濟情況，考慮決策對於未來情況可能之影響，在經濟情況所允許選擇之可能決策中，採取最適決策來達成某種長遠之目標。決策者於次期又面臨由前期決策與當期不確定因素所決定之新

經濟情況，而須作類似之決策選擇。如此一期復一期，即成爲一種數列決策問題或多期決策問題。因此，此種問題可用隨機動態規劃方法來加以嚴謹之探討。

動態規劃方法首先由 R. Bellman, S. Karlin 等人於五十年代奠定研究之基礎後，無論數學、統計、作業研究以及經濟等科學上均有廣泛之應用與發展。 R. Howard 發展較完整之有限期次隨機動態控制理論及 D. Blackwell〔1962,1965〕建立更完整之離散型 (discrete) 與貼現型 (discounted) 動態規劃理論，更適合動態經濟決策體系之分析。此外，E. Denardo〔1967〕以收縮映射理論來探討動態規劃模型之基本精神而提供動態規劃理論分析上極爲有用之工具。

關於運用動態規劃問題於經濟理論研究之論著，屢見於經濟文獻(註一)，至於運用收縮映射理論於貼現型隨機動態經濟模型，則最近才有 R. Lucas and E. Prescott〔1971〕, J. Danthine〔1977〕與 R. Lucas〔1978〕等研究。由於純數理討論之隨機動態體系過於繁複抽象，故實難直接運用於經濟理論之探討，亦無法對於經濟理論發展有所裨益(註二)；至於前引之經濟理論運用之論著，則又因討論主題不同而有不同體系與假設，故，對於分析方法亦難有一般之概念。因此，本文擬建立一抽象之基本經濟模型，配合常見之假設，並根據有關動態規劃理論來探討關係基本模型之重要經濟決策的問題。

下文討論，擬先根據常見經濟動態決策問題之性質，配合動態規劃體系，建立抽象之基本經濟模型，並探討此種問題之基本性質。其次，導出此種動態決策體系之價值函數 (value function) 與最適決策函數 (optimal policy function) 之性質，最後，則於結論中檢討若干運用上有關之問題。又，爲使討論體系完整，故併列數理附錄，以供參考。

(二)基本模型之建立

任何時期下，經濟情況可由一組內生變數向量與外生干擾向量 (x_t, z_t) 來表示；經濟決策者 (如生產者、消費者或政策決定者等) 面臨某種可選擇決策之集合 (choice set) $\Omega(x_t, z_t)$ (如消費可能集合或生產可能集合等)；基於某種目標或準則上之考慮 (如最大滿足，最大利潤或最大社會福祉) 在此種有限可選擇集合中採取最適當之行動或

決策（如消費組合，生產組合或適當政策等）。然，此種行動或決策除關係當期之利害外，尚影響後期可選擇之集合並進而左右未來各期之利害得失；故，於決策時，理性決策者亦同時考慮決策對於未來之影響。惟未來經濟情況除內生變數可由經濟動態結構關係預期外，若干外生干擾變數則無法事先預測；因此，決策者於選擇策略時，除需考慮各種決策對未來經濟情況之影響外，尙需對未來外生變數之變動作全盤性考慮。

爲較嚴謹地探討此種決策問題，現擬依次導入若干具體假設。設經濟情況係以內生變數向量與外生干擾變數向量 (x_t, z_t) 來表示，其中 x_t 與 z_t 分別爲 n 度實數空間正向量與 k 度實數空間向量，即 $x_t \epsilon R^{n+}$, 而 $z_t \epsilon R^k$。假設經濟內生變數向量係受經濟動態結構關係之限制而決定於前期內生變數 x_{t-1} 與前期決策 y_{t-1}，即

$$x_t = h(x_{t-1}, y_{t-1})$$

且假設 h 爲有界、漸增、連續可微分之凹函數 (bounded, increasing continuously differentiable & concave function)。其實，本期內生變數亦可能受其他更早期之內生變數與決策之影響；然，本文之重點非在討論經濟體系之結構關係，故上述簡化假設實能配合分析之需要。此外，模型中外生干擾變數向量 z_t 係假設爲一種 Markov 過程，並得以下列連續之傳遞函數 (transition funtion) 表示之：

$$F(z', z) \equiv \text{Prob}\{z_{t+1} \leq z', z_t = z\};$$

即次期干擾向量之條件分配函數爲固定之 $F(\cdot, z)$，且對於任何固定之 z，則 $F(\cdot, z)$ 爲分配函數。此外，假設 F 所定義之隨機過程有恒常之分配函數 $\Phi(\cdot)$；此即爲

$$\Phi(z') = \int F(z', z) d\Phi(z) \text{ 之單一解；}$$

並且對於任何連續函數 $g(z')$，假設

$$\int g(z') dF(z', z)$$

爲 z 之連續函數。

經濟決策者於任何時期下所能選擇決策之集合，則假設受當期經濟情況限制而爲 $\Omega(x_t, z_t)$ 集合，且假設此集合在任何固定之下 z_t，均爲封閉且有界之凸集合 (closed bounded and convex set) 並爲 (x_t, z_t) 之連續對應 (continuous correspondence)。此種可選擇之集合亦可較具體地定義爲

$$\Omega(x_t,z_t)=\{y_t \epsilon R^{n+}: l(x_t,y_t,z_t)\geqq 0\}$$

而假設 ℓ 爲連續可微分之函數，且對於任何固定之 x_t，ℓ 爲 y_t 與 x_t 之凹函數；因而具有上述之性質。至於經濟決策者選擇行動或決策所考慮之目標或準則，假設每期之報酬係受經濟情況（x_t,z_t）與所採之決策 y_t 影響之固定的報酬函數（return function）。且假設此函數爲

（I）連續可微分

（II）有界的

以及（III）對於任何固定之 z_t，$R(x_t,y_t,z_t)$ 爲 x_t 與 y_t 之嚴格凹函數（strictly concave function）。

又，決策者基於時間偏好等理由，故對於不同時期之報酬有不同之評價；因此，假設決策者以固定之「貼現率」$\beta(0\leq\beta\leq 1)$ 來評價次期之報酬，決策者雖每期分別作各期決策，然，由於各期決策均影響次期之可選擇集合及報酬；因而決策時實考慮決策後之總貼現報酬（total discounted return）。

