模糊時間數列與台灣地區中學教師人數需求之預測

吳柏林*　張鈿富**　廖敏治***

摘　要

教師人數的實際需求，數值本身就具有不確定性與模糊性。利用假性的"精確值"可能造成模式建構或預測誤導或擴大預測結果和實際狀態之間的誤差。因此，在計量方法的演算過程中，尤其是在人文社會科學領域的研究，必需慎重的考慮數值模糊的特性運用在預測過程中。本文主要目的在探討模糊時間數列（Fuzzy time series）的分析方法，並應用此一方法預測臺灣地區中學教師未來幾年所需的人數。文中針對傳統時間數列分析技術在預測方面之缺失，考慮以較符合實際情況的趨勢型模糊時間數列（trend fuzzy time series model）方法，應用模糊理論，建構一個以國中教師人數爲主體的預測模式，來預估中學教師人數。最後並與傳統的時間數列模式（即 ARIMA）預測結果做一比較分析。我們發現模糊時間數列的預測結果比傳統的 ARIMA 模式的結果要好且較具穩健性。

關鍵詞：教師人數，模糊理論，模糊時間數列，趨勢型模糊時間數列，ARIMA。

---

*　作者爲本校應用數學研究所教授
**　作者爲本校教育研究所教授
***　作者爲本校統計研究所博士班

壹、前言

師資的良莠關係著教育的成敗，近年來在多元化的呼聲裡，首當其衝的是師範教育體系的開放。師資培育的開放、多元化意味著，有更多的管道可以提供教師的培育。在此一政策的主導之下，可能給予我們的社會，有更充沛的教師人力。但是，從另一個角度來看，很有可能由於教師培育數量擄增，而造成"量變則質變"的結果，師資供給過剩，教師素質參差不齊。因此，如何準確的預估教師需求的總量，提供有志於培養未來師資的機構做爲參考，以維繫師資培育的效率與效能，實乃不可或缺的工作。

自從民國五十七年實施九年國教以來，國中教師培育計畫一直受到教育主管當局與社會的重視。尤其是教師總數供需均衡的問題，引起許多學者專家的研究探討（湯振鶴，民 80 ；馬信行，民 81 ）。但是，傳統國中教師培育機構對教師需求數的估計，大以平均成長率法或普查法來推估，其預測結果與實際情況常有顯著的差異（馬信行，民 81 ）。台灣省政府教育廳、台北、高雄市政府亦曾組成國中師資需求量推估研究小組，自七十五學年度起以普查法人力推估方式來推估國民中學各科教師需求量。由於普查法的成本過大且耗時，加上社會結構變遷所產生的教師總數隨機增減，及歷史資料自我相關的特性未考慮進去，以致預測的結果產生了許多誤差，而中央規劃的師資培育政策也備受批評與考驗。馬信行（民 81 ）針對此缺失，改採單變量時間數列法來預測中學教師數，的確使誤差值降低不少。雖然，時間數列模式在分析上具有簡潔易懂及短期預測精確度高之優點。但是，時間數列在預測上卻受到資料上的限制，以及模式配適的問題。而且用以預測的資料需要具有足夠的長度，否則便無法將時間資料配適好，以致容易產生較大的誤差。也有人考慮以自由模式的觀念，應用神經網路來預測中學教師數，其預測結果似比單純的自我回歸統整模式（ AR IMA ）所作的中學教師數預測之誤差值略有改進。事實上，整個區域教師總人數的需求，很難以非常明確的數值表現出來。

由於資料收集的誤差、時間的遲延（ lag ）往往單一度量的數值，形式上看似一精確值，但是實際上所表達者應該是某一區間範圍的可能值。例如，民國 81 年國中教師總數爲

53,212 人，但是這數據並不能反應民 81 年國中教師總人數眞正的求情況，像代課教師、教師兼任行政工作、服兵役、進修、產假等等。因此，教師的總人數精確値實在很難估計。而實際上教師人數的需求，數字本身就具有不確定性與模糊性。利用此一假性的“精確値”可能誤導預測模式的建構，也可能擴大預測結果和實際狀態之間的誤差。因此，具有模糊性的數値資料，在計量方法的演算過程中，是否符合人類邏輯推論與歸納的原則？尤其是在人文社會科學領域的研究中，必需愼重的考慮數値模糊的特性運用在預測過程中。近年來，一般也認爲在人文社會科學的測度理念裡，模糊統計和模糊相關性的使用可說是數値模式的推廣。 Manski （ 1990 ）曾提出呼籲，認爲數字資料有需要過度及過度解釋的危險。基本上，如果應用模糊的數値資料，可能避免一些類似無法預料的危險。

模糊理論（ Fuzzy theory ）目前已被廣範地應用各種領域，例如模糊決策分析（ fuzzy decision making analysis ）（ Wierzchon ， 1982 ； Werners ， 1987 ； Zimmermann ， Zadeh and Gaines ， 1984 ）、模糊分類（ fuzzy clustering ）（ Gath and Geva ， 1989 ）和 Von Cutsem and Gath ， 1993 ）、模糊迴歸分析（ Baudossy, Bogardi and Duckstein ， 1993 ； Tanaka and Ishibuchi ， 1993 ）及控制系統理論（ Sugeno ， 1985 ； Takagi and Sugeno ， 1985 ）。至於應用在社會科學研究方面截至目前爲止，也發表了許多可供參考的著作（ Dubois and Prade ， 1992 ； Provans ， 1992 ； Wu and Yang ， 1993 ）。

本文則針對傳統時間數列分析，在預測方面之缺失，改以考慮較符合實際情況的模糊時間數列作爲分析、嘗試以模糊時間數列的概念，建構一個以國中教師人數爲預測主體的模式。並以此模式做爲預估未來國中教師數需求的基礎。最後，將模糊時間數列的預測效果與傳統 ARIMA 模式之預測做一比較分析。

