學習成就評量與模糊模式之分析

張鈿富*　　孫慶珉**

摘　要

本研究以模糊模式來分析學習成就評量，應用模糊分析及其解釋效用，提出學生學習評量之可能途徑。並以模糊模式系統為基礎，比較傳統評量方法與模糊評量方法使用上之差異。

本文從現行中學學習評量之探討開始，檢討目前教育部正大力推展之五等第計分方式，並就模糊理論及其測度運算、模糊集合概念、隸屬度函數之估計以及模糊集合與模糊測度運算之概念，來討論學習成就模糊分析之可能性。文中比較目前國中生學習評量與模糊的學習評量效果之不同，並列舉模糊綜合學習評量、單科模糊學習評量及其逆問題，以供決策者訂定評量模式之參考。

Abstract

The purpose of this paper is to find a possible and stronger evaluation system for student achievement. The authors begin with discussing the evaluation system of the current junior high school and reviewing the five-rank evaluation method which is highly recommended by the Ministry of Education currently. By means of the fuzzy measurement, fuzzy operation and fuzzy membership function, the authors attempt to explain how fuzzy theory can be properly applied in student achievement evaluation. Two illustrative examples about fuzzy evaluation for student achievement are

*作者為本校教育研究所副教授
**作者為景文工商共同科講師

demonstrated in this paper.

Keywords: *student achievement evaluation, five-rank evaluation method, fuzzy modeling, fuzzy membership function.*

壹、緒　論

模糊的理論與方法已廣泛地應用在各種科學研究上，如Clymer，Corey和Gardner(1992)的機場控制；Cupta(1984)和Adlassing(1986)的臨床醫學診斷；Cao與Chen(1983)的氣象觀測；Blin與Winston(1973)的社會選擇等等，模糊理論在不同領域內的運用已有相當豐碩的研究成果。唯在教育學術領域裡，有關模糊理論與方法的應用文獻到目前爲止尚不多見。

本研究嘗試運用模糊模式來分析學習成就評量，並利用模糊推理及其效用以探究傳統學習評量之限制。由於研究側重於探討以解決教育的實際問題爲主，不同於一般模糊集合之研究。因此，預先假定讀者熟悉模糊語言及模糊推理，而對於模糊集合之基本理論不做詳細介紹。如欲知有關理論較詳細的內容，可參閱Klir與Folger(1988)，Zimmermann(1991)和其他有關的著作。

五等第計分基本上爲一常模參照，那一等才算是及格似不重要，傳統上在國民中學的百分數評分以六十分爲及格，是一種標準參照。百分數評分和五等第評分共同的缺點，就是很難從這些相對或絕對的分數中，看出數字代表的其他意義。站在辦教育的立場，學校教師對學生的評量，充其量只能定位在對學生現階段發展的暫時參考，而不是學習結果的最後判決。若過度的劃分等級、強迫的歸類可能造成學習不良影響。基於此，則探討其它可能更有意義的評量方法，實有迫切的需要。

本文從現行國中學習評量之探討開始，檢討目前教育部正大力推展之等第計分方式，應用模糊理論及其測度運算、模糊集合概念、隸屬度函數之估計，提出學習成就之模糊分析與模糊評量之可行性。文中亦陳述國中生一般學習評量與模糊學習評量之差異，模糊學習評量逆問題，單科模糊學習評量及其逆問題，希望能藉拋磚引玉之效，讓教育界充分的討論，發展更理想的學習評量方式。

貳、現行中學學習評量

2.1 百分數評量面臨的挑戰

近年來教育部爲了配合「國民中學畢業生自願就學輔導方案」，而進行國民中學成績評量的改革工作，修訂國中學生成績考查辦法。自願就學方案目的在廢除高中高職和五專的升學考試，改用國中在校三年的成績作爲入學分發的依據，成績好的學生可以優先選擇自己喜歡的高中、高職或五專就讀，而成績差的學生，也可以不經過考試，就有學校可念。此一方案以在校成績替代聯考，這樣一來，國中生在校成績就非常重要了。教育部爲了讓在校成績更爲客觀，特別擬將目前的百分計分法，改爲五等第的計分法。在傳統的百分數評量裡，學生很容易爲了些許的分數差距而做劇烈的競爭，甚至認爲一兩分的差別也代表著輸或贏，但是69分與70分那麼微小的差別，在一般的學習成就上並不能顯示出太大的意義，所以利用等第計分方式，以彌補百分數評分的一些缺點。