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t R(x_t,y_t,z_t)$$

惟未來經濟情況（尤其是外生干擾變數）無法事先預知；因此，決策者根據當期經濟情況（x_t,z_t），並考慮外生干擾變數之條件分配函數，希望由各期可選擇之決策集合 $\Omega(x_t,z_t)$ 中，選擇 $\{y_0,y_1\cdots\cdots\}$ 決策數列而達成預期總貼現報酬之極大化。總言之，決策者面臨之動態決策問題即爲：

$$\max_{\{y_0,y_1\cdots\}} E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t R(x_t,y_t,z_t)$$

$$\text{subject to}\begin{cases} y_t\epsilon\Omega(x_t,z_t) & \forall t\leq 0 \\ y_{t+1}=h(x_t,y_t) & \forall t\leq 0 \end{cases}$$

其中 E_0 爲條件於 0 期情況下之期待值。由於選擇決策時該期情況已知，故

$$\max_{\{y_0,y_1,\cdots\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t R(x_t,y_t,z_t)$$

$$=\max_{\{y_0,y_1,\cdots\}} R(x_0,y_0,z_0)+E_0\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t R(x_t,y_t,z_t)$$

$$=\max_{y_0}\{R(x_0,y_0,z_0)+\beta E_0 \max_{\{y_1,y_2\cdots\}}\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t R(x_{t+1},y_{t+1},z_{t+1})\}$$

倘以 $v(x_s,z_s)$ 表示此種規劃問題在S期後選擇最適決策數列下所能達到之最大預期總貼現報酬，即

$$v(x_s,z_s)\equiv\max_{\{y_s,y_{s+1},\cdots\}} E_s\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t R(x_{t+s},y_{t+s},z_{t+s})$$

$$\text{subject to } y_{t+s}\in\Omega(x_{t+s},z_{t+s})\ \forall t\geq o$$

則上述規劃問題可表示爲

$$v(x_0,z_0)=\max_{y_0}R(x_0,y_0,z_0)+\beta\int v[h(x_0,y_0),z_1]dF(z_1,z_0)$$

$$\text{subject to } y_0\in\Omega(x_0,z_0)$$

亦即爲 $v(x_0,z_0)=\max\limits_{y_0\in\Omega(x_0,z_0)} R(x_0,y_0,z_0)+\beta\int v[h(x_0,y_0),z_1]dF(z_1,z_0)$

上式即說明動態規劃中之 Bellman 最適性原則（principle of optimality）：

倘 $\{y_0^*,y_1^*,\cdots\}$ 爲0期以後最適決策數列，則 $\{y_1^*,y_2^*\cdots\}$ 必須爲0期決策後與1期情況下之最適決策數列。

換言之，經濟行爲主體在初期情況 (x_0,z_0) 下作決策時，除考慮本期決策對下期情況之影響外，必然假設次期決策亦爲根據次期情況下之最適當之決策；因此，行爲主體自初期以後，均面臨一序列相同之決策問題而作類似之最適決定，亦因而在各期決策時，均希望選擇決策而使當期報酬與條件於此期情況下預期 $v(x_1,z_1)$之總和可達到最大。

由於此類隨機動態規劃之最大預期總貼現報酬，以及此後各期之最大預期總貼現報酬均決定於決策時之情況，故，爲 (x,z) 之函數且一般稱爲價值函數（value function）。最後，爲進一步簡化後文討論起見，假設 $x_{t+1}=y_t$，故此類隨機動態規劃問題均可表示爲

$$v(x,z)=\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$$

現擬就上述模型之基本數理性質，作進一步之探討。由於假設x爲n度實數空間之

正向量（即 $x\in R^{n+}$）而 z 爲 k 度實數空間向量（即 $z\in R^{k}$），故 v 爲由 $R^{n+}\otimes R^{k}$ 映入實數之函數，即 $v: R^{n+}\otimes R^{k}\rightarrow R$。倘對於任何 $R^{n+}\otimes R^{k}$ 空間上之實數函數 $w(x,z)$，定義

$$Tw(x,z)\equiv\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\int w(y,z')dF(z',z)$$

則上述體系可寫爲

$$v(x,z)=Tv(x,z)$$

因而成爲一函數方程式（functional equation）。根據上面定義可知爲一種由 $R^{n+}\otimes R^{k}$ 空間上函數映入 $R^{n+}\otimes R^{k}$ 空間上函數之轉換（transformation）或運算子（operator），此即 Eric V. Denardo 文中之極大化運算素（maximization operator）。

設 L 爲所有 $R^{n}\otimes R^{k}$ 空間上連續且有界之函數（continuous and bounded functions），則 L 即爲一種線性空間（請參閱附錄(A)）。因此，倘 $w(x,z)\in L$，則 $Tw(x,z)$ 亦屬於 L 空間中之元素。蓋

$$Tw(x,z)=\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$$

且由於 $R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$ 爲連續，而 $\Omega(x,z)$ 爲封閉且有界之凸集，故知在此種限制下之極大值存在且有界；此外，根據極大值定理（參考附錄(D)），故知 $Tw(x,z)$ 亦爲連續函數；因此，$Tw(x,z)\in L$。

極大化運算素 T 既爲由 L 映入自身之映射（mapping），倘能進而證明其爲收縮映射（contraction mapping），則根據收縮映射之定點定理（fixed point theorem for contraction maps），即可證明此種隨機動態規劃體系存在單一之價值函數（關於此種映射之意義及定點定理，請參閱附錄(B)）。