貳、模糊時間數列之建構

2.1 模糊測度

在本節中我們介紹一個模糊模式的構建方式，從經濟或社會問題的立場來分析人類思考與行爲的模式。這種方法稱爲模糊邏輯模式信念（ the fuzzy logic model of beliefs ）。模糊邏輯的應用主張個人的喜好程度不需要非常清晰或是條理井然。這種概念與布林邏輯理念剛好相對立，例如依照布林邏輯中 A 和 B 的比較，其結果只有三種可能：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ A > B\ ;\\
&(2)\ A < B\ ;\\
&(3)\ A = B\ 。
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

但是，人類思維的運作遠比布林邏輯的結果來得複雜，尤其是在人的思維中具有許多不明確的偏好。因此，如何掌握眞實狀況做全盤描繪的構想，早已成爲許多邏輯學家的努力目標。對我們人類而言，憑藉模糊模式的呈現方式要比直接指定單一物體的特定値來得適切些，此一概念也比較合於用來評估物體與物體間的相關特性。此外，由於其他特性往往也會有助於某一意見的評定，因此使用模糊邏輯時，必須對所謂的“其他特性”加以說明，以便將人們的喜好程度轉換成便於計算的效用函數（ utility function ）。

模糊邏輯彌補了布林邏輯的不足，但是並沒有完全取代布林邏輯，兩個方法基本上是可以互存的。關鍵在於每一理論各自描述不同理念。模糊子集理論的主要特質，在於對於無限的可能偏好，能做出無限的解說。因此，使用模糊邏輯來測度，需要使用模糊統計來代替傳統統計，而模糊邏輯測度主要根據模糊集合的基本理論。有關模糊集合的基本理論，在此不做詳細介紹，有興趣的讀者可參考 Klir 和 Folger （ 1988 ）或 Zimmermann （ 1991 ）。

在傳統的集合理論中，一元素要麼屬於某集合，要麼不屬於該集合。但是在模糊集合中的元素，其隸屬程度可能只有部份是屬於該集合。但是在模糊集合中的元素，其隸屬程度可

能只有部分是屬於某集合。例如，“年輕人”此一名詞，究竟幾歲以上才構得上“不再年輕”？在一般人們的印象中並沒有一個確切的界限來區分“年輕”和“不再年輕”。在模糊集合的定義中，可以顯示出一個 20 歲的人是“90% 的年輕”，而某一個 60 歲的人相對的只有“30% 的年輕”，在模糊集合中，隸屬度（membership）的全距通常設定在 0 到 1 之間。因此，每個語言變項，“年輕”，代表一個可能性的分布。此一分布的平均值用以表示人類眞實評定是“年輕人”的數值。而關於分布的評定，可能因人而異，且不需呈現常態。

傳統的社會和經濟研究，投入了很多有關人類間的互動關係及模式分析。在一個典型的模式建構中，經常面對一些不確定的例子，例如：每年的學生註册人數，以年初？年中或年尾爲準？期間所得數値往往各有不同。又如新台幣對美元的匯率，是以開盤？收盤？或是最高最低價之平均爲準？結果亦有相當的差距。Hendershot & Placek（1981）曾對此一領域的文獻做一廣泛的回顧。在社會科學及有關經濟領域的研究中，問題的答案很少是確切的眞或僞。如果我們嘗試著去分析人類的信念，將會發現必需去面對行爲的不確定性。而模糊集合中連續區間値具有能處理亦眞亦僞狀況的能力，因此應用區間値的模糊特性所做的分析，使研究者可以處理有關的不確定，在實際的運用上，的確是比較符合實際狀況的一種測量工具。

2.2 模糊時間數列分析

在討論應用模糊時間數列來進行預測時，首先，要給定幾個模糊時間數列的定義：

定義 2.1 模糊時間數列

設 X_t 爲一個時間數列，U 爲其論域。給定 U 的一個次序分割集合（*ordered partition set*），$\{C_i；i=1，\cdots，m，\bigcup_{i=1}^{m} C_i=U\}$ 其相對於語言變數爲 $\{L_i；i=1，\cdots，m\}$。若在 $\{L_i；i=1，\cdots，m\}$ 上的模糊集合 F_t（相對於 X_t）有隸屬度函數：$\{\mu_{1t},\mu_{2t}，\cdots\cdots，\mu_{mt}\}$，$0\leq\mu_{it}\leq 1$，$i=1，\cdots，m$，則我們稱 $\{F_t\}$，F_t 的集合，爲布於 X_t 上的一個模糊時間數列。並且記爲

$$F_t = \mu_{1t} I_{c_1} + \mu_{2t} I_{c_2} + \cdots\cdots + \mu_{mt} I_{c_m} \qquad (2.2)$$

其中，$I_{C_i} = \begin{cases} 1, \text{ if } X_t \in C_i \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$。

爲了方便起見，簡寫爲 $F_t =$ （μ_{1t} ，μ_{2t} ，......，μ_{mt} ）。

例 2.1 ：令 $\{X_t\}=\{0.8$ ，1.7 ，2.9 ，4.1 ，3.5 ，3.2 ，4.3 ，$3.6\}$ 。選擇 U={(0,1] ，(1,2] ，(2,3] ，(3,4] ，(4,5]} ，且其語言變數爲：很低 =L_1 α (0,1] ，低 =L_2 α (1,2] ，中等 =L_3 α (2,3] ，高 =L_4 α (3,4] ，很高 =L_5 α (4,5] ，其中“ α ”表“相對於”。則吾人可得相對於 $\{X_t\}$ 的模糊時間數列 $\{F_t\}$ 爲

$$\begin{array}{lccccc} & 很低 & 低 & 中等 & 高 & 很高 \\ F_1 = (& .6 & .4 & 0 & 0 & 0 \ ) \\ F_2 = (& 0 & .8 & .2 & 0 & 0 \ ) \\ F_3 = (& 0 & 0 & .6 & .4 & 0 \ ) \\ F_4 = (& 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \ ) \\ F_5 = (& 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \ ) \\ F_6 = (& 0 & 0 & .4 & .6 & 0 \ ) \\ F_7 = (& 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \ ) \\ F_8 = (& 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \ ) \end{array} \qquad (2.3)$$