自願就學輔導方案中，國中生畢業以後分發入學的依據是，以國中在校成績登記分發入學，在校成績包括三部分：

1. 學科成績：學生在校三年所學習的各學科分兩類，(1)一般學科，包括公民與道德、國文、英語、數學、歷史、地理、理化、生物、地球科學、健康教育等；(2)藝能學科，包括體育、童軍教育、美術、工藝（家政）、音樂和選修科目等。以學期爲單位，分別依授課時數加權計算各學科成績。
2. 綜合表現成績：包括出缺席考勤、獎懲紀錄、參加校外比賽、導師綜合評分等四部分。根據年級爲常模，採彈性相對五分制計分。
3. 統一命題考試成績：統一命題考試成績以登記區爲常模，考試成績之比重，由各登記區招生委員會自行決定。

2.2 五等第計分之方式

五等第計分法是將一個團體的成員劃分成固定的五個分數群，按照學生在團體中的排

名，給予屬於他的相對分數。在學習成績考查方面，有幾種方式：

1.絕對五分制

成績達九十分以上者，給五分；八十至八十九分者給四分；七十至七十九分者給三分；六十至六十九分者給兩分；五十九分以下者，給一分。

2.相對五分制

著眼於以班級學生爲單位，將班級學生的成績，按照一定的人數比例分成五級，每學期定期評量平均分數，依相對地位加以比較，按常態分配比率，以五、四、三、二、一給分。五分佔10％；四分佔25％；三分佔40％；二分佔20％至25％；一分佔0％至5％。如果一個班上有五十名學生，以數學的期考爲例，老師在學生考卷上給的分數，雖然使用90分或80分的傳統計分法，但是將來還是要換成等第分數，譬如：全班前五名的學生得五分；緊接著的十三個學生得四分；在下來的二十個學生得三分；接下去的十個到十二個學生得兩分；倒數第一和第二的學生則得一分。這種方法的界定適用於一般學科。

3.彈性五分制

除了智育學科之外，體育、童軍、美術、音樂、工藝、家政，也要採用類似的方法評分，以相對五分制的百分比率爲原則，二或三分合計可達60％至65％，但給分的彈性，視教師的專業自主權而定。

表2.1　五等第計分法與班級人數比例表

類別 / % / 給分	學　科 一般學科	成　績 藝能學科	綜合表現
5分	10％	10％	10％
4分	25％	25％	25％
3分	40％	給3分及2分	給3分及2分
2分	20－25％	合計可達60－65％	合計可達65％
1分	0－5％	0－5％	成績未達60分者

國中在校三年成績累計下來，再加上操行、綜合表現成績，採逐年增加比重方式核計，每一班的前幾名學生，可以優先選擇學校就讀。五等第計分法與班級人數比例如表2.1。

2.3 五等第計分之假設與限制

採用五等第計分方案的理想是，讓一般學校不敢把程度好的學生，集中在同一個班級上課。因爲每班最後幾名學生所分發的學校會比較不理想，這樣一來，也就可以落實常態編班，導引國中教學正常化。這個方案雖有點理想化，但是一般認爲也可能出現弊端。例如教師評分不公，學生爲了爭取好成績，被迫參加教師的惡性補習，學生課業壓力不但不減，反而更大，甚至影響同儕關係，而師生關係也難以坦然處之，甚至學生不滿意分發學校等等問題。事實上，最有問題的是五等第計分方式，執著於普遍存在常態分佈的假設。但是，並非所有之樣本資料均能滿足常態分配之模式。在實際的例子中，分佈之曲線常因母體之來源或測驗之難易，而產生極大的變化。例如，從某一班測驗所得之成績，可能屬於均勻分佈，但過難或過易的試題卻往往得到偏態分佈的結果。

雖然此方案長期實施之後，可使各校間水平逐漸齊一，但是水平齊一並不代表可以在素質上獲得提升。事實上，五等第計分法可能損及中上程度的學生，也刻意的打壓優良教師教學的效果。班級學生的素質起始點也許可以透過特別的安排，儘量做到相同，但是同一所學校裡教師之間素質的參差不齊，卻是不爭的事實。而各地方的學生素質亦不相同，且各地方教師間評分標準寬嚴亦不一。例如，偏遠地區學生拿到的五分，其程度可能比不上市區內學生的三分或四分，決策當局又怎能不顧目前學校既存的一些事實，而要求相同的學習結果呢？從計量的觀點來看，五等第計分法在應用上有其適用範圍與限制，而不是放之四海皆準的原則。