〔定理一〕：

隨機動態規劃模型

$$v(x,z)=\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$$

存在單一之連續且有界價值函數。換言之，函數方程式

$$v(x,z)=Tv(x,z)$$

有單一之連續且有界解。

此外，對於任何 $v \in L$，且有 $\lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v$

〔證明〕：

倘能證明T爲收縮映射，則根據收縮映射之定點定理卽可證明存在單一之連續且有界函數解，且對於任何連續且有界函數 v_0，均有 $\lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v$。因此，倘能證明T滿足 Blackwell 之收縮映射充分條件（請參閱附錄(C)）；則上述定理得證。故擬首先證明T爲單調轉換，卽證明倘 $v(x,z) \geqq w(x,z)$，則均有 $Tv(x,z) \geqq Tw(x,z)$。設 y_w 達成 $Tw(x,z)$，

$$
\begin{aligned}
\text{則 } Tw(x,z) &= R(x,y_w,z) + \beta \int w(y_w,z')dF(z',z) \\
&\leqq R(x,y_w,z) + \beta \int v(y_w,z')dF(z',z) \\
&\leqq \max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z) + \beta \int v(y,z')dF(z',z) \\
&= Tv(x,z)
\end{aligned}
$$

其次，尙需證明C倘爲任何常數，則對於任何 (x,z)，均有

$T(v+c)(x,z) \leqq Tv(x,z) + kc$ 其中 k 爲小於一之正數。

根據定義知：

$$
\begin{aligned}
T(v+c)(x,z) &= \max_{y\in\Omega(x,z)} R(x',y,z) + \beta \int (v+c)(y,z')dF(z',z) \\
T(v+c)(x,z) &= \max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z) + \beta \int (v(y,z')+c)dF(z'z) \\
&= \max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z) + \beta \int v(y,z')dF(z',z) + \beta c \\
&\leqq Tv(x,z) + \beta c
\end{aligned}
$$

因此，T爲由 L 映入 L 之收縮映射，故存在單一定點，卽存在單一連續且有界函數 v，且對於任何 $v_0 \in L$ 均有 $\lim_{n\to\infty} T^n v_0 = v$。

貼現型隨機動態規劃體系，數理上言，實爲一種函數方程式，此種體系之價値函數實爲函數方程式之解，根據此種動態規劃體系之基本假設，此種體系可視爲一種收縮映射，故存在單一解，而此解可由任意連續且有界函數經多次極大化運算素之轉換來加以漸近估計。

㈢價値函數與最適決策函數之基本性質

現擬進一步探討基本體系最大預期總貼現報酬及達成此報酬之決策與經濟情況間之

重要關係。換言之，卽探討價值函數與最適決策函數之主要性質以及在若干常見假設下，可能導出之特性。

基本體系之價值函數 $v(x,z)$，具有下列四項基本性質：

(I) 對於任何 (x,z)，$v(x,z)$ 爲連續且有界之函數；

(II) 對於任何固定之 z，$v(x,z)$ 爲 x 之絕對凹函數 (strictly concave function) ；

(III) 對於任何固定之 z，$v(x,z)$ 爲 x 之單調增函數(monotonic increasing function) ；

以及 (IV) 對於任何 (x,z) ，均存在單一之最適決策以達成價值函數。

除 $v(x,z)$ 爲連續且有界函數之特性，業已證實外，現依次證明其餘三項基本性質：

(II) $v(x,z)$ 爲 x 之絕對凹函數：

設 $x^0, x' \in R^{n+}$ 且 $x^\theta = \theta x^0 + (1-\theta)x' \quad 0 \leq \theta \leq 1$;

並設 $y^0 \in \Omega(x^0,z)$ 及 $y' \in \Omega(x',z)$ 分別達成 $Tw(x^0,z)$ 及 $Tw(x',z)$，亦卽

$$Tw(x^0,z) = R(x^0,y^0,z) + \beta \int w(y^0,z')dF(z',z)$$

$$Tw(x',z) = R(x',y',z) + \beta \int w(y',z')dF(z',z)$$

又設 $y^\theta = \theta y^0 + (1-\theta)y'$ ；則由於

$$\ell(x^\theta,y^\theta,z) \geqq \theta \ell(x^0,y^0,z) + (1-\theta)\ \ell(x',y',z) \geqq 0$$

故知 $y^\theta \in \Omega(x^\theta,z)$

倘若 $w(x,z)$ 爲 x 之凹函數，則

$$\begin{aligned}
&\theta\,(Tw(x^0,z)) + (1-\theta)(Tw(x',z)) \\
&\quad = \theta\,[R(x^0,y^0,z) + \beta \int w(y^0,z')dF(z',z)] \\
&\qquad + (1-\theta)[R(x',y'z) + \beta \int w(y',z')dF(z'z)] \\
&\quad \leqq R(x^\theta,y^\theta,z) + \beta \int [\theta w(y^0,z') + (1-\theta)w(y',z')]dF(z',z) \\
&\quad \leqq R(x^\theta,y^\theta,z) + \beta \int w(y^\theta,z')dF(z',z) \\
&\quad \leqq \max_{y \in (x^\theta,z)} \{R(x^\theta,y,z) + \beta \int (y,z')dF(z',z)
\end{aligned}$$

$$=Tw(x^{\theta},z)$$

因此，可知若 $w(x,z)$ 爲凹函數，則 $Tw(x,z)$ 亦爲凹函數。又由於T爲收縮映射，故對於任何連續且有界之函數，均有 $\lim_{n\to\infty} T^n w(x,z)=v(x,z)$。所以，$v(x,z)$ 爲凹函數。此外，因 $R(x,y,z)$ 假設爲x之絕對凹函數，

故
$$\begin{aligned}&\theta(Tw(x^0,z))+(1-\theta)(Tw(x',z))\\ &<R(x^{\theta},y^{\theta},z)+\beta\int w(y^{\theta},z')dF(z',z)\\ &\leqq Tw(x\theta,z)\end{aligned}$$

因此，$v(x,z)$ 爲 x之絕對凹函數。

(III) $v(x,z)$ 爲x之單調增函數：

倘另假設(1)$R(x,y,z)$ 爲x之增函數，以及(2)如 $x'\geqq x^0$ 則 $\Omega(x,z)\supset\Omega(x^0,z)$；$v(x,z)$ 則爲x之單調增函數。〔註三〕

蓋，如 $x'>x^0$ 且 $y^0\in\Omega(x^0,z)$ 達成 $v(x^0,z)$，則根據假設(2)可知，$y^0\in\Omega(x',z)$；故

$$\begin{aligned}v(x'z)&\equiv\max_{y\in\Omega(x',z)} R(x',y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)\\ &>\max_{y\in\Omega(x',z)} R(x^0,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)\\ &\geqq R(x^0,y^0,z)+\beta\int v(y^0,z')dF(z',z)\\ &=v(x^0,z)\end{aligned}$$