定義 2.2 ：（模糊關係， fuzzy relation ）

設 $\{C_1$ ，C_2 ，......，$C_m\}$ 爲論域 U 的一個次序分割。若在 U 上的模糊集 X 和 Y 分別爲

$$X = \mu_1 I_{c_1} + \mu_2 I_{c_2} + \cdots\cdots + \mu_m I_{c_m}$$

$$Y = \upsilon_1 I_{c_1} + \upsilon_2 I_{c_2} + \cdots + \upsilon_m I_{c_m} \qquad (2.4)$$

其中，μ_i 和 ν_j 爲布於 U 上的隸屬度。則介於 X 和 Y 之間的模糊關係記爲

$$R = X \circ Y = [c_{ij}]_{mxm} \qquad (2.5)$$

其中，“ ◦ ”表最大－最小（ *max－min* ）合成，C_{ij} 表介於 X 和 Y 之間關係的隸屬度。

定義 2.3 ：（模糊高於， fuzzy higher ）

設 $\{F_t\}$ 是 U 上的模糊時間數列。令 F_r 及 F_s 分別有最大隸屬度μ_r, μ_s 分別落於次序分割集合 C_r 及 C_s 。

若

(1) C_r 高於 C_s ，

或

(2) $C_r = C_s$ ，且$\mu_r > \mu_s$

則，我們說 F_r 是模糊高於 F_s ，記作 $F_r >_f F_s$ 。若 $C_r = C_s$ 且$\mu_r = \mu_s$ 則我們說 F_r 和 Fs 模糊相等（ *fuzzy equal* ），記作 $F_r =_f F_s$ 。

例 2.2 ：將天氣以模糊集來表示是合理的，因爲天氣本身是一種語言變數。因此，天氣的狀況可以模糊時間數列表示。令 F_1 及 F_2 在模糊時間數列上的模糊集是“溫暖”及“熱”，則 F_1 及 F_2 可表爲

$$F_1 = 0.0I_{(20,25]} + 0.2I_{(25,30]} + 0.8I_{(30,35]}$$

$$F_2 = 0.0I_{(20,25]} + 0.8I_{(25,30]} + 0.2I_{(30,35]} \qquad (2.6)$$

$$F_3 = 0.0I_{(20,25]} + 0.6I_{(25,30]} + 0.4I_{(30,35]}$$

其中，宇集 $U = (20,25] U (25,30] U (30,35]$ 表溫度的範圍。

(*a*) 因爲 F_1 及 F_2 分別有最大的隸屬度 0.8 在 $(30,35]$ 及 $(25,30]$ ，根據定義 2.3

(1)，所以 $F_1 >_f F_2$。

(b) 因為 F_2 及 F_3 分別有最大的隸屬度 0.8 及 0.6 在 (25,30]，根據定義 2.3(2)，所以 $F_2 >_f F_3$。

(c) $F_1 >_f F_3$ 則相當明顯。

定義 2.4：(模糊趨勢，fuzzy trend)

令 $\{F_t, t=1,2,\cdots\cdots,n\}$ 為一模糊時間數列。假設對任意時點 i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$, 若

$$P(F_i >_f F_{i-1}) \geq 1-\lambda; 0<\lambda<0.5 \qquad (2.7)$$

我們說 $\{F_t\}$ 有 λ－顯著水準的模糊向上趨勢 (*fuzzy upward trend*)。另一方面，若

$$P(F_{i-1} >_f F_i) \geq 1-\lambda; 0<\lambda<0.5 \qquad (2.8)$$

我們說 $\{F_t\}$ 有 λ－顯著水準的模糊向下趨勢 (*fuzzy downward trend*)。在 (2.7) 中若 $\lambda=0$ 稱 $\{F_t\}$ 是絕對向上趨勢 (*absolutely upward trend*)，而在 (2.8) 中稱 $\{F_t\}$ 是絕對向下趨勢 (*absolutely downward trend*)。若 $\lambda=0.5$ 則稱 $\{F_t\}$ 是沒有趨勢。

決策法則：模糊趨勢的檢定法

在 λ－顯著水準下，模糊趨勢的檢定方法則為：

H_0：沒有模糊向上（向下）趨勢 $v.s. H_1$：有模糊向上（向下）趨勢。

根據定義 2.4 的 (2.7)（或 (2.8)）式，我們定決策法則如下：

若 $P(F_t >_f F_{t-1}) \geq 1-\lambda$；（或 $P(F_{t-1} >_f F_t) \geq 1-\lambda$），$0<\lambda<0.5$，則說 $\{F_t\}$ 有 λ－顯著水準的模糊向上（或向下）趨勢。亦即若檢定值 C 落在棄卻域 $R=\{C \mid C>C_\lambda=\binom{n}{2}*(1-\lambda=\frac{n(n-1)}{2}*(1-\lambda)\}$，則拒絕 H_0。

定義 2.5：設 $R(t,t-1)$ 是 $FAR(1)$ (*fuzzy autoregression of or der one*) 的模

糊關係矩陣。若對任何時點，$R(t,t-1)$ 與 t 無關，亦即對任何 t ，$R(t,t-1)=R(t-1, t-2)$，則稱 $FAR(1)$ 具非時變（ *time — invariant* ）性質，否則稱爲具時變（ *time - variant* ）性質。

爲了方便分析起見，這裡只討論一階的模糊時間數列

定義 2.6 ：設 F_t 爲一 $FAR(1)$ 之非時變模糊時間數列。若對任何時點 t ，恆有 $Ft=F_{t-1}$，且 F_t 是由有限個 $f_{ik}(t)$ ，$k=1,2,\ldots\ldots,m$ 所組成，則

$$R(t,t-1)=f_{i_1}(t-1)\otimes f_{j1}(t)Vf_{i_2}(t-2)\otimes f_{j_2}(t-1)V\cdots$$