2.4 混合制九等第計分法

國中自願就學方案，將在現有規模或縮小試辦範圍下，繼續再試辦三年，五等第的成績考查辦法，修正爲〃混合制九等第計分法〃，將從83學年度起，做爲國中成績的主要計分方式。改良式的混合九等第制配分與得分人數比例規劃如表2.2。

表2.2　混合制九等第計分與五等第計分

等級	特優	優	甲上	甲下	乙上	乙下	丙上	丙下	丁
分數	9分	8分	7分	6分	5分	4分	3分	2分	1分
人數比率	2～6	4～10	10～14	14～20	18～22	14～20	10～14	4～10	0～6
彈性百分比	10～14%		26～32%		34～40%		14～24%		0～6%
五等第計分	5分		4分		3分		2分		1分

混合九等第制所標榜的特色是：(1)以五段替五等，段內再細分爲九等，各段與各等之間人數比例的彈性空間增加，以減少固定比例所造成的制度性評分不公；(2)增加高分群比例，優、甲兩段學生可佔46%，有正面的鼓勵作用；(3)自學方案中再加入年級常模，每學年一次統一命題段考，以改善班際、校際之間的差異。平心而論，此制改進了許多，但是，基本精神仍以九等的比例限制來規範學生的學習結果，似乎仍存在本末倒置或誤導工具重於目的之嫌疑。

參、模糊理論及其測度運算

首先我們就模糊集合運用在學習成就評量稍作簡介。在傳統集合理論中，一元素屬於某集合，在模糊集合中的元素可能只有部分屬於某集合。例如：「好學生」這一名詞，究竟在何種成就之下不再是好學生，並無一明確界限，而模糊集合的定義可以顯示出A成就指90%的好，而B成就便指30%的好。在模糊集合中，可以將學生的成就定義爲全距是從0到1，此外，每一語言變項的值代表一機率分配，這種語言變項與機率的關係如圖3.1所示。

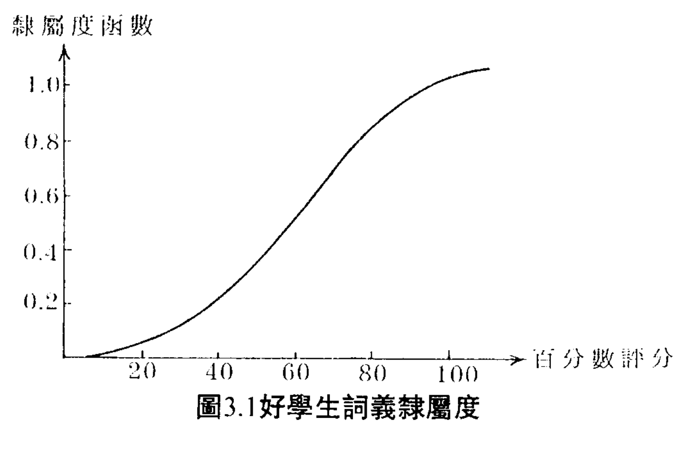

圖3.1好學生詞義隸屬度

實際上日常遭遇的問題甚少非黑即白，而學習結果的評定答案也不是非好即壞。有關的學習成就之模擬與應用似應符合成就的不確定性，然而到目前爲止，處理不確定性的各種方法之間幾乎沒有共通性。模糊評量提供一個操作的共同點，藉此做爲標準化的基礎。而模糊評量本身所具有的語言隱含特性，這種特性可以減少在應用時處理許多不確定性所造成的困擾。學校的學習評量常需要處理連續的價值變項，這似乎不是單純的五等第或較複雜的九等第之分配所能有效規範，而這亦是從事教育評量時所應考慮的重點。

3.1 模糊集合概念

〔定義3.1〕設A是論域X上的一個模糊子集，A的隸屬函數(membership function)μ_A乃指滿足μ_A：X→［0,1］的對應關係。此關係表示變數$x \in$ X對於模糊子集的隸屬度。$\mu_A(x)$的值接近於1，表示隸屬於A的程度很高。$\mu_A(x)$的值接近於0，表示隸屬於A的程度很低。

論域指被討論的事物全體的變數，有時亦稱爲空間。我們利用這些介於（0,1）實數來標記討論的事物之看法。模糊子集之隸屬度表示方法，通常有以下兩種：

(1)論域爲離散狀態：$X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$。則模糊子集之隸屬程度可表示爲