由於$R(x,y,z)$ 爲x之增函數且爲x與y之絕對凹函數，故有第二行之絕對不等式。因此，倘 $x'>x$ 則 $v(x'z)>v(x,z)$。

(IV) 價值函數 $v(x,z)$，係由單一之最適政策函數 $y=f(x,z)$ 所達成，亦即存在單一之 $y=f(x,z)$ 而有

$$v(x,z)=R(x,f(x,z),z)+\beta\int v(f(x,z),z')dF(z',z)。$$

蓋由於 $R(z,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$ 爲連續函數，且對於任何 (x,z)，Ω

(x,z) 爲封閉且有界之集合，故根據 Weierstrass 定理知存在 $\Omega(x,z)$ 集中元素 y，達成上式之極大值，且由於絕對凹函數之特性知 y 爲唯一達成極大值之元素，故知 y 爲 (x,z) 函數而寫成 $y=f(x,z)$。

根據基本模型之有關假設，最適決策函數另有下列兩項重要特性。

(I) 最適決策函數 $y=f(x,z)$ 爲連續函數，

及 (II) 對於任何固定之 (x,z)，最適決策可以疊代方法來趨近，卽一般所謂之政策疊代法 (policy iteration)。

首先，由於 (x,z) 與 $\Omega(x,z)$ 間之對應關係爲連續且緊緻之對應 (continuous & compact correspondence)，且 $R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$ 爲連續函數；故根據極大值定理（請參閱附錄(D)）可知最適決策之集合爲緊緻集合 (compact set) 且任何 (x,z) 與最適決策集合間之關係爲上半連續對應 (upper semi continuous cortespondence)。然根據上述價值函數性質 (IV) 知對應任何 (x,z)，只有單一決策達成此價值函數，故最適決策對應實爲單值函數；因此，最適函數爲連續之函數。

最適決策函數可利用下列逐次漸近方式加以趨近；設

$$v_n(x,z)=T^n v_0 \text{ 亦卽}$$

$$v_{n+1}(x,z)=\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\beta\int v_n(y,z')dF(z',z)$$

且設 $y_n=f_n(x,z)$ 爲單一達成 $v_{n+1}(x,z)$ 之 $\Omega(x,z)$ 元素而 $y=f(x,z)$ 爲達成 $v(x,z)=\max_{y\in\Omega(x,z)} R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$ 之元素。爲簡化下列討論之符號，設 $g_n(y)=R(x,y,z)+\beta\int v_n(y,z')dF(z',z)$ 及 $g(y)=R(x,y,z)+\beta\int v(y,z')dF(z',z)$。由於 $T^n v_0$ 係一致收斂 (uniformly converge) 至 v 以及 y_n 及 y 分別爲 $g_n(y)$ 與 $g(y)$ 凹函數之單一極大化元素，故倘知 $g(y_n)$ 十分接近 $g(y)$，則 y_n 必然十分接近 y。然因

$$g(y)-g(y_n)=g(y)-g_n(y_n)+g_n(y_n)-g(y_n)$$

故

$$|g(y)-g(y_n)|\leq|g(y)-g_n(y_n)|+|g_n(y_n)-g(y_n)|$$

$$\leq|g(y)-g_n(y)|+|g_n(y_n)-g(y_n)|$$

且由於 g_n 一致收斂至 g，故存在相當大之n，使 $|g(y)-g(y_n)|<\delta$，因而使 $|y_n-y|\leq\varepsilon$

（其中 δ 與 ε 均爲任意小之正數）。

上文擇要說明有關基本體系中價值函數與最適決策函數重要性質。綜言之，理論上而言，倘知有關之目標函數，動態結構體系以及外生變數之隨機過程，則根據經濟情況可知最大可能之預期總貼現報酬與最適當之決策以及此二者隨經濟情況變動而具有之性質。此外，在實際應用上，此二種函數均可用逐次代入方法加以精確之估定。然，類似一般極大化問題討論之最適決策條件及有關問題，則須進一步探討價值函數之可微分性等問題，方能導出有關之結論。

早期有關動態規劃問題之研究常逕行假設價值函數爲連續可微分之函數，以便導出模型進一步之結論。然，此種無限多期（infinite horizon）動態規劃模型中價值函數可微分性之充分條件及其證明最近才由 R. Lucas〔1978〕以及 L.) Benveniste and J. Scheinkman〔1979〕提出較深入之討論〔註五〕。現擬就體系價值函數之可微分性，採用 R. Lucas (1978) 方法加以證實。

〔定理二〕：

對於任何固定之 (x^0,z^0)，設最適政策 $y^0=f(x^0,z^0)$ 爲可選擇集合 $\Omega(x^0,z^0)$ 之內部（interior），則價值函數（卽函數方程式之解）爲 x 之可微分函數且

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=v_{x1}(x^0,z^0)=R_{x1}(x^0,f(x^0,z^0),z^0)$$

〔證明〕：

爲簡化討論之符號，擬以 $g(x^1,f(x^1z^0),z^0)$ 來代替

$$R(x^1,f(x^1,z^0),z^0)+\beta\int v(f(x^1,z^0),z')dF(z',z) \quad i=o，\theta。$$

對於任何固定之 z^0，設 $(x^\theta,z^0)=\theta(x,z^0)+(1-\theta)(x^0,z^0)$；且定義

$$h(\theta)=v(x^\theta,z^0)=g(x^\theta,f(x^\theta,z^0)z^0)$$

$$=R(x^\theta,f(x^\theta,z^0),z^0)+\beta\int v(f(x^\theta,z^0),z')dF(z',z^0)$$

倘能證明 $h'(0)$ 存在，則表示 $v(x,z)$ 在 (x°,z°) 點上爲 x 可微分函數。根據 $y=f(x,z)$ 爲最適決策函數之性質，

則 $$h(\theta)-h(0)=g(x^\theta,f(x^\theta,z^\circ),z^\circ)z^\circ)-g(x^\circ,f(x^\circ,z^\circ),z^\circ)$$

$$\geqq g(x^\theta,f(x^\circ,z^\circ),z^\circ),-g(x^\circ,f(x^\circ,z^\circ),z^\circ)。$$