$$Vf_{i_m}(t-m)\otimes f_{j_m}(t-m+1) \qquad (2.9)$$

其中 i ，j 爲對應的語言程度指標（ *index of linguistic hedge* ），$m>0$ ，V 是一個取最大的運算。

2.3 模糊時間數列模式建構步驟與流程

根據上一節的定義，將進一步說明模糊時間數列模式建立流程與方法，基本上，模糊時間數列模式建立需要依據下列七個步驟：

步驟 *1.* 架構論域的模糊集合。

步驟 *2.* 資料模糊化。

步驟 *3.* 檢定是否具有模糊趨勢。若有則將原始資料差分，再回到步驟 1 。否則繼續下一步驟。

步驟 *4.* 計算模糊關係矩陣。

步驟 *5.* 對定義在步驟 3 的模糊關係矩陣做最大最小運算。再由定理 1 ，建構合適的模糊時間數列模式。

步驟 *6.* 利用運算後的模糊時間數列模式來做預測。

步驟 *7.* 反模糊化（ defuzzify ）預測結果。

在此七個主要步驟中。可以具體的圖示如下：

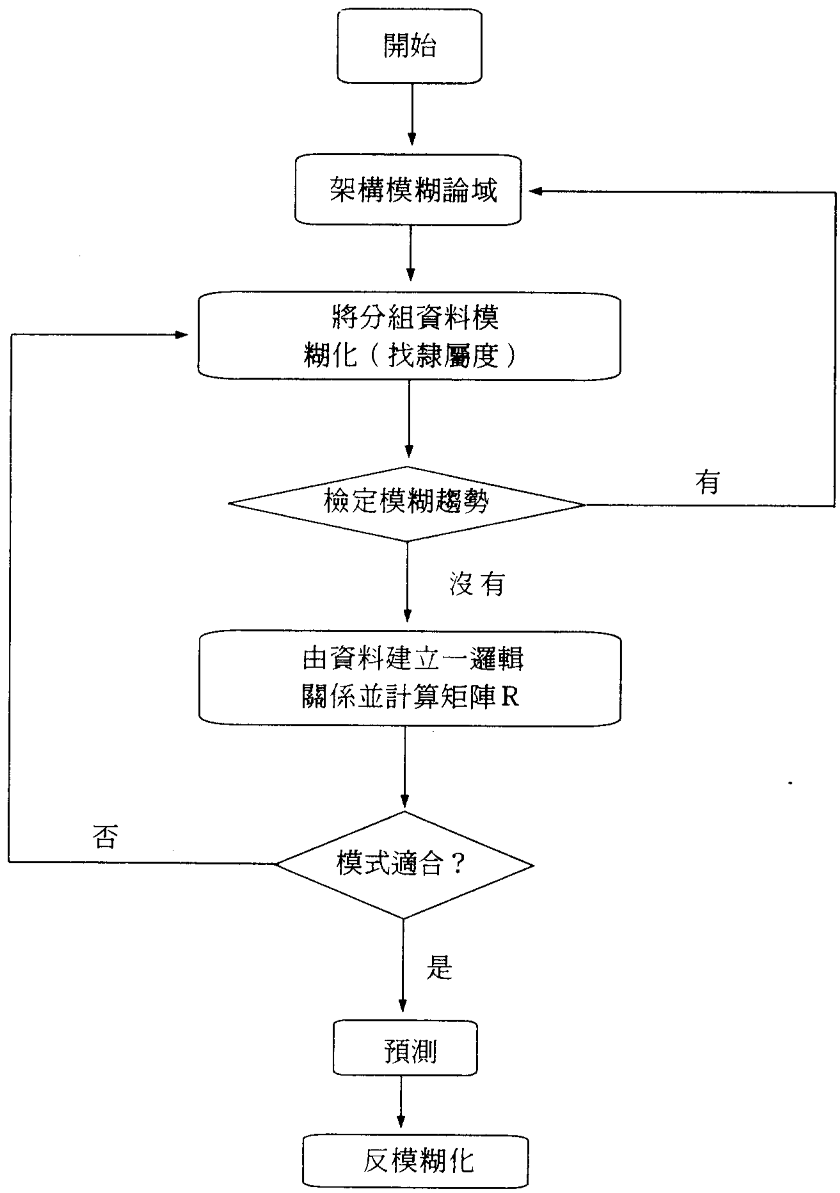


圖 2.1 模糊時間數列的建構流程

參、國中教師人數之模糊時間數列分析

自從實施九年國教以來，國中教師培育計畫，尤其是教師總數供需均衡的問題，更引起許多學者專家的研究探討。但是傳統對教師需求數的估計，預測與實際結果常有很大出入。本節即針對傳統時間數列分析技術在預測方面之缺失，考慮以較符合實際情況的趨勢型模糊時間數列（ trend fuzzy time series model ）方法，應用模糊理論，建構一個國中教師需求人數的預測模式。

以模糊時間數列來預測臺灣的國中教師需求人數，在建構模糊時間數列時，必需注意下列幾個原則：

首先，是要讓歷史資料達到穩定。亦即，當我們將資料模糊化之後，若資料具有模糊趨勢時，我們需將原始資料差分，使資料沒有模糊趨勢而達到穩定的情況，再繼續我們的步驟。

其次，是建立模式。根據歷史資料或實際經驗來設定模糊邏輯模式。在此特別強調的是，過去的經驗對模糊模式的建構是相當重要的。由於研究者往往不容易獲得過去眞正的資料，但是，研究者可以透過收集對預測有實際經驗的人的經驗，利用這些經驗來輔助建構模式。

最後，由預測模式來解釋結果。在 3.1 的預測實例中，可以看出實際經驗在結果的解釋上扮演著很重要的角色。

3.1 臺灣地區國中教師總數之資料分析

利用 1978 至 1992 年共 15 筆臺灣地區國中教師總人數資料（取自 1993 年教育部教育統計），開始建構模糊的時間數列模式。此資料分析與模糊化過程如下：

1. 由原始資料可以看出最大的值爲 53212 ，最小的值爲 42274 。通常，論域設定應包括最大值與最小值，所以我們取論域爲 (42250,53240) 。接著將論域分割成 I_1 ， I_2 ，⋯， I_m ， m 個次序集合。其過程如下：

首先，將 $(42250,53240)$ 分成 7 個區間（適當的分割，見 *Zimmermann*（1991）、*Schwartz*（1992）、*Yager & Filev*（1994））,亦即，