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\ldots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

$$=\sum\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

(2)論域爲離散狀態：$X=[a,b]$,a,b 爲實數，則模糊子集A 之隸屬程度可表示爲

$$a=\int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

其中不同於慣用積分符號，而僅是表示元素x_i與隸屬程度對應關係的一個總括。

以下介紹幾個例子，藉以說明隸屬函數與其模糊集合之關係。〔例3.1〕考慮對政大實驗小學一年孝班數學成績評量。令X表示評量空間，則我們常說這一班數學成績「不錯」、「普通」、「不好」，就是評量空間X上的三個模糊子集。

若令x_1＝不錯，x_2＝普通，x_3＝不好，則依其表現評量可能爲

(1)不錯→0.4，普通→0.4，不好→0.2；

我們記爲A＝0.2/不好＋0.4/ 普通＋0.4/ 不錯

或

(2)不錯→0.2，普通→0.3，不好→0.5；

我們記爲A＝0.5/ 不好＋0.3/ 普通＋0.2/ 不錯

〔例3.2〕令X＝［0,100］表示年齡空間，A與B表示，‘年輕’與‘年老’，其隸屬程度見圖3.2及圖3.3

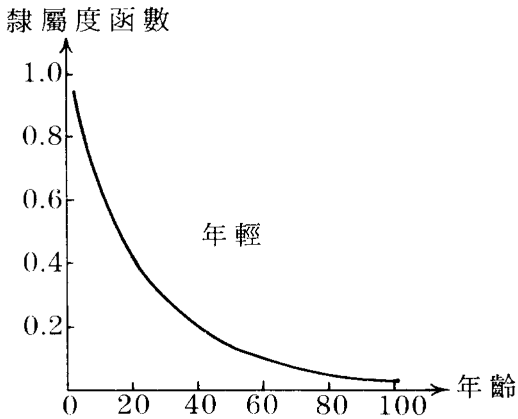

圖3.2年輕年齡之隸屬度函數

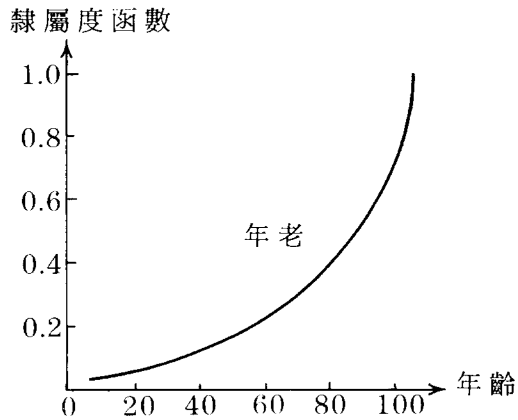

圖3.3年輕年齡之隸屬度函數

$$U_A = \begin{cases} 1 & ;\ t < 20 \\ \exp\left\{\dfrac{-(t-20)}{20}\right\} & ;\ t \geqslant 20 \end{cases}$$

$$U_B = \begin{cases} 0 & ;\ t < 25 \\ \log\left\{\dfrac{(t+20)}{41}\right\} & ;\ t \geqslant 25 \end{cases}$$

若t＝50，則我們有$U_A(50) = \exp\{-1.5\} = .22$, $U_B(50) = \log(75/41) = .61$，亦即51歲屬於年輕的程度爲.22，屬於年老的程度爲.61，故可以認爲50 歲是比較老的。

3.2 隸屬度函數之估計

隸屬度函數之估計多帶有較強的主觀意識，雖然機率統計學可爲隸屬度函數之估計提供一些較簡便與科學的技術，但是對實證學者而言目前發表之文獻仍嫌不足。本節提出數點隸屬度函數估計之重要觀念與方法：

(1)隸屬度函數應以合乎情理的技巧，做客觀實際之評估。

(2)大多數情況，隸屬度函數盡量以模糊統計實驗加以確定。

對於已有經驗的結果，可用類似分配方法，如均勻分配、常態分配等，來比較推理評估。

對於未知分配情況，則可考慮以無母數統計之方法，用比率及等級估計之。

(3)以對比排序來決定隸屬度函數。其中包括擇優比較法、優先關係定序、相對比較法等。

(4)隸屬度函數亦可用模糊測度運算方法求得（見3.3節）。

(5)藉神經網路學習訓練法，模擬人腦經過學習而不斷改進之過程，反映出隸屬度函數分配，見Kosko(1992)。

3.3 模糊集合與模糊測度運算

模糊集合運算，在日常生活常常遇到，例如「很勤奮且有錢」＝很勤奮$\cap$有錢。選舉期間「暴力或買票」＝暴力$\cup$買票。「不美麗但溫柔」＝非美麗$\cap$溫柔。下列爲最常用之模糊集合運算：