同理， $h(\theta)-h(0)\leqq g(x^{\theta},f(x^{\theta},z_{\circ}),z^{\circ})-g(x_{\circ},f(x^{\theta},z^{\circ}),z_{\circ})$

因此， $\dfrac{g(x^{\theta},f(x^{\circ},z^{\circ}),z^{\circ})-g(x^{\circ},f(x^{\circ},z^{\circ}),z^{\circ})}{\theta}\leqq \dfrac{h(\theta)-h(0)}{\theta}$

$\leqq\dfrac{g(x^{\theta},f(x^{\theta},z^{\circ}),z^{\circ})-g(x^{\circ},f(x^{\theta},z^{\circ}),z^{\circ})}{\theta}$

故，當θ趨近於0

則 $\sum_{i=1}^{n} gx_i(x^{\circ},f(x^{\circ},z^{\circ}),z^{\circ})(x_i-x_i^{\circ})=h'(0)$

亦即 $h'(0)=\sum_{i=1}^{n} Rx_i(x^{\circ},f(x^{\circ},z^{\circ}),z^{\circ})(x_i-x_i)$

且由於 $y^{\circ}=f(x^{\circ},z^{\circ})$ 爲 $\Omega(x^{\circ},z^{\circ})$ 集合之內部元素

因此，$\dfrac{\partial v}{\partial x_i}=vx_i(x^{\circ},z^{\circ})=Rxi(x^{\circ},f(x^{\circ},z^{\circ}),z^{\circ})$ Q.E.C.

基本模型之 $\Omega(x,z)$ 爲非空凸集與 $g(x,y,z)$ 爲 x 與 y 之有界且可微分之凹函數之假設及此等假設所導出之存在最適決策之結論以及另加之 y 爲 $\Omega(x^{\circ},z^{\circ})$ 集合內部元素假設實爲 $v(x,z)$ 爲 x 可微分之充分條件，此等條件與較嚴謹之 L. Renveniste and J. Scheiukman 之充分條件相類似。

倘進一步假設基本模型

$$v(x,z)=R(x,f(x,z),z)+\beta\int v(f(x,z),z')dF(z',z)$$

中，$v(x,z)$ 與 $v(f(x,z),z')$ 之最適決策均分別爲其可選擇集合之內部元素，則可導出最適決策應具有之條件，亦即，由於 $R(x,y,z)$ 爲 x 與 y 連續可微分函數之假設及 $v(y,z')$ 爲可微分函數，故最適決策 y 必須滿足第一階段條件：

$$Ry_i(x,y,z)+\beta\int vx_i(y,z')dF(z',z)=0$$

亦即爲 $Ry_i(x_t,x_{t+1},z_t)+\beta\int Rx_i(x_{t+1},f(x_{t+1},z_{t+1}),z_{t+1})\,dF(z_{t+1},z_t)=0$

或 $Ry_i(x_t,x_{t+1},z_t)+\beta\int Rx_i(x_{t+1},x_{t+2},z_{t+1})dF(z_{t+1},z_t)=0$

蓋根據上頭命題

$$vx_i(x_{t+1},z')=Rx_i(x_{t+1},f(x_{t+1},z_{t+1}),z_{t+1})$$

顯然地，上述之一階條件即爲極大值之充分條件。此條件即爲隨機型態之 Euler 方程

式 (Euler equation) 。而最適決策則可解上述二階隨機差分方程式而有爲 $y_t = x_{t+1} = f(x_t, z_t)$。

前文已綜合探討基本模型之主要特性，其他有關之性質，在有關文獻上亦有所見，然此種性質係因建立體系不同或因導入額外假設而得，在其探討主題有其價值，有興趣之讀者可參考 R. Lucas 與 J. P. Danthin 之論文。

(四)結 語

上文討論係以隨機之動態經濟體係爲基礎；明顯地，此種分析及有關之結論可適用於確定之經濟模型 (deterministic economic model) ，有限期次之決策問題 (finite horizontal decision problem) 以及有限情況下之隨機動態規劃 (finite-state stochastic dynamic programming)。事實上，稍早有關基本體系之分析及結論，泰半由有限期次決策問題之結論來推論至無限期次之體系；故不似前文方法來得直接與嚴謹。

上述方法係基於經濟動態結構關係爲一階定差方程體系以及隨機干擾變數向量爲 Markov 過程之假設；然，類似之分析方法可適用較一般化之多階定差方程體系以及隨機干擾變數向量爲任何恆常隨機過程之情況。惟其分析與討論較上文討論爲繁複而亦難導出明確之結論。

最後，此種分析係假設決策者瞭解經濟動態結構關係及隨機干擾向量之分配函數，即假設經濟決策者對於未來經濟情況之預期爲一種純理性之預期 (rational expectation) 。因此，在 R, Lucas〔1978〕及 J.P.Danthin〔1977〕研究中，用來探討完全競爭市場中之「純理性預期下均衡過程」 (rational expectatation equilibrium process) 而視各期均衡爲一種隨機過程。此外，此種分析方法爲經濟策劃 (economic planning) ，最適成長理論以及其他動態決策討論上有力之分析工具。

數學附錄：

本文討論係假定讀者有若干數理分析之基礎，文中涉及其他數學概念及定理，擬分項附錄於後，以利討論體系之完整。

(A)度量空間（metric space）

度量空間可以（V,ρ）表示之，其中V為集合而 ρ 為 V 集上之度量函數（metric function）；此種函數係由 $V\otimes V$ 映入實數且滿足下列三條件之函數：