$I_1=(42250,43820)$，　$I_2=(43820,45390)$，　$I_3=(45390,46960)$，

$I_4=(46960,48530)$，　$I_5=(48530,50100)$，　$I_6=(50100,51670)$，

$I_7=(51670,53240)$。然後，在 $(42250,53240)$ 之中定義 7 個模糊集，

令 $F_{t_1}=$ “需求不多”，

$F_{t_2}=$ “需求不太多”，

$F_{t_3}=$ “需求多”，

$F_{t_4}=$ “需求不很多”，　　(3.1)

$F_{t_5}=$ “需求很多”，

$F_{t_6}=$ “需求非常多”，

$F_{t_7}=$ “需求太多”，

其中每一個模糊集的元素為 I_1，I_2，I_3，I_4，I_5，I_6 及 I_7 與其他相對應的隸屬度所組成。這些集合表示如下：

$$F_{t_1}=\{I_1/1,I_2/5,I_3/0,I_4/0，I_5/0,I_6/0,I_7/0\}$$

$$F_{t_2}=\{I_1/.5,I_2/1,I_3/.5,I_4/0,I_5/0,I_6/0,I_7/0\}$$

$$F_{t_3}=\{I_1/0,I_2/.5,I_3/1,I_4/.5,I_5/0,I_6/0,I_7/0\}$$

$$F_{t_4}=\{I_1/0,I_2/0,I_3/.5,I_4/1,I_5/.5,I_6/0,I_7/0\} \quad (3.2)$$

$$F_{t_5}=\{I_1/0,I_2/0,I_3/.5,I_4/1,I_5/.5,I_6/0,I_7/0\}$$

$$F_{t_6}=\{I_1/0,I_2/0,I_3/0,I_4/0,I_5/.5,I_6/1,I_7/.5\}$$

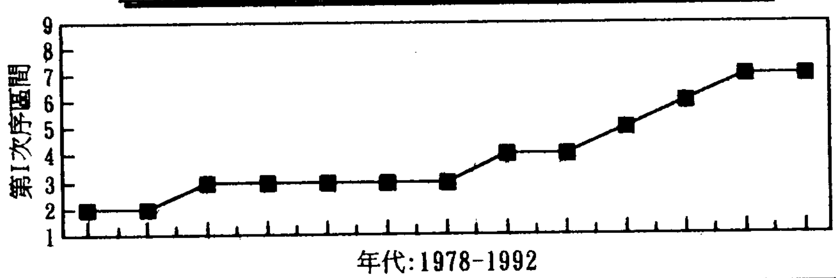
$$F_{t_7}=\{I_1/0,I_2/0,I_3/0,I_4/0,I_5/0,I_6/1,I_7/.5\}$$

其中，隸屬度的給定是根據 *Song and Chissom* (1991) 所提的原則。為了方便起見，集合中的元素可使用相對應的隸屬度來表示，如 (3.3) 。

$$
\begin{aligned}
F_{t_1} &= \{ 1, .5, 0, 0, 0, 0, 0 \} \\
F_{t_2} &= \{ .5, 1, .5, 0, 0, 0, 0 \} \\
F_{t_3} &= \{ 0, .5, 1, .5, 0, 0, 0 \} \\
F_{t_4} &= \{ 0, 0, .5, 1, .5, 0, 0 \} \\
F_{t_5} &= \{ 0, 0, 0, .5, 1, .5, 0 \} \\
F_{t_6} &= \{ 0, 0, 0, 0, .5, 1, .5 \} \\
F_{t_7} &= \{ 0, 0, 0, 0, 0, .5, 1 \}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

由上面的設定可知，原始 15 筆時間數列資料分別落於下列區間：I_1 ，I_1 ，I_2 ，I_2 ，I_3 ，I_3 ，I_3 ，I_3 ，I_3 ，I_4 ，I_4 ，I_5 ，I_6 ，I_7 ，I_7 ，見圖 3.1 。

圖3.1 模糊化資料隸屬次序區間



現在，我們要檢驗此資料是否有顯著的模糊趨勢。根據決策法則，在 λ －顯著水準下

H_0 ：沒有模糊向上趨勢。

H_1 ：有模糊向上趨勢。

當 $\lambda=0.2$ 時可以求得 $C_\lambda=84$ ，根據我們的資料得到 $C=91$ ， $C>C_\lambda$，故拒絕 H_0 。亦即有 λ －顯著水準的模糊向上趨勢。所以我們先將原始資料做一次差分，再觀察其是否滿足穩定型要求。

2. 由差分後的資料可以一看出，最大的值爲 1629 ，最小的值爲 12 。通常，論域要包括最大值與最小值，所以選擇了宇集合爲 (0,1645) 。接下來的步驟是將宇集合模糊化。首先，將 (0,1645) 分成 7 個區間 (適當的分割，並非一定要 7 個) 亦即， I_1=(0,235) ， I_2=(235,470) ， I_3=(470,705) ， I_4=(705,940) ， I_5=(940,1175) ， I_6=(1175,1410) ， I_7=(1410,1645) 。然後，在 (250,2700) 之中定義 7 個模糊集，亦即依據增減多少的程度。

令 F_{t_1} = “增加不多”

F_{t_2} = “增加不太多”

F_{t_3} = “增加多”

F_{t_4} = “增加不很多” (3.4)

F_{t_5} = “增加很多”

F_{t_6} = “增加非常多”

F_{t_7} = “增加太多”