非$A = 1 - A$,

若$A \cup B = C$, 則$U_c = \mathrm{Max}\,(U_A(X), U_B(X)) = U_A(X) \vee U_B(X)$,

若$A \cap B = C$, 則$U_c = \mathrm{Max}\,(U_A(X), U_B(X)) = U_A(X) \wedge U_B(X)$,

A 若且唯若$B = 1 - |A - B|$

模糊矩陣運算不同於傳統矩陣運算，而是根據最大最小合成觀念。令‘$\oplus$’表示矩陣$A(n \times n)$ 與$B(n \times n)$ 之一種模糊合成運算，‘$\odot$’表示矩陣$A(n \times n)$ 與$B(n \times n)$ 之一種模糊

合成運算，其定義分別爲

$A \oplus B = Q$, 其中$Q = (q_{ij})$ 且$q_{ij} = \max\limits_{1<i,j<n} (a_{ij}, b_{ij})$

$A \odot B = R$, 其中$R = (r_{ij})$ 且$r_{ij} = \max\limits_{1<i<n} \min\limits_{1<j<n} (a_{ij}, b_{ij})$

〔例3.3〕設A ＝ 0.2/ 不好＋ 0.4/ 普通＋ 0.4/ 不錯

B ＝ 0.3/ 不好＋ 0.5/ 普通＋ 0.4/ 不錯

則$A \bigcup B$ ＝ 0.3/ 不好＋ 0.5/ 普通＋ 0.4/ 不錯

$A \bigcap B$ ＝ 0.2/ 不好＋ 0.4/ 普通＋ 0.4/ 不錯

3.4 模糊分析與邏輯推理

一般邏輯推理，大多由直言判斷句與條件判斷句所組成，但是對存在機率性之模糊判斷句，欲做其分析與邏輯推理則相當複雜，且結論也不同於一般機率運算結果，玆舉例說明如下：

假如意向A顯示決定的百分之五十的機會，而且意向B顯示決定的百分之三十的機會，則意向A或意向B決定的機率爲

$$P(A or B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.5 + 0.3 - 0.15 = 0.65$$

若考慮以模糊決定的可能性，則其計算如下：

$$0.5 f - \text{or } 0.3 = \max(0.5, 0.3) = 0.5$$

這種做法完全忽略證據的累計，它僅考慮單一最顯著的意向。就此點而言，我們假設意向非有即無，此真假推理正是模糊推理所極力避免者。例如，我們也許會說低糖可樂不錯但不是特別營養。台灣啤酒好喝並含相當的營養。楊桃汁酸甜退火又含普通的營養。若規則定義喝某種飲料是「很好的」爲：它是非常美味或非常營養。此意識閾之於好被定義爲任何真值0.7或是更高。假如低糖可樂（口味＝0.5，營養＝0.2），台灣啤酒（口味＝0.5，營養＝0.3）而楊桃汁（口味＝0.4，營養＝0.5），則低糖可樂、台灣啤酒、楊桃汁三種依照模糊推理，其f－or值均小於0.7，故都不算是很好的飲料又低糖可樂和台灣啤酒是很好的飲料之機率值分別是：

$$P(0.5 \text{ or } 0.2) = 0.5 + 0.2 - 0.10 = 0.6$$

$$P\ (0.5\ \text{or}\ 0.3) = 0.5 + 0.3 - 0.15 = 0.65$$

而就楊桃汁言，其機率值是

$$P\ (0.5\ \text{or}\ 0.4) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$$

此值通過「很好」的意識考驗，因此我們說楊桃汁是唯一好的飲料。然而就模糊推理而言，卻無法同意三種飲料是「很好」。

肆、模糊之學習評量

一般來說，目前中小學校學習評量的常用方法，有以下兩種：百分數評量與五等第評量。百分數評量乃基於名次之考量，屬於等量尺度的評量(scale measure)，而五等第評量著重於階次比較，屬於次序尺度的評量(order measure)，然而這兩種方法的評量結果都是一固定分數。通常利用數字評量在一般模擬或實際運用上仍有一些缺點，這些缺點可歸納如下：