（I）對於任何V集中元素 u 及 v, $\rho(u,v)\geqq 0$ 均成立；且 $u=v$ 之充要條件為 $\rho(u,v)=0$；

（II）對於任何 u 及 v，有 $\rho(u,v)=\rho(v,u)$ 之對稱性質；

以及（III）對於任何 u，v 及 w，則有 $\rho(u,w)\leqq\rho(u,v)+\rho(v,w)$ 之三角不等式關係。

文中主要討論之空間為所有定義於（n+k）度實數空間中S集合上之有界且連續函數而成之空間，簡稱為有界且連續函數空間（bounded and continuous function space）。倘定義此空間之度量函數為

$$\rho(u,v)=\operatorname*{Sup}_{x\in s}|u(x)-v(x)|$$

則此空間即為完全度量空間（complete metric space），或稱為 Banach 空間。此空間中所有 Cauchy 數列均為收斂之數列。

(B)收縮映射（contaction mapping）與定點定理（fixed point theorem）

設F係由度量空間（V,ρ）映入其自身之映射（mapping），簡示為 $F:V\to V$；倘此種映射具有下列特性，則稱之為收縮映射（contraction mapping）：

對於 V 集中任何元素 u 及 v，存在小於一之正數k而滿足 $\rho(F(u),F(v))\leqq k\rho(u,v)$。

滿足上不等式之最小正數，則稱為此收縮映射之模數（modulus）。

〔收縮映射之定點定理〕

設(V,ρ) 為完全度量空間而 $F:V\to V$ 係模數k之收縮映射，則存有單一元素 $v^*\in V$ 而滿足 $F(v^*)=v^*$。此外，倘 v_0 為空間中任何元素，且 v_n 係以 $v_1=F(v_0), v_2=F(v_1)=F^2(v_0),\cdots\cdots v_n=F(v_{n-1})=F^n(v_0)\cdots$，遞歸方式來定義，則

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}F^n(v_0)=v$$

〔證明〕：

設 u 爲 (V,ρ) 空間中之任何元素，且定義 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 數列如下：

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}=\{F^n(u_0)\}_{n=1}^{\infty}$$

假設 $N>M$，則
$$\begin{aligned}\rho(u_N,\ u_M)&=P(F^N(u_0),F^M(u_0))\\&=\rho(F^M(u_{N-M}),F^M(u_0))\\&\leqq k.\rho(F^{M-1}(u_{N-M}),F^{M-1}(u_0))\\&\leqq k^M\rho(u_{N-M},u_0)\end{aligned}$$

根據三角不等式性質：

$$\begin{aligned}\rho(u_{N-M},u_0)&\leqq\rho(u_{N-M},u_{N-M-1})+\rho(u_{N-M-1}u_{N-M-2})\cdots\cdots+\rho(u_1,u_0)\\&\leqq(k^{N-M}+k^{N-M-1}+\cdots+k+1)\rho(u_1,u_0)\\&\leqq\frac{1}{1-k}\rho(u_1,u_0)\end{aligned}$$

因此 ； $\rho(u_N,u_M)\leqq\dfrac{k^M}{1-k}\rho(u_1,u_0)$

由於 $0\leqq k<1$ ，故可選相當大之M而使 $\rho(u_N,u_M)$ 小於任意小之正數，因而知 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$實爲 Cauchy 數列。由於 (V,ρ) 空間之完全性 (completeness)，故知$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$收斂至某一 V 集元素 u^* 即 $u^*=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

現擬進一步證明 u^* 爲 F 映射之定點，即$u^*=F(u^*)$；因 $\rho(u^*,F(u^*))\leqq\rho(u^*,u_n)+\rho(u_n,F(u^*))\leqq\rho(u^*,u_n)+k\rho(u_{n-1},u^*)$，故選擇適當之 n， 則可使上式右方小於任何正數；因此，$\rho(u^*,F(u^*))=0$，亦即 $u^*=F(u^*)$。接着，擬證明 u^* 爲唯一之定點。假設另有 w_0 亦滿足 $w_0=F(w_0)$ 且 $w_0\neq u^*$， 亦即假設並非單一之定點；則

$$\begin{aligned}0<P(u^*,w_0)&=\rho(F(u^*),F(w_0))\\&\leqq k\rho(u^*,w_0)<P(u^*,w_0)，\end{aligned}$$

故與假設矛盾，因此， u^* 爲單一之定點。 Q.E.D.

此種定點，亦可用逐步近似法 (successive approximation method) 來作相當精確地估定，確言之，倘F 為模數k之收縮映射且 $F(v^*)=v^*$，則對於 V 集中任何元素 v_0，均有

$$\rho(F^N(v_0),v^*)\leqq\frac{1}{1-k}(F^N(v_0),F^{N+1}(v_0))\ ;$$

蓋 $\rho(F^N(v_0),v^*)\leqq\rho(F^N(v_0)F^{N+1}(v_0))+\rho(F^{N+1}(v_0),F^{N+2}(v_0))+\cdots$

$$\leqq(1+k+k^2+\cdots)\rho(F^N(v_0),F^{n+1}(v_0))$$

$$=\frac{1}{1-k}\rho(F^N(v_0)+F^{N+1}(v_0))$$

因此，選擇相當大之N，吾人有 $F^N(v_0)$ 任意接近 v^*。此外，單一定點之存在，實僅需 F^N 為收縮映射之假設已足 (N 為任意正整數)，此即 Eric V. Denardo 文中所謂之「N 階收縮假設」("N-stage contraction assumption")

(C)收縮映射之充分條件 (Blackwell 1965 文中之第五定理)：

至於某種映射是否為收縮映射，通常因建立體系之不同須作個別之認定；然，貼現型動態規劃體系 (discounted dynamic programming) 則有 Blackwell 提出之簡便判定條件，現擬摘錄並證明如下，以供參考。

「定理」：

設T係由L空間映入其自身之映射，而L為 $R^{(n+k)}$ 子集S上之連續且有界函數空間，且其度量為 $\rho(w,u)=\mathrm{Sup}\ |w(x)-u(x)|$。倘此映射滿足下列二條件：

(I) 設 $w,u\in L$，倘對於所有S集上之元素 x，均有 $w(x)\leqq u(x)$，

則對於任何 S 集上之 x $Tw(x)\leqslant Tu(x)$ 均成立。

(II) 對於任何常數 c (常數亦可視為連續且有界之函數) 及 $u\in L$，均有小於一之正數 k 而滿足

$$T(u+c)\leqq Tu+kc$$

則，T 為收縮之映射，而其模數為 k。

〔證明〕

由於 $w(x)-u(x)\leqq \sup_{x\in S}|w(x)-u(x)|=\rho(w,u)$

故有 $w(x)\leqq u(x)+\rho(w,u)$

且根據條件 I 及 II

$$Tw(x)\leqq T(u(x)+\rho(w,u))$$
$$\leqq Tu(x)+k\rho(w,u)$$

故對於所有 S 集上之 x，均有

$$Tw(x)-Tu(x)\leqq k\rho(w,u)$$

同理，可證明

$$Tu(x)-Tw(x)\leqq k\rho(w,u)$$

因此，而有

$$|Tw(x)-Tu(x)|\leqq k\rho(w,u)$$

所以 $\rho(Tw,Tu)\leqq k\rho(w,u)$；

即表示T爲收縮映射且其模數爲 k　　Q. E. D.