同理，其中每一個模糊集的元素爲 I_1 ，I_2 ，I_3 ，I_4 ，I_5 ，I_6 及 I_7 與其相對應的隸屬度所組成。。

$$F_{t_1}=\{1,.5,0,0,0,0,0\}$$

$$F_{t_2} = \{ .5, 1, .5, 0, 0, 0, 0 \}$$

$$F_{t_3} = \{ 0, .5, 1, .5, 0, 0, 0 \}$$

$$F_{t_4} = \{ 0, 0, .5, 1, .5, 0, 0 \} \qquad (3.5)$$

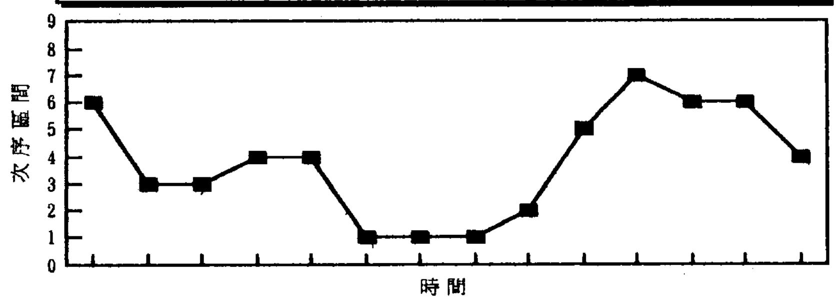
$$F_{t_5} = \{ 0, 0, 0, .5, 1, .5, 0 \}$$

$$F_{t_6} = \{ 0, 0, 0, 0, .5, 1, .5 \}$$

$$F_{t_7} = \{ 0, 0, 0, 0, 0, .5, 1 \}$$

由上面的設定可知，一次差分後的 14 筆時間數列資料分別落於下列區間：I_6 ，I_3 ，I_3 ，I_4 ，I_4 ，I_1 ，I_1 ，I_1 ，I_2 ，I_5 ，I_7 ，I_6 ，I_6 ，I_4 見圖 3.2 。

圖 3.2一次差分後模糊隸屬區間走勢



同樣利用決策法則，我們計算差分後的資料得 $C = 49 < 84$ ，所以接受 H_0 ，即此資料經一次差分以後，已無顯著的模糊趨勢。

3.2 臺灣地區國中教師總人數模糊模式之建構

教師人數資料模糊化後，亦即在每個集合 F_{t_i} （ i=1,2,....,7 ）中，再將每年增加的教師人數按 (3.4) 找對應的隸屬度，此一歷年教師成長的隸屬度集合如表 3.1 。

表 3.1　歷年國中教師人數變動之隸屬度函數

	F_{t_1}	F_{t_2}	F_{t_3}	F_{t_4}	F_{t_5}	F_{t_6}	F_{t_7}
1979	0	0	0	0	.7	1	.9
1980	0	.7	1	.8	.2	0	0
1981	.2	.8	1	.7	0	0	0
1982	0	0	.7	1	.9	.5	.1
1983	0	.5	.9	1	.5	0	0
1984	.1	.9	.5	.1	0	0	0
1985	1	.6	.1	0	0	0	0
1986	1	.8	.2	0	0	0	0
1987	.7	1	.9	.5	0	0	0
1988	0	0	.5	.9	1	.7	0
1989	0	0	0	0	.5	.9	1
1990	0	0	.1	.5	.9	1	.9
1991	0	0	0	0	.5	1	.9
1992	0	.5	.9	1	.6	0	0

由表 3.1 可以獲得每年國中教師增加數的歷史經驗。假設每年教師增加的最大隸屬度是在 $Ft_i\,(i=1,2,\ldots,7)$，則認爲這年的教師增加數爲 F_{t_i}。例如，以 1 9 8 0 年爲例，最大的隸屬度是在 $F_{1980,6}$，則可認爲 1980 年的教師增加數爲 $F_{1980,6}$，或稱之爲數量是屬於“增加非常多”的一年。透過許多過去的模糊資料，理論上可以找出模糊關係距陣。基於此，可以就模糊集合中探討連續兩年教師增加數的模糊關係。假定第 t 年的教師增加數爲 $F_{t,m}$，第 $t+1$ 年的教師增加數爲 $F_{t+1,n}$，期間的模糊關係可以 $F_{t,m} \rightarrow F_{t+1,n}$ 表示之。在此所使用的符號是根據 *Song* 和 *Chissom* (1993) 所用的符號。因此，可以獲得教師增加數的模糊關係如下（在此我們將時間的下標省略）：

$$
\begin{aligned}
&F_6 \rightarrow F_3，F_3 \rightarrow F_3，F_3 \rightarrow F_4，F_4 \rightarrow F_4，\\
&F_4 \rightarrow F_1，F_1 \rightarrow F_1，F_1 \rightarrow F_2，F_2 \rightarrow F_5，\qquad (3.6)\\
&F_5 \rightarrow F_7，F_7 \rightarrow F_6，F_6 \rightarrow F_6，F_6 \rightarrow F_4，
\end{aligned}
$$

由 (3.5) 可知，我們所定義的模式爲一非時變的模糊時間數列。令

$$R_1 = F_6 \times F_3^{t}, R_2 = F_3 \times F_3^{t}, R_3 = F_3 \times F_4^{t}$$

$$R_4=F_4 \times F_4^t, R_5=F_4 \times F_1^t, R_6=F_1 \times F_1^t \qquad (3.7)$$

$$R_7=F_1 \times F_2^t, R_8=F_2 \times F_5^t, R_9=F_5 \times F_7^t$$

$$R_{10}=F_7 \times F_6^t, R_{11}=F_6 \times F_6^t, R_{12}=F_6 \times F_4^t$$

其中 ,X ：取最小運算，t ：轉置。然後，在定義 2.6 可以得到

$$R(t,t-1)=R=\bigvee_{i=1}^{10} R_i \qquad (3.8)$$

其中，V ： 取最大運算。經過計算之後，可得一階模糊關係矩陣 R 爲

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & .5 & .5 & .5 & .5 & 0 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & 1 & .5 & 0 \\ .5 & .5 & 1 & 1 & .5 & .5 & 0 \\ 1 & .5 & .5 & 1 & .5 & .5 & .5 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & 1 \\ 0 & .5 & 1 & 1 & .5 & 1 & .5 \\ 0 & .5 & .5 & .5 & .5 & 1 & .5 \end{bmatrix}$$

所以，預測模式爲

$$F(t)=F(t-1) \circ R, \qquad (3.9)$$

其中，$F(t-1)$ ，$F(t)$ 分別是表示模糊集合中第 $t-1$ 及 t 年的教師增加數。最後，計算出模式輸出的隸屬度，並將隸屬度予以標準化。處理的結果如表 3.2 。

表 3.2 國中教師人數預測之標準化隸屬度與預測值

年	標準化的隸屬度	預測值
1978	0,0,0,0,0,.33,.67	1397
1979	0,.14,.14,.14,.14,.27,.17	1696
1980	1,.1,.19,.19,.1,.19,.13	1475
1981	.16,.1,.19,.19,.13,.13,.1	950
1982	.14,.1,.2,.2,.16,.1,.1	787
1983	.2,.1,.14,.2,.1,.1,.16	950
1984	.23,.11,.21,.23,.11,0,.11	1053
1985	.19,.19,.09,.09,.16,.09,.19	775
1986	.24,.24,.12,.12,.16,.12,0	775
1987	.23,.23,.12,.12,.18,.12,0	775
1988	.13,.13,.17,.17,.2,.1,.1	775
1989	.2,.15,.15,.1,.2,.1,.1	1125
1990	.09,.19,.09,.09,.19,.19,.16	1807
1991	.11,.15,.11,.11,.15,.15,.22	2525
1992	.13,.13,.13,.13,.13,.13,.22	2525
1993	.2,.1,.18,.2,.1,.1,.12	748

(3.8) 的輸出結果爲一模糊集合。若模糊集合的結果能滿足需求，則預測模式的建構工作便告完成了。但是，在很多情況下所要求的結果往往是數值資料。所以往往也需要將模糊集合轉換成數值資料，以便利閱讀。在模糊數值轉的過程中有下列原則可以遵循：

(1)若輸出的隸屬度，只有一個最大值，則我們選擇輸出最大隸屬度，所在區間的中點爲輸出值。

(2)若輸出的隸屬度，有兩個或更多個連續的最大隸屬度，則取最大隸屬度，所在區間的中點平均爲輸出值。

(3)其他情況則以標準化後的隸屬度加權數，對各組中點做平均爲其輸出值。亦即

$$\text{輸出值} = S_1 * M_1 + \ldots\ldots + S_n * M_n \qquad (3.10)$$

其中，S_i 爲標準化後的隸屬度，M_i 爲組中點，$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ 根據上述原則所獲得的預測輸出值如表 3.2 。

肆、模糊時間數列與ARIMA模式之比較

本節將模糊模式之配適與 ARIMA 模式配式就其配適誤差做一比較，比較的結果如表 4.1 。根據 ARIMA 模式三階段建構流程，我們得到最佳模式如右： ARIMA(1,1,0),MS= 204080 ，即 $W_t=0.9952\ W_{t-1}+A_t$ 其中， $W_t=(1-B)Z_t$ 。從表 4.1 可以發現，在模式的建構中模糊模式的誤差要比 ARIMA 之誤差來得小。

表 4.1 FTS 及 ARIMA 的配適值與個別配適誤差

年	FTS 配適	FTS 配適誤差	ARIMA 配適	ARIMA 配適誤差	真實值
1979	43566	-80	43660	13	43647
1980	44520	271	43489	-760	44249
1981	44954	158	44742	-54	44796
1982	45501	-151	45964	312	45652
1983	46404	-43	46390	-57	46447
1984	47115	450	46092	-573	46665
1985	46900	223	46588	-89	46677
1986	46912	119	46550	-243	46793
1987	47028	-223	47940	689	47251
1988	48309	64	48567	372	48195
1989	49723	-101	50514	690	49824
1990	51117	-27	50843	-301	51144
1991	52041	-454	52532	37	52495
1992	53342	130	52585	-627	53212

*FTS=Fuzzy time series（模糊時間數列）

表 4.2 配適誤差比較

誤差型式	ARIMA(1,1,0)	模糊時間數列
MSE	204080	44266
MAE	344	178
MAPE	0.79%	0.37%

$$MSE=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{X}_i-X_i)^2 \qquad (4.1)$$

$$MAE=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\hat{X}_i-X_i\right| \qquad (4.2)$$

$$MAPE=\frac{100\%}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\hat{X}_i-X_i}{X_i}\right| \qquad (4.3)$$

有關國中教師總人數之 *ARIMA* 預測值與模糊時間數列預測值如表 4.3

國中教師

表 4.3 模糊模式與 ARIMA 預式預測結果之比較

年	真實值	ARIMA	模糊時間數列
1991	52,495	52,532	52,041
1992	53,212	52,585	53,342
1993	54,246	53,926	53,960
1994	54,622	54,636	54,708
1995	*	55,343	55,405
1996	*	56,046	56,132
1997	*	56,746	56,922
1998	*	57,442	57,712
1999	*	58,136	58,502
2000	*	58,826	59,292

與國中教師預測相似的步驟我們可以獲得高中、高職、及所有中學教師之預測如表 4.4 、4 .5 、及 4.6 。

高中教師

表 4.4 模糊模式與 ARIMA 模式預測結果之比較

年	真實值	ARIMA	模糊時間數列
1991	16,711	17,184	16,623
1992	17,527	17,202	17,481
1993	18,629	18,245	18,031
1994	19,843	18,876	18,581
1995	*	19,430	19,131
1996	*	19,918	19,681
1997	*	20,347	20,231
1998	*	20,724	20,781
1999	*	21,056	21,331
2000	*	21,348	21,881

高職教師

表 4.5 模糊模式與 ARIMA 模式預測結果之比較

年	眞實值	ARIMA	模糊時間數列
1991	18,000	18,283	17,898
1992	18,332	18,399	18,493
1993	18,836	18,628	18,986
1994	19,152	18,892	19,366
1995	*	19,128	19,839
1996	*	19,338	20,468
1997	*	19,525	21,097
1998	*	19,693	21,726
1999	*	19,842	22,415
2000	*	19,975	23,044

所有中學教師

表 4.6 模糊模式與 ARIMA 模式預測結果之比較

年	眞實值	ARIMA	模糊時間數列
1991	87,206	87,883	86,125
1992	89,071	88,017	89,071
1993	91,711	90,952	90,867
1994	93,617	92,818	92,603
1995	*	94,681	94,158
1996	*	96,539	95,904
1997	*	98,393	97,650
1998	*	100,243	99,369
1999	*	102,089	101,142
2000	*	103,931	102,888

根據 SSE 、 MAE 、及 MAPE 的指標來看模糊時間數列模式的預測結果均較單變量 ARIMA 的預測結果來得準確，可見此一方法是相當有效的預測工具。以後，我們將進一步探討時變的（ time-variant ）模糊時間數列（ Song and Chissom(1994) ），以及多變量的模糊時間數列（ mutivariate fuzzy time series ），以增進其預測能力。此外，實際的師資供需政策中，必須考慮班級數量，班級數量也是影響教師人數增減的重要因素之一。教育政策的規劃者如欲以降低班級人數來提高教育品質的同時，也必須審愼考慮此一政策的調整，其所參考的資料之模糊性，以及有關預測模式建構的合理化。有了合理預測模式的建構，才可依據預測的結果，來適切的擬定相關的教育配合措施。否則一味遽然大幅變動國中班級平均人數，勢必將造成師資供需嚴重的失調。

伍、結論

在社會科學的測度理念上，模糊統計和模糊相關性的使用可說是一種數字模式的推廣。單一數值性質的資料，主要限制是具有過度解釋的潛在危險。而使用比較模糊且樸實的語言資料，則可以避免這些無法預料的危險。事實上，利用語言模式作爲預測，可以發現每一期皆增加了結果的模糊性。從一般的生活中這種模糊化似乎也是很正常的現象，但是從另一角度來看，如果數值處理的觀念沒有改變，預測方法沒有突破，往往卻阻礙了長期預測的可能性。

本文利用單變量時間數列以及模糊時間數列方法，建立了國中教師人數預測模式。文中並比較其預測的結果，我們發現由模糊時間數列所建構之預測模型其預測結果優於單變量之 ARIMA 模式。本文雖只以現階段問題較爲迫切的國中教育爲主體，進行有關師資預測的探討，相信以同樣的理念，也可以作爲其他階段教育有關數量問題的探討。

最後， Kosko(1992) 建議以神經網路和模糊語言系統共同應用做爲函數之估計量。希望此一研究的方向將可提供模糊統計一個更有用的工具。爲了克服繁雜巨量的矩陣運算與合適的信念準確度等資料，神經計算似乎是值得花費時間研究的課題。對社會科學研究方面，亦將激勵更多未來模糊統計方法的實驗工作。若吾人能將此種符合社會現象隨機過程的動態模

糊統計模式運用在教育學上，相信會更有助於有關教師人力規劃的擬定。

參 考 文 獻

吳柏林和許瑞雯（民 82 ）。臺灣地區中學教師預測模式比較分析。教育與心理集刊， 12 ， 1-15 。

馬信行（民 81 ）。我國各級學校師資之預測。政大學報， 65 ， 62-80 。

教育部（民 82 ）。中華民國八十二年赴育統計資料。臺北：教育部

湯振鶴（民 80 ）。台灣地區國民中學八十至八十六學年度教師需求量之推估研究報告。台灣省政府教育廳，台北市政府教育局，高雄市政府教育局合辦。

Baudossy,A, bogardi, I., & Duckstein, L.,(1993).Fuzzy non-lineary regression analysis of does-response relationships. European Journal of Operational Reaearch,66,36-51.

Dubois, D., &Prade, H.(1992).Evidence,knowledge, and belief functions. International Journal of Approximate Reasoning,6,295-319.

Gath,I.,&Geva,A(1989).Fuzzy clustering for the estimation of the parametera of the components of mixtures of distributions. Patt.Recog.Lett.9,77-86.

Hendershot,G.,& Placek, P.(Eds)(1981).Predicting Fertility.Lexington,MA:health and Co.

Klir,G.J., &Folger,T.A.(1988).Fuzzy Sets,Uncertainty,and Information.Englewood Cliffs,NJ:Prentice Hall.

Kosko,B.(1992).Neural Networks and Fuzzy Systems.Englewood Cliffs,NJ:Prentice-Hall.

Manski,C.(1990).the use of intenion data to predict behavior:A best case analysis.Journal of the America Statistical Association,85,934-940.

Provan,G.M.(1992). The validity of dempster-shafer belief functions.International

Journal of Approximate Reasoning,6,389-399

Sch wartz,D.G.(1992).A min-max semantics for fuzzy likelihood.IEEE,1393-1398.

Song,Q.,& Chissom,B.S.(1993)Fuzzy time series and its models.Fuzzy Sets and Systems,54,269-277.

Song,Q.,& Chissom,B.S.(1994).Forecasting enrollments with fuzzy time series -part Ⅱ .Fuzzy Sets and Systems,62,1-8.

Sugeno,M.(1985).An introduction survey of fuzzy control.Information Sciences,36,116-132.

Takagi,T., & Sugeno,M.(1985).Fuzzy identification of systems and its application to modelilingand control.IEEE Trans.Syst.Man,and Cybern,15,116-132.

Tanaka,H., & Ishibuchi,H.(1993)An architecture of neural networks with inteyval weights and its application to fuzzy regression analysis.Fuzzy Sets and Systems,57,27-39.

Von Cutsem,B., & Gath,I.(1993).Detection of outilers and robust estimation using fuzzy clustering.Computational Statistics and Data Analysis,15,47-61.

Werners,B.(1987).An interactive fuzzy programming system.Fuzzy Systems,23,131-147.

Wierzchon,S.T.(1982).Appliaction of fuzzy decision-making theory to coping with ill-defined problems.Fuzzy Sets and Systems,7,1-18.

Wu, B., & Yang,W.S.(1993).Measureing beliefs:An applications of fuzzy sets to social and economic anaiysis.1993 Far- Eastern Metting of the Econometric Soci-ety.taipei.

Yager,R.R.and Filev D.P.(1994).Essentials of fuzzy Modeling and Control.New York: John Wiley & Son,Inc.

Zimmermann,H.J.(1991).Fuzzy Set Theroy and Its Applications.Boston:Kluwer Academi.

Zimmermann,H.J.,Zadeh,L.A., & Gaines,B.R.(Eds).(1984).Fuzzy Sets and Decision Analysis.New York:Amsterdam.