1.為了滿足數字精確的需要而過度使用實驗資料；

2.過度解釋模式的數字結果；

3.為了簡化或降低複雜性在實際的關連上再加上一些含糊的關連。

若考慮以模糊子集來進行有關學習成就評量，則其結果可能比使用單一分數更能完整的反映有關評量真正所含的訊息。例如，當五等第評分結果為3分時，模糊評量之可能情形卻有無限多種，如(.5,0,0,0,.5), (.2,.2,.2,.2,.2), (.1,.2,.4,.2,.1),...等。事實上，根據實證經驗，如果學生個別差異極大，則班級學習結果之分佈，呈均勻分配、極端偏態分配、雙峰分配均有可能，而且此分配情形並不限於一種常態分配$N(\mu,\sigma^2)$。

4.1. 學習成就之模糊分析

令學習評量形式為｛很差(1)，差(2)，普通(3)，好(4)，很好(5)｝

且相對模糊學習評量形式為：

$$\text{模糊學習評量} = \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{5} \tag{4.1}$$

爲方便起見，可將(4.1)寫爲向量形式$(x_1,x_2, x_3, x_4, x_5,)$。若模糊綜合學習評量矩陣R爲

$$R = \begin{bmatrix} r(1,1) & r(1,2) & \cdots & r(1,5) \\ r(2,1) & r(2,2) & \cdots & r(2,5) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(5,1) & r(5,2) & \cdots & r(5,5) \end{bmatrix}$$

各科之加權分配$W = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$。則該評判對象的綜合學習評量爲$G = W \odot R$。

4.2. 模糊學習評量逆問題

已知模糊學習評量結果G 與評量矩陣R ，欲求相對加權分配W 之問題，稱模糊學習評量逆問題。

首先設定幾種可能加權分配：W_1, $W_2, \ldots, W_k$。再分別計算基於W_i 下之模糊學習評量結果G_i。最後比較所有G_i 至G 中之最短距離，以決定最接近之加權分配W*。利用Minkowski距離標準(Klir Folger, 1988)來測量與W 最接近的加權分配W*。Minkowski 距離定義如下：

$$D_p(W) = \left(\sum |u_w(x_i) - \mu_{w^*}(x_i)|^{p} \right)^{1/p} \tag{4.2}$$

其中，$p \in [1,\infty]$ 當p = 1時稱爲絕對值距離，當p = 2時稱爲歐幾里德(Euclidian) 距離，當p = ∞時稱爲謝比雪夫(Chebyshev) 距離。在本文中僅討論歐幾里德距離。以下將以討論學生學習成就爲主，並試圖藉由模糊分析歷程來解釋學習成就評量資訊的特性。

〔例4.1.〕 國中生模糊綜合學習評量設學生之學業成績因素集爲X＝｛國文(C)，英文(E)，數學(M)，自然(N)，社會(S)｝，總分爲700分，各科成績分別爲國文200分，英文100分，數學120分，自然140分，社會140分，其各科相對應的加權分配模糊集爲

$$W = \{0.3 = (200/700), 0.15(=100/700), 0.18(=120/700), 0.2(=140/700), 0.2(=140/700)\}$$

各科學業評量集爲V＝｛很差(1)，差(2)，普通(3)，好(4)，很好(5)｝

情境1：設評量矩陣R爲

	1	2	3	4	5
C	.0	.0	.2	.7	.1
E	.0	.1	.3	.6	.0
M	.0	.1	.2	.2	.5
N	.0	.1	.5	.3	.1
S	.0	.0	.1	.8	.2

則該學生的原始綜合學習評量G* 爲

$$\begin{aligned} G^* &= (.3,.15,.18,.2,.2) \odot \begin{pmatrix} .0 & .0 & .2 & .7 & .1 \\ .0 & .1 & .3 & .6 & .0 \\ .0 & .1 & .2 & .2 & .5 \\ .0 & .1 & .5 & .3 & .1 \\ .0 & .0 & .1 & .8 & .2 \end{pmatrix} \\ &= (.0,.1,.2,.3,.2) \end{aligned}$$

對G* 做一標準轉換，因0 + .1 + .2 + .3 + .2 = .8

故$G_{Fuzzy} = (.0,.1,.2,.3,.2) / 0.8 = (.0,.13,.25,.38,.25)$

此結果表示該學生25％表現很好，38％表現好，25％表現普通，13％表現差。

若以一般五等第加權平均法評量，其結果爲：

評量等第爲$R = (4,4,5,3,4)^T$

得

$$\begin{aligned} G &= (200,100,120,140,140) \odot (4,4,5,3,4) / 700 \\ &= 3.97 \end{aligned}$$