(D)對應 (correspondence) 與極大値定理 (maximum theorem)：

設 X_1 與 X_2 分別爲 V_1 與 V_2 有限維度空間 (finte dimensional spaces) 中之集合，且設 $\pi(X_2)$ 爲所有 X_2 集之非空子集的集合 (collection of nonempty subsets)。對應或點集映射 (point-set mapping) φ 係一種由 X_1 集中元素 x_1 映入 X_2 集之次集的映射，簡示爲 $\varphi: X_1\rightarrow \pi(X_2)$。因此，一般函數或單值函數則可視爲對應之一種，即值域爲單元素之子集。爲便於說明起見，下列設論中假設對應 φ 均爲緊緻對應 (compact correspondence)，即假設倘A爲緊緻集合，則 φ (A) 亦爲緊緻集合。如此，則下列有關定義及定理之設論均可以一般較熟悉之數列方式爲之。

倘對應之圖形 (graph)，即 $\{(x,y)\in X_1\otimes X_2|y\in\varphi(x)\}$，爲封閉集合，則一般稱之爲上半連續 (upper semi continuous) 或封閉 (closed) 之對應；倘以數列方式來說明，則表示 (x_N)「設爲 X_1 集中收斂至 x 之數列，倘 $y_n\in\varphi(x_n)$ 且 y_n 收斂至 y，則 $y\in\varphi(x)$」。又，倘對應具有下列之特性，則稱之爲下半連續 (lower semi continuous)：「對於任何 X_1 集元素 x，倘 $y\in\varphi(x)$，則對於任何收斂至 x 之 X_1 集數列

(x_n)，均存在有 $y_n \in \varphi(x_n)$，且 y_n 收斂至 y 的 (y_n) 數列。」倘對應同時具有上半連續與下半連續二特性，則稱之爲連續對應 (continuous correspondence)。

現擬引述並證明三項經濟學上有關對應的重要定理；此三定理爲數理經濟學上關於需求函數與定點理論討論之基礎，後二定理一般稱之爲「極大值定理」。

〔定理一〕：

若 $\varphi_1: X_1 \rightarrow \pi(X_2)$ 與 $\varphi_2: X_2' \rightarrow \pi(X_3)$（假設 $X_2 \subset X_2'$）均爲連續對應，且若爲 φ_1 緊緻之對應；則 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 爲連續對應。

〔證明〕：

倘 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 非但爲上半連續且爲下半連續，則 $\varphi_2 \circ \varphi_1$，即爲連續對應。首先擬證明 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 爲上半連續。設 (x_n) 爲任意 X_1 集中收斂至 x 之數列，且設 (z_n) 數列爲 $z_n \in \varphi_2 \circ \varphi_1(x_n)$ 且收斂至 z 之數列，倘能證明 $z \in \varphi_2 \circ \varphi_1(x)$，則表示爲 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 上半連續。對於所有 n，均有 y_n 滿足 $y_n \in \varphi_1(x_n)$ 及 $z_n \in \varphi_2(y_n)$，由於 φ_1 爲緊緻，故 (y_n) 數列亦爲有界；因此，存在收斂之次數列 (convergent subsequence)，設此數列收殮至 y。又由於 φ_1 均 φ_2 爲上半連續對應，故知 $y \in \varphi_1(x)$ 且 $z \in \varphi_2(y)$，亦即 $z \in \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_2 \circ \varphi_1(x)$。

$\varphi_2 \circ \varphi_1$ 爲下半連續對應，則可證明如下：

設 (x_n) 爲任何收斂至 x 之數列且 z 爲任何 $\varphi_2 \circ \varphi_1(x)$ 中之元素；倘能證明均存在 $z_n \in \varphi_2 \circ \varphi_1(x_n)$ 且 Z 收斂至 z 數列 (z_n)，則知 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 爲下半連續對應，因 $z \in \varphi_2 \circ \varphi_1(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$，故存在 $y \in \varphi(x_1)$ 且滿足 $z \in \varphi_2(y)$；又由於 φ_1 爲下半連續，故有 (y_n) 數列收斂至 y；且由於 φ_2 亦爲下半連續，故有 $z_n \in \varphi_2(y_n)$ 且收斂至 z，故得證。 Q. E. D.

〔定理二〕

設 $\varphi: X_1 \rightarrow \pi(X_2)$ 爲連續且緊緻之對應，且設 f 爲定義於 X_2 之連續函數；倘定義 u_f 爲

$$u_f(x) = \max_{y \in \varphi(x)} f(y)，即\ u_f: x \rightarrow \max_{y \in \varphi(x)} f(y)$$

則，u_f 爲連續函數。

〔證明〕：

由於 φ 爲連續且緊緻之對應，故 $\varphi(x)$ 爲緊緻之集合 (compoct set) ，且由於 f 爲連續函數；根據 Weierstrass 定理，即知極大值存在，因而可以定義 $u_f(x)=\max_{y\in\varphi(x)} f(y)$。設 (x_n) 爲 X_1 集中收斂至 x 之數列，倘選擇 $y_n\in\varphi(x_n)$ 而滿足 $f(y_n)=u_f(x_n)$，則因 φ 爲有界，故 $\varphi(\underset{n}{U}x_n)$ 亦爲有界；因此，此種 (y_n) 數列有收斂之次數列(y_{nk})。設$y=\lim y_{nk}$，則由於 φ 爲上半連續，故 $y\in\varphi(x)$；因而

$$f(y)\leqq\max_{z\in\varphi(x)} f(z)=u_f(x)$$

由於 $\lim u_f(x_{nk})=\lim f(y_{nk})=f(\lim y_{nk})=f(y)\leqq u_f(x)$；所以，$\lim\sup u_f(x_n)\leqq u_f(x)$。

由於 φ 爲下半連續，故對於任何正數 ε，均有 $y\in\varphi(x)$ 而滿足 $u_f(x)\leqq f(y)+\varepsilon$。此外，對於任何收斂至 x 之 (x_n) 及 $y\in\varphi(x)$，均有 $y_n\in\varphi(x_n)$ 且收斂至 y 之數列 (y_n)。由於 $u_f(x_n)\geqq f(y_n)$，故

$$\lim\inf u_f(x_n)\geqq\lim f(y_n)=f(y)\geqq u_f(x)-\varepsilon;$$

由於 ε 爲任何正數，故 $\lim\inf u_f(x_n)\geqq u_f(x)$，即

$$u_f(x)=\lim_{n\to\infty} u_f(x_n)=u_f(\lim_{n\to\infty} x_n) \qquad \text{Q. E. D.}$$

〔定理三〕：

設 $\varphi:X_1\to\pi(X_2)$ 爲連續且緊緻之對應，且設 f 爲 X_2 上之連續函數；倘定義

$$\mu(x)=\{y\in\varphi(x)\,|\,u_f(x)=f(y)\}$$

則 $\mu(x)$ 爲緊緻集合且 μ 對應爲上半連續。

〔證明〕：

由於 $\mu(x)\subset\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 爲緊緻集合，故倘能證明 $\mu(x)$ 爲閉集，則知 $\mu(x)$ 爲緊緻集合。設 $y_n\in\mu(x)$ 且收縮至 y，假設 $y\notin\mu(x)$，則表示存在 $z\in\varphi(x)$ 而有$f(z)>f(y)$；但由於 f 爲連續函數，故在相當大之 n 則有 $f(z)>f(y_n)$。此與 $y_n\in\mu(x)$ 假設相矛盾，故知 $y\in\mu(x)$。因此，$\mu(x)$ 爲緊緻集合。

欲證明 $\mu:X_1\to\pi(X_2)$爲上半連續，由於 φ 爲上半連續且$\mu(x)=\varphi(x)\cap u_f(x)$，則可證明其圖形爲封閉集合；亦即倘 (x_n,y_n) 收斂至 (x,y) 且 $y_n\in(x_n)$，則

$y \in \mu(x)$。假設 $y \notin \mu(x)$，即表示存在 $z \in \varphi(x)$ 而有 $f(z) > f(y)$；但由於 φ 爲下半連續，故有收斂至 z 之數列 (z_n) 而有 $z_n \in \varphi(x_n)$，由於 f 爲連續之假設以及 $f(z) > f(y)$，z_n 收斂至 z，x_n 收斂至 x 以及 y_n 收斂至 y 等事實，故知 n 相當大時，則有 $f(z_n) > f(y_n)$，故與 $y_n \in \mu(x_n)$ 假設相矛盾，故知 $y \in \mu(x)$，亦即 μ 爲上半連續。

註：本文曾受六十九年度國科會研究補助。

〔附　　註〕

〔註一〕：關於運用動態規劃方法於經濟決策問題，可參考 M. J. Beckman〔1968〕書，以便對一般分析方法及有關之運用有初步的了解。

〔註二〕：如 D. Blackwell〔1965〕之貼現型動態規劃文中尙論及隨機化決策規則（randonized decision rule）以及（P, ϵ）最適決策規劃等，此等理論距離實用階段尙有很大一段距離。

〔註三〕：根據一般向量大小之定義，$x^1 \leqq x^0$ 係表示 $x_i' \leqq x_i^0$ $\forall_{i=1,2,\cdots n}$。又，此二項額外假設於經濟理論研討中爲常見之假設。

〔註四〕：根據附錄（D）關於上半連續對應之定義，單值函數如爲上半連續，則亦爲連續。然，根據另一種單值函數上半連續之常見定義——對於任何 x^0 與正數 ϵ，則有正數 δ 而使所有 x^0 鄰域之 x（即 $\rho(x,x^0) \geqq \delta$）均滿足 $f(x) + \epsilon > f(x^0)$；則上半連續函數並不見得爲連續函數。因此，學者（參閱 W. Hildenbrand and A. P. Kirman〔1976〕）書中附錄且之討論）有用 upper hemi continuity 來表示前一定義而以 upper semi continuity 專指後一定義，以作區別。

〔註五〕：L. W. Benveniste and J. A. Scheinkman〔1979〕論文，對於價値函數可微分性之充分條件分別就連續型與離散型動態規劃模型採用凸函數分析方法來探討，方法上較嚴謹且較抽象。

參 考 書 目

Beckmann, M. J: "Dynamic Programming of Economic Decision," Econometrics and

Operations Research Vol.IX, Springer-Verlag (1968)。

Benveniste, L. W. and J. A Scheinkman:" On the Differentialility of the Value Function in Dynamic Models of Economics," Econometrica, Vo l. 47, No. 3(May, 1979),727-732。

Blackwell:"Discounted Dynamic Programming," Annals of Mathematical Statistics, 36 (1965), 226—235。

Denardo, Eric V:"Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming," SIAM Review, 9(1967),165—177。

Danthin J. P:"Martingale, Market Efficiency and Commodity Prices," European Economics Review 10 (1977),1—17。

Hildenbrand, W. and A. P. Kirman:"Introduction to Equilibrium Analysis," Mathematical Appendix Ⅲ Ⅵ, North Holland Pub. Co. (1970)。

Lucas,R. E. Jr.:"Asset Prices in An Exchange Economy," Econometrica, Vol. 46, No. 6(Nov. 1978),1429—1445。

Lucas. R. E..Jr. and E. Prescott:"Investment under Uncertainty," Econometrica 39. No. 5. (Sep 1971) 659—681.

Luenberger, D, G:"Optimization by Vector Space Methods," John Wiley & Sons, Inc. (1969)。