此結果僅告訴了我們五等第加權平均分數，卻無法了解其分配之差異。

情境2：設評量矩陣R爲

	1	2	3	4	5
C	.5	.4	.1	.0	.0
E	.5	.4	.1	.1	.0
M	.4	.2	.2	.1	.0
N	.2	.5	.2	.1	.1
S	.1	.3	.4	.3	.0

則該學生的原始綜合學習評量G* 爲

$$
\begin{aligned}
G^* &= (.3,.15,.18,.2,.2) \circledcirc \begin{pmatrix} .5 & .4 & .1 & .0 & .0 \\ .5 & .4 & .1 & .1 & .0 \\ .4 & .2 & .2 & .1 & .0 \\ .2 & .5 & .2 & .1 & .1 \\ .1 & .3 & .4 & .3 & .0 \end{pmatrix} \\
&= (.3,.3,.2,.2,.1)
\end{aligned}
$$

對G* 做一標準轉換。因$.3 + .3 + .2 + .2 + .1 = 1.1$

故$G_{Fuzzy} = (.3,.3,.2,.2,.1) / 1.1 = (.27,.27,.18,.18,.09)$

此結果表示該學生9%表現很好，18%表現好，18%表現普通，27%表現差，27%表現很差。

若以五等第加權平均法評量，其結果爲：

評量等第爲$R=(1,1,1,2,3)^T$

得

$$
\begin{aligned}
G &= (200, 100, 120, 140, 140) \circledcirc (1, 1, 1, 2, 3)^T / 700 \\
&= 1.2
\end{aligned}
$$

由以上二情境可以看出以五等第加權平均僅能表示該學生加權平均數，無法充分了解個別學生差異情況，在實施因材教育過程中，忽略很多寶貴資訊。而模糊分析對學習評量之主要特性爲具體反應學生學習成就之可能分佈情況，其所解釋的現象是依等級機率，有利於教師根據學生之學習特質予以充份輔導。因此，在比較上較適合因材施教之推展。

〔例4.2.〕單科模糊學習評量及其逆問題

根據英語教學經驗，學生之英語學習成就因素集爲X＝｛聽(L)，說(S)，讀(R)，寫(W)｝，各因素學業量集爲V＝｛很差(1)，差(2)，普通(3)，好(4)，很好(5)｝，若評量矩陣R爲

	1	2	3	4	5
L	.0	.8	.1	.1	.0
S	.2	.7	.1	.0	.0
R	.0	.0	.1	.2	.7
W	.0	.0	.5	.5	.0

其英語學習評量結果爲G＝(.0,.0,.1,.3,.6)，則教師對英語學習成就因素集｛聽(L)，說(S)，讀(R)，寫(W)｝之相對加權分配爲何？

我們可參考歷年來英語教學時間與重點，擬出數種可能的加權分配方案。設WW_1表示聽，說，讀，寫，大致並重；WW_2表示偏重聽與說；WW_3表示偏重讀與寫；WW_4表示極偏重讀。

$$W_1 = (.2,.3,.2,.3)$$

$$W_2 = (.4,.4,.1,.1)$$

$$W_3 = (.1,.1,.4,.4)$$

$$W_4 = (.0,.0,.9,.1)$$

先求出基於W_i $(i = 1,2,3,4)$下，英語學習之原始評量結果$G_i' = W \odot R$

則

$$G_1' = (.2,.3,.3,.3,.2)$$

$$G_2' = (.2,.4,.1,.1,.1)$$

$$G_3' = (.1,.1,.4,.4,.4)$$

$$G_4' = (.0,.0,.1,.2,.7)$$

經標準化處理後，得

$$G_1' = (.15,.23,.23,.23,.15)$$

$$G_2' = (.22,.44,.11,.11,.11)$$

$$G_3' = (.07,.07,.28,.28,.28)$$

$$G_4' = (.0\ ,.0\ ,.1\ ,.2\ ,.7\ )$$

再求其相對G之距離，取其絕對值的平均，做爲權衡迫近真實的依據，則從

$$|| G_1 - G || = 0.21,\ || G_2 - G || = 0.27,\ || G_3 - G || = 0.15,\ || G_4 - G || = 0.04$$

得知W_4＝(.0,.0,.9,.1)爲Wi中最近似此教師對英語學習評量之加權分配。很明顯地，當預選的加權分配方案愈多，我們求出之最佳學習評量加權分配愈接近教師對英語學習評量之加權分配。

伍、結　論

國民中學自願就學輔導方案中，利用等第計分方式之提出，來規範教學正常化，並彌補百分數評分法在學生進入高中高職分發上，所產生的一些缺點。然而等第計分法本身也有一些限制與實際運用上的矛盾，一般反對最激烈的是教師評分的客觀性有問題，教師的素質不整齊，教學的成效事實上有極大的差異性，以及班級或區域學生學習結果偏態的事實。自願就學方案則採用等第計分法，強調唯一的轉換機制，化偏態爲常態，造成另外一種的不公平，尤其是對於臨界分數學生之歸類，同樣解決不了傳統上的問題。

學習成就評量採用模糊分析模式，乃爲提昇評量本身的真實性與可靠性。從本文的探討可以發現，在數理模式的建構和實際運用的例子裡，模糊分析原理較能處理真實世界中所面臨的複雜性與曖昧性。以目前有關理論發展及模式之改進，未來模糊評量系統架構之建立是可預期的。一旦模糊分析模式在處理評量上的效力能爲一般人所接受，則真正解決評量上的一些矛盾問題將指日可待。而國內有關模糊分析評量的探討，應予以鼓勵，以期進一步發展。

最後值得一提的是，神經網路這個近來發展迅速且被各方廣爲運用的系統，其近似於生物的腦神經系統的特性，可用來處理在型態上類似、排序的問題。Kosko在1992年曾建議利用神經網路在模糊分析系統上的運用，也許這是另外一個研究方向，希望能從各種不同的學術領域來共同探討有關評量的問題，這些不同研究方向有助於探索更健全的評量模式。

參　考　書　目

Adlassning, K. P. (1986). Fuzzy set theory in medical diagnosis. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics,* SMC-16, 260-265.

Ajzen, I., & Fishbein, M. (1980). *Understanding attitudes and preducting social behavior.* Englewood cliff, NJ: Prentice-Hall.

Blin, J. M., & Whinston, A. B. (1973). Fuzzy sets and socal choice. *Journal of Cybernetics,* 3, 28-36.

Cao, N., & Chen, G. (1983). Some applications of fuzzy sets to meteorological forecasting. *Fuzzy Sets and Systems*, 9, 1-12.

Clymer, J. R., Corey, P. D., & Gardner, J. A. (1992). discrete event fuzzy airport control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 22(2), 343-351.

Dubois, D., & Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and application*. London: Academic Press.

Gevins, A. S., Veagar, C. L., Diamond, S. L., Spire, J., Zeitlin, G., & Gevins, A. (1975). Automated analysis of the electrical activity of the human brain (EEG). A progress report. *Proc. EEE.* 63, 1382-1399.

Helstrom, C. W. (1968). *Statistical theory of signal detection (2nd ed.).* New York: Pergamon.

Hendershot, G., & Placek, P. (Eds). (1981). *Predicting fertility. Lexington*, MA: Health & Co.

Klir, G. J., & Folger, T. A. (1988). *Fuzzy sets, uncertainty, and information*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Kosko, B. (1992). *Neural networks and fuzzy system.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Lakoff, G. (1973). Hedges: A study in meaning-criteria and the logic of fuzzy concepts. *Journal of Philosophical Logic*, 2, 458-508.

Negoita, C. V. (1985). *Expert systems and fuzzy systems.* London: Pergamon Press.

Newell, M., & Simon, H.A., (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Sanchez, E., Gouvernet, J., Bartolin, R., & Vovan, L. (1982). Linguistic approach in fuzzy logic of the WHO classifications of dyslipoproteinemias. In R. R. Yager (Ed.). *Fuzzy set and possibility theory* (pp. 582-588). Oxford, London: Pergamon Press.

Sanchez, E., & Gupta, M. M. (1983). *Fuzzy information, knowledge representation and decision analysis.* Oxford, London: Pergamon Press.

Zadeh, L. (1972). A fuzzy set-theoretic interpretation of linguistic hedges. *J. Cybern.* 2(3), 4-34.

Zadeh, L. (1985). Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its application to usuality and reasoning with dispositions. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, 754-765.

Zimmrmann, H. J. (1991). *Fuzzy set theory and its applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers.