理性預期下之貨幣政策與租稅政策之不確定性對均衡投資流量之影響——一個理論之引申

王　春　源*

（作者為本校經濟學系專任副教授）

摘　要

本文將 Gertler 與 Grinols (1982) 之理性預期的投資模型，加以引伸為更一般化，使吾人能同時來分析貨幣政策與租稅政策之不確定性對均衡投資流量之影響。

本文發現：1.降低平均稅率可很確定的提高均衡投資流量；而增加平均貨幣供給成長率，則未必如 Gertler 與 Grinols 原文所推論的，可提高均衡投資流量。2.若經濟體系內已存在有貨幣政策與租稅政策之不確定性，現在，若欲以更高之政策不確定性（即政策意外），來影響均衡投資水準，則其影響效果將愈加不明顯，此與理性預期學者如：Barro (1976)，Lucas (1975)，Sargent 與 Wallace (1973) 等人之論點相符合。

一、前　言

本文要將 Gertler 與 Grinols (1982) 之貨幣政策不確定性對均衡投資流量之影響的理論模型，加以引伸為更一般化，使吾人可同時來分析貨幣政策與租稅政策兩者之不確定性對均衡投資流量之影響。

* 作者要特別感謝政大應數系所蔡隆義教授，曾與筆者有過數學上之討論；另亦感謝論文評審所給予之評論。

以下第二節先列出吾人引伸後之更一般化的理論模型。第三節導出模型在效用極大化下之需求函數解。第四節計算模型之理性預期均衡解。第五節探討貨幣政策與租稅政策之不確定性，對均衡投資流量之影響效果。最後，爲結論。

二、引申後之更一般化的理論模型

首先，列出吾人對 Gertler—Grinols(1982) 模型，加以引伸後之更一般化的理論模型：

$$\underset{\{C,M,B,K,T\}}{\text{極大化}} E\int_0^\infty \text{U}\left[C(t),\left(\frac{M}{P}\right)(t),t\right]dt,$$

其中，

$$\text{U}\left[C(t),\left(\frac{M}{P}\right)(t),t\right]=\left[\alpha\ln C+(1-\alpha)\ln\left(\frac{M}{P}\right)\right]e^{-\rho t}$$

模型之限制條件爲：

$$W=\frac{M}{P}+\frac{B}{P}+K \tag{1}$$

$$dE=rKdt+Kde\ ;\ r>0,\ de\sim N(0,\sigma_e^2dt) \tag{2}$$

$$\frac{dP}{P}=\pi dt+dp\ ;\ dp\sim N(0,\sigma_p^2dt) \tag{3}$$

$$\frac{d\left(\frac{M}{P}\right)}{\left(\frac{M}{P}\right)}=(\sigma_p^2-\pi)dt-dp \text{ (註一)} \tag{4}$$

$$\frac{d\left(\frac{B}{P}\right)}{\left(\frac{B}{P}\right)}=(i+\sigma_p^2-\pi)dt-dp \text{ (註一)} \tag{5}$$

$$dV=\theta Wdt+Wds\ ;\ 0<\theta<1,\ ds\sim N(0,\sigma_s^2dt) \tag{6}$$

$$dT=\ell Kdt+Kdf\ ;\ 0<\ell<1,\ df\sim N(0,\sigma_f^2dt) \tag{7}$$

$$dW=d\left(\frac{M}{P}\right)+d\left(\frac{B}{P}\right)+dE+dV-Cdt-dT \tag{8}$$

$$W(0)=W_0 \tag{9}$$

$$dK=rKdt+Kde-Cdt-dT \tag{10}$$

模型假設代表性經濟個體之目標，是要追求其跨時性效用函數之預期值的極大。假定效用函數是消費 $C(t)$，實質貨幣餘額$\frac{M}{P}(t)$，與時間 t 之函數；並令此函數爲對數可相加之型式。其中，吾人採納 Fischer (1972) 之觀點，假定貨幣可降低交易成本，提高經濟個體之效用，故也將實質貨幣餘額$\frac{M}{P}$放進效用函數裏。效用函數之 β 代表時間折現率。假設經濟個體只使用資本K爲唯一之生產要素，來生產可供消費用或投資用之單一財貨；亦即，我們不考慮勞動市場，以便專注在均衡投資水準之決定問題上。模型共有10條限制條件，分別說明如下：

式(1)是經濟個體必須遵循之資產預算平衡限制式。它表示經濟個體之實質總財富W，應等於實質貨幣餘額$\frac{M}{P}$，實質公債餘額$\frac{B}{P}$，與實質資本存量K等之總和。

式(2)之生產函數，是依循 Lucas(1978)，Brock (1979)，以及 *Cox*，Ingersoll 與 Ross (1980) 等人之研究路線，將生產技術設定爲直線型。它表示產出流量 dE，是資本存量之隨機函數，其中 de 是一個呈常態獨立全等分配（$i.i.d.$）之隨機變數。式(2)假定在 dt 之時間區間內，產出流量之平均值 $rKdt$ 與隨機值 Kde，皆與資本存量成比例性關係。

式(3)爲價格水準之變動方程式，式中，πdt 是通貨膨脹率之平均值，dp 是一個呈常態 $i.i.d.$分配之隨機變數。

式(4)與(5)各表示實質貨幣餘額與實質公債餘額價值之變動。式(4)之貨幣的名目報酬率等於零，而式(5)之公債的名目報酬率則等於由市場所決定之利率 i。假定實質貨幣餘額與實質公債餘額之實質報酬率，皆依循 *Ito* 之隨機性微分法則而變動，此乃源自 Fischer (1975) 之觀念。Fischer 認爲，這兩種資產之實質價值，爲隨機性價格水準之非線型函數，故其預期實質報酬率，皆與通貨膨脹率之變異數成正向關係。

式(6)表示政府對經濟個體所支付之實質移轉所得 dV，與實質財富成比例性關係，式中 ds 是呈常態 $i.i.d.$ 分配之隨機變數。由於吾人假設政府執行一種隨機不確定性之貨幣供給政策與租稅政策，故移轉所得之實質價值亦呈隨機性。

式(7)爲政府之租稅變動方程式。值設在 dt 之時間區間內，租稅流量之平均值ℓKdt 與租稅之隨機項 Kdf，皆與資本存量成比例性關係。式中 df 是一個呈常態 $i.i.d.$ 分配之隨機變數。

式(8)是實質財富之變動方程式。式(9)是實質財富之初始價值。式(10)爲投資流量方程式，它等於產出流量減消費流量與租稅流量。

吾人所作之理論引伸，係將政府之租稅政策的不確定性，引進模型，其分別表現在式(7)，式(8)與式(10)。經此引伸後，吾人卽可同時來分析貨幣政策與租稅政策之不確定性，對均衡投資水準之影響效果。

三、在效用極大化下之需求函數解

應用 Merton (1969) 之解法來解此模型。首先，定義此極大化問題之間接效用函數爲：

$$J(W,t)=\underset{\{C,M,B,K,T\}}{M_{ax.}}\; E\int_0^\infty U\left[C(t),\frac{M}{P}(t),t\right]dt$$

受限於：

$$dW=\frac{M}{P}[(\sigma_p^2-\pi)dt-dp]+\frac{B}{P}[(i+\sigma_p^2-\pi)dt-dp]+[rKdt+Kde]$$
$$+[\theta Wdt+WdS]-Cdt-[\ell Kdt+Kdf] \qquad (11)$$

經由隨機動態最適化方法（見 Kamien 與 Schwartz (1981，pp. 246-247)，上面問題可寫爲：

$$O=M_{ax.}\left\{U\left[C(t),\frac{M}{P}(t),t\right]+J_W\left[-C+(\sigma_p^2-\pi)\frac{M}{P}+(i+\sigma_p^2-\pi)\frac{B}{P}+rK\right.\right.$$
$$\left.\left.+\theta W-\ell K\right]+\frac{1}{2}J_{WW}\left[-\left(\frac{M}{P}+\frac{B}{P}\right)dW+Kde+WdS-Kdf\right]^2\right\} \qquad (12)$$

或

$$O=M_{ax.}\left\{U\left[C(t),\frac{M}{P}(t),t\right]+J_W\left[-C+(\sigma_p^2-\pi)\left(\frac{M}{P}\right)+(i+{}_p^2-\pi)\left(W-K-\frac{M}{P}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+rK+\theta W-\ell K\right]+\frac{1}{2}J_{WW}[K(dp+de-df)+W(dS-dp)]^2\right\} \qquad (13)$$

上式對 C，$\frac{M}{P}$，與 K 之一階偏微分，得到：

$$O=U_C-J_W \qquad (14a)$$

$$O=U_{\frac{M}{P}}+J_W[\sigma_p^2-\pi-i-\sigma_p^2+\pi]=U_{\frac{M}{P}}-iJ_W \tag{14b}$$

$$O=J_W[-i-\sigma_p^2+\pi+r-\ell]+\frac{1}{2}J_{WW}[2K(dp+de-dp)^2$$
$$+2W(dp+de-df)(dS-dp) \tag{14c}$$

或

$$O=J_W[r-i-\sigma_p^2+\pi-\ell]+J_{WW}\{K[\sigma_p^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2+2(\sigma_{ep}-\sigma_{fe}-\sigma_{fp})]$$
$$+W[\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs}-\sigma_p^2-\sigma_{ep}+\sigma_{fp}]\} \tag{15}$$

式 (14a) 表示當實質消費之邊際效用等於實質財富之邊際效用時，可決定最適之消費水準。式 (14a) 與 (14b) 隱含在最適解下，實質消費對實質貨幣餘額之邊際替代率，應等於名目利率；或實質貨幣餘額之邊際效用與實質消費之邊際效用的比，應等於名目利率，亦卽：

$$\frac{U_{\frac{M}{P}}}{U_C}=i \tag{16}$$

此式也表示實質貨幣餘額之需求，跟名目利率成反向關係，此條件跟 Fama 與 Farber (1979) 之論點相同。亦卽，在名目利率既定下，經濟個體會選擇最適之消費與實質貨幣餘額水準；然後，再依照資產報酬偏好與風險態度，來將其他資產分派給資本與公債。另方面，由式 (14c) 或 (15) 可求解資本之需求函數爲：

$$K=-\frac{J_W}{J_{WW}}\left[\frac{r-\ell-\sigma_p^2+\pi-i}{\sigma_p^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2+2(\sigma_{pe}-\sigma_{fe}-\sigma_{fp})}\right]$$
$$-\left[\frac{\sigma_{ps}-\sigma_p^2+\sigma_{es}-\sigma_{ep}-\sigma_{fs}+\sigma_{fp}}{\sigma_p^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2+2(_{pe}-\sigma_{fe}-\sigma_{fp})}\right]W \tag{17}$$

式中，$-\frac{J_W}{J_{WW}}$是絕對風險趨避程度之倒數。最後，由實質財富限制式，實質貨幣餘額需求函數與式(17)，可隱含出實質公債餘額之需求函數。由於吾人假定租稅政策之平均值與隨機不確定性部分，皆與資本存量成正比例性關係，故式(17)另可隱含最適之租稅政策意義。

式(17)表示資本之需求函數，係決定於風險趨避程度，實質財富，與資本相對於公債之超額實質報酬率之分配。其中，資本超額實質報酬率之分配分括下面四項因素：

$(r-\ell-\sigma_p^2+\pi-i)$ ……………………………………………資本之平均超額報酬

$(\sigma_p^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2+2\sigma_{pe}-2\sigma_{fe}-2\sigma_{fp})$…………………………資本之超額報酬的共變異數

$(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs})W$ ………資本之超額報酬與移轉支付間之共變異數，乘以實質財富

$(-\sigma_p^2-\sigma_{ep}+\sigma_{fp})W$ …資本之超額報酬與通貨膨脹率間之共變異數，乘以實質財富

因此，本質上，資本需求係決定於通貨膨脹率，生產技術干擾，與租稅不確定性等因素之隨機分配上。

前面所設定之對數型效用函數，可讓吾人來求解經濟個體對消費，實質貨幣餘額，與資本之需求函數。首先，由間接效用函數 J，可求得：

$$J_W=-\left(\frac{1}{\rho W}\right)e^{-\rho t}\text{，}J_{WW}=\left(\frac{1}{\rho W^2}\right)e^{-\rho t} \tag{18}$$

故相對風險趨避程度等於 1 。將式(18)代入式(14)，可求到下面之需求函數：(註二)

$$C=\alpha\rho W \tag{19a}$$

$$\frac{M}{P}=\frac{1-\alpha}{i}\rho W \tag{19b}$$

$$K=\left[\frac{(r-\ell+\pi-i-\sigma_p^2)-(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{ep}-\sigma_{fs}+\sigma_{fp}-\sigma_p^2)}{\sigma_p^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2+2\sigma_{pe}-2\sigma_{fe}-2\sigma_{fp}}\right]W \tag{19c}$$

這三條需求函數皆爲財富之一階齊次函數。由於對數型效用函數之所得效果與替代效果可相互抵銷掉，故這隱含消費跟資產報酬分配間相互獨立。事實上，此模型之貨幣租稅政策之不確定性，將經由資產組合調整來產生實質效果，此近似 Tobin (1965) 模型之資產調整方式。

式 (19c) 表示資本需求跟資本之名目報酬率的變異數成反向關係，亦即，跟通貨膨脹率變異數 σ_p^2，與租稅不確定性變異數 σ_f^2 成反向關係。由此可知，貨幣供給成長率與租稅變動之不確定性，將降低經濟個體對資本之需求。(註三)

四、理性預期之市場均衡解

此模型之市場均衡條件可表示爲：

$$\frac{M}{P}=\frac{1-\alpha}{i}\rho W \text{（貨幣市場）} \tag{20a}$$

$$K=\left[\frac{(r-\ell+\pi-i)-(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs}-\sigma_{ep}+\sigma_{fp})}{\sigma_e^2+\sigma_p^2+\sigma_f^2+2\sigma_{ep}-2\sigma_{fe}-2\sigma_{fp}}\right]W \text{（資本市場）} \tag{20b}$$

$$W=\frac{M}{P}+K \text{（總實質財富預算限制式）} \tag{20c}$$

$$C=\alpha\rho W \text{（消費函數）} \tag{20d}$$

$$dK=rKdt+Kde-Cdt-dT \text{（投資函數）} \tag{20e}$$

式中公債未出現在均衡之總實質財富預算限制式內，這是因爲吾人假設所有經濟個體皆爲齊質，在最終均衡時，將握有零淨供給之公債。式(20e)表示均衡投資流量跟資本需求成正向關係，這與 Mussa (1976)，Tobin (1965，1969) 之總體模型觀點相同。唯本模型多考慮租稅不確定性對均衡投資流量之影響。

模型在每一個時點可決定$\frac{M}{P}$，i，W與C等內生變變數。這些內生變數是狀態變數K與M，以及預期之資產報酬率分配的函數。式(20e)之均衡投資流量會受均衡資本存量之影響，而均衡資本存量又將受貨幣供給成長率與租稅變動之影響。底下，假設貨幣供給成長率，呈現一種擴散過程 (diffusion process) 方式在變動：

$$\frac{dM}{M}=udt+dm \tag{21}$$

式中，udt 是貨幣供給的平均成長率，dm 是呈常態 $i.i.d.$ 分配之隨機變數，其平均數等於零，變異數等於 $\sigma_m^2 dt$。假設 dm 跟生產函數式(2)之隨機項 de 無關。

理性預期隱含經濟個體之主觀預期值等於客觀實現值。本模型之訊息集合包括所有之過去資料，當期之狀態變數值，模型之所有參數值，資本之實質報酬率，以及隨機變數 de，dm，dp，ds，與 df 等之平均值與變異數。在理性預期均衡下，經濟個體能將內生變數計算爲當期之狀態變數與模型參數之函數。

由於本模型假定狀態變數K與M之隨機過程，係遵循 Brownian motion 方式在變動，故狀態變數將僅決定於基本干擾項之變異數，而跟所有資產之報酬率的變異數與共變異數獨立無關。

依照 Lucas (1975,1978)，Barro (1976)，Brock (1979)，與 Fischer (1979) 等人之研究路線，吾人可將通貨膨脹率之理性預測 (rational forcast) 值視爲狀態變數之函數；亦卽，價格水準僅決定於當期之狀態變數與參數，並將通貨膨脹率定義爲均衡價格水準之變動率。(註四) 底下，吾人將用實質貨幣餘額猜測解之方式，來解此模型。由式(20-20c)，吾人可猜測實質貨幣餘額與資本存量間，具有比例性關係：

$$\frac{M}{P}=UK \quad 或 \quad \frac{M}{UK}=P \tag{22}$$

其中U跟狀態變數M與K間相互獨立。式(22)隱含價格水準P有一狀態依賴解。由式(20a)，(20c)，與(22)，可將係數U與名目利率作如下之聯結：(註五)

$$U=\frac{F(i)}{1-F(i)},\ 0<F(i)<1 \tag{23}$$

其中 $F(i)$ 是實質貨幣餘額佔總財富之比例$\frac{\frac{M}{P}}{W}$，等於式 (20a) 所示之$\frac{(1-\alpha)\rho}{i}$。

利用 *Ito* 之隨機微分法則，對式(22)微分，可得到通貨膨脹率爲：(註六)

$$\frac{dP}{P}=\frac{dM}{M}-\frac{dK}{K}+\frac{dK^2}{K^2}-\frac{dM}{M}\frac{dK}{K}+其他 \tag{24}$$

上式表示通貨膨脹率決定於貨幣成長率$\frac{dM}{M}$，資本存量成長率$\frac{dK}{K}$，資本存量變動過程之變異數$\frac{dK^2}{K^2}$以及貨幣成長率與資本存量成長率兩個隨機過程之相關關係$\frac{dM}{M}\frac{dK}{K}$。式(24)之變異數與共變異數項，是由 Jensen 不等式而來。

式(20)，(21)，(23)與(24)隱含通貨膨脹率等於：(註七)

$$\frac{dP}{P}=\left[u-(r-\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-\ell)\sigma_e^2+\sigma_f^2\right]dt+(dm-de+df) \tag{25}$$

其中，$(r-\frac{\alpha e}{1-F(i)}-\ell)dt+de-df$ 對應著資本存量變動率，$\sigma_e^2dt+\sigma_f^2dt$ 對應著 $\frac{dK^2}{K^2}$，$(udt+dm)$ 對應著 $\frac{dM}{M}$，而 $dMdK$ 則等於零（因模型假定 de，dm，與 df 間相互獨立無關）。對照式(25)與式(3)，可得到通貨膨脹率之平均值 π 與變異數 σ_p^2 分別等於：

$$\pi=u-\left(r-\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-\ell\right)+\sigma_e^2+\sigma_f^2 \tag{26a}$$

$$\sigma_p^2=\sigma_m^2+\sigma_e^2+\sigma_f^2 \tag{26b}$$

因此，通貨膨脹率之理性預期平均值是決定於貨幣平均成長率，產出平均成長率，課稅平均值，消費資本比例$\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}$，產出流量變異數與課稅變異數等；其變異數是決定於貨幣成長率，產出成長率，與課稅變動等之變異數上。此外，吾人尙可導出式（20b）之資本的實質報酬率與通貨膨脹率間之預期共變異數 σ_{ep} ，以及資本超額報酬率與實質移轉支出間之共變異數 $\sigma_{es}+\sigma_{ps}-_{fs}$：（註八）

$$\sigma_{ep}=-\sigma_e^2 \tag{27}$$

$$\sigma_{es}+\sigma_{ps}-\sigma_{fs}=\sigma_m^2F(i) \tag{28}$$

式（28）之共變異數跟 σ_m^2 成比例性關係，乃因資本之超額報酬率與實質移轉支出，皆與貨幣成長率成正向關係所致。

將式(26)，(27)，與(28)代進資本市場均衡條件(20b)，並代預算限制條件(20c)，可求得名目利率解之約縮式為：（註九）

$$i=\frac{1}{2}\left\{\left[\rho+(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\right]+\sqrt{[\rho+(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)]^2-4(1-\alpha)\rho(u-\sigma_m^2)-\sigma_f^2}\right\} \tag{29}$$

如吾人所猜測的，名目利率爲模型參數之確定函數，跟狀態變數獨立無關。於此，吾人可將式(29)代進(26)－(28)，以求算各市場預測之約縮式。此外，將式(29)代進式(23)，可求出實質貨幣餘額佔總實質財富之比例係數解U。如同在(22)式所做之猜測，此實質貨幣餘額解，跟狀態變數獨立無關，這是理性預期模型均衡解之特性。

五、貨幣政策與租稅政策之不確定性對均衡投資流量之影響

本節我們要推論貨幣成長率與租稅變動之平均值與變異數之變動，對均衡投資流量之影響。底下，首先列出上一節所導出之模型的理性預測均衡方程式。利用式(26)，(27)，(28)，與（註８）到式(20)，得到：

$$\frac{M}{P}=\frac{1-\alpha}{i}\rho W=F(i)\left(\frac{M}{P}+K\right)，0<F(i)<1，（貨幣市場）\qquad(30)$$

$$K=\left[\frac{(r-\ell+\pi-i)-(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs}-\sigma_{ep}+\sigma_{fp}}{\sigma_e^2+\sigma_p^2+{}_f^2+2\sigma_{ep}-2\sigma_{fe}-2\sigma_{fp}}\right]W$$

$$=\left[\frac{(r-\ell+\pi-i)-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2-{}_e^2}{\sigma_m^2}\right]\left(\frac{M}{P}\right)+K$$

$$=\phi(i,\pi)\left(\frac{M}{P}+K\right)，0<\phi<1，（資本市場）\qquad(31)$$

$$\pi=u-\left(r-\ell-\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}\right)+\sigma_e^2，（預期通貨膨脹率）\qquad(32)$$

$$\overline{dK}=E(dK)=E(rKdt+Kde-dT-cdt)$$

$$=rKE(dt)+KE(de)-\ell KE(dt)-KE(df)-CE(dt)$$

$$=rK+0-\ell K-0-C$$

$$=(r-\ell)K-\alpha e\left(\frac{M}{P}+K\right)，（均衡投資平均流量）\qquad(33)$$

式中，$F(i)$ 與 $\phi(i,\pi)$ 分別代表實質貨幣餘額與資本佔總實質財富之比例，其加總和等於 1。由於 $\overline{dK}$ 跟消費具反向關係，故 $\overline{dK}$ 與實質貨幣餘額之均衡水準，亦具反向關係。將式(32)代進式(31)，然後，就 $\overline{dK}$ 對 ℓ，σ_f^2，u 與 σ_m^2 等偏微分，可得到租稅變動與貨幣成長率之平均值與變異數之變動對均衡投資流量之影響效果：（註一〇）

$$\frac{\partial\overline{dK}}{\partial\ell}=-\frac{(r-i+\pi-\ell)-\sigma_m^2F(i)-\sigma_f^2-\sigma_e^2}{\sigma_m^2}\cdot\frac{M}{PF(i)}$$

$$=-\phi(i,\pi)\frac{M}{PF(i)}<0，0<\phi(i,\pi)<1\qquad(34)$$

$$\frac{\partial\overline{dK}}{\partial\sigma_f^2}=\frac{1}{\sigma_m^2PF(i)}\left\{M(r-\ell)\left(-\frac{\partial i}{\partial\sigma_f^2}+\frac{\alpha\rho\frac{\partial F}{\partial i}}{(1-F(i))^2}\frac{\partial i}{\partial\sigma_f^2}-\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial\sigma_f^2}-1\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma_m^2F(i)}(r-\ell)\phi M\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial\sigma_f^2}\right\}+\frac{\alpha\rho M}{PF^2(i)}\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial\sigma_f^2}\qquad(35)$$

$$\frac{\partial\overline{dK}}{\partial u}=\frac{1}{\sigma_m^2PF(i)}\left\{M(r-\ell)\left(1-\frac{\partial i}{\partial u}+\frac{\alpha\rho\frac{\partial F}{\partial i}}{(1-F(i))^2}\frac{\partial i}{\partial u}-\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sigma_m^2F(i)}(r-\ell)\phi M\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial u}\right\}+\frac{\alpha\rho M}{PF^2(i)}\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial u}\qquad(36)$$

$$\frac{\partial \overline{dK}}{\partial \sigma_m^2}=\frac{1}{\sigma_m^2 PF(i)}\left\{M(r-\ell)\left(-\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2}+\frac{\alpha\rho\frac{\partial F}{\partial i}}{(1-F(i))^2}\cdot\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2}-\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\cdot\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2}-F(i)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sigma_m^2 F(i)}(r-\ell)\phi M\left(F(i)+\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2}\right)\right\}+\frac{1}{PF^2(i)}\alpha\rho M\frac{\partial F}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2} \quad (37)$$

其中，

$$i=\frac{1}{2}[\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2]+\frac{1}{2}\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)^2-4(1-\alpha)\rho(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial i}{\partial u}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)^2-4(1-\alpha)\rho(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)-2(1-\alpha)\rho\right\} \quad (38)$$

$$\frac{\partial i}{\partial \sigma_m^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)^2-4(1-\alpha)\rho(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)-2(1-\alpha)\rho\right\} \quad (39)$$

$$\frac{\partial i}{\partial \sigma_f^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_m^2-\sigma_f^2)^2-4(1-\alpha)\rho(u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left\{(\rho+u-\sigma_m^2-\sigma_f^2)-2(1-\alpha)\rho\right\} \quad (40)$$

由上面之偏微分結果知，降低平均稅率可很確定的提高均衡投資流量，如式(34)所示；而增加平均貨幣供給成長率則未必可提高均衡投資流量，如式(36)所示；這是因爲增加平均貨幣供給成長率，會造成市場之均衡名目利率可漲可降，如式(38)所示；假設名目利率上漲，其一方面將使經濟個體之實質貨幣餘額握有量下降，另方面，將使均衡資本存量下降，前者有利於均衡投資流量之增加，後者則不利於均衡投資流量之增加，故最終所導致之均衡投資流量是升是降，須視此兩種相反力量孰大而定，此亦可由市場均衡條件式(30)與(31)看出。此發現跟 Gertler 與 Grinols (1982) 所主張之增加平均貨幣成長率，一定可使均衡投資流量增加之論點，有很大之不同。租稅變動與貨幣供給成長率之不確定性對均衡投資流量之影響方向並不確定，如式(35)與(37)所示。這是因爲 σ_f^2 與 σ_m^2 不確定性的升高，對市場之均衡名目利率的影響方向，可正可負，如式(39)與(40)所示；假設名目利率下降，其一方面將使經

濟個體之實質貨幣餘額握有量增加，另方面，將使均衡資本存量增加，前者不利於均衡投資流量之增加，後者則有利於均衡投資流量之增加，故最終是否會導致均衡投資流量之增加，須視此兩種相反力量孰大而定，這同樣可由市場均衡條件式(30)與(31)看出。唯須特別注意的是，若前提之貨幣政策與租稅政策不確定性原已存在，此時，若再欲以高更之政策不確定性（即政策意外）來影響均衡投資水準，則其影響效果將愈加不顯，蓋式(35)與(37)之分母皆存在有一共同項 σ_m^2，此發現乃跟 Barro (1976)，Lucas (1975)，Sargent 與 Wallace (1973) 等理性預期學者之論點相一致。

六、結　　論

本文已將 Gertler 與 Grinols (1982) 之模型，加以引伸爲更一般化，使吾人能同時來探討貨幣供給成長率政策與租稅政策在理性預期均衡下對均衡投資流量之影響。

吾人除了做理論模型引伸外，尙獲致如下之兩點主要發現：1.降低平均稅率可很明確的提高均衡投資流量；而增加平均貨幣供給成長率，則未必如 Gertler 與 Grinols 原文所主張的，一定可提高均衡投資流量，蓋因增加平均貨幣供給成長率所導致之市場均衡名目利率的變動，會產生兩種相反力量來影響均衡投資流量，一是透過總實質財富均衡預算限制式之資產組合的調整，另一是透過均衡資本存量水準的變動；這兩種調整力量對均衡投資水準之影響方向相反。2.同樣的推理，租稅變動與貨幣供給成長率之不確定性對均衡投資流量之影響方向，亦不確定；唯若此政策不確定性原已存在，現若欲以更高之政策不確定性（即製造更高之政策意外）來影響均衡投資水準，則其影響效果必將下降，這與理性預期學者，如：Barro (1976)，Lucas (1975)，Sargent 與 Wallace (1973) 等人之論點相符合。

附　　註

註　一：Ito's 微分法則爲：

若　$X=\frac{Q}{P}$ 及 $\frac{dQ}{Q}=adt+bdz$

$$\frac{dP}{P}=cdt+edz$$

則　$\frac{dX}{X}=(a+e^2-c)dt-edz$

運用此公式，假設

$$X_1=\frac{M}{P}$$

$$X_2=\frac{B}{P}$$

$$\frac{dM}{M}=odt$$

$$\frac{dB}{B}=idt$$

$$\frac{dP}{P}=\pi dt+dp$$

則可求得：

$$\frac{dX_1}{X_1}=\frac{d\frac{M}{P}}{\frac{M}{P}}=(o+\sigma_p^2-\pi)dt-dp$$

$$\frac{dX_2}{X_2}=\frac{d\frac{B}{P}}{\frac{B}{P}}=(i+\sigma_p^2-\pi)dt-dp$$

註　二：效用函數 $U=e^{-\rho t}\left[\alpha\ln c+(1-\alpha)\ln\frac{M}{P}\right]$

故　$U_c=e^{-\rho t}\frac{\alpha}{c},\ \ U_{\frac{M}{P}}=e^{-\rho t}\frac{1-\alpha}{\frac{M}{P}}$

將 U_c 與 $U_{\frac{M}{P}}$ 代進(14*a*)，得到：

$$e^{-\rho t}\frac{\alpha}{c}=e^{-\rho t}\left(\frac{1}{\rho W}\right)$$

故　$C=\alpha\rho W$

將 U_c 與 $U_{\frac{M}{P}}$ 代進(14*b*)，得到：

$$e^{-\rho t}\frac{1-\alpha}{\frac{M}{P}}=ie^{-\rho t}\frac{1}{\rho W}$$

故　$\frac{M}{P}=\frac{1-\alpha}{i}\rho W$

又因　$-\frac{J_w}{J_{ww}W}=-\frac{-\left(\frac{1}{\rho W}\right)e^{-\rho t}}{\left(\frac{1}{\rho W^2}\right)e^{-\rho t}W}=1,$

將此結果代進式(14c)，即可得到(19c)。

註　三：由(19c)亦可看出，資本需求跟 $(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs})$ 成反向關係；其中 $(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs})$ 表示移轉支出與資本之淨報酬率的共變異數。在正文後面之式(26b) 與 (28)可看到，通貨膨脹率變異數 σ_p^2 與 $(\sigma_{ps}+\sigma_{es}-\sigma_{fs})$ 皆跟貨幣供給成長率變異數 σ_m^2 成正向關係，故此推論成立。

註　四：這種研究路線相當於在確定性模型中選擇一條馬鞍線 (Saddle path)。 在本模型中， 決定於狀態變數之解是唯一穩定解， 所有其他解皆屬於不穩定之隨機微分方程式。 此觀念常在隨機性之資產定價模型文獻上被使用到，例如：Lucas(1978) 與 Brock(1979)。

註　五：因吾人猜測$\frac{M}{P}=UK$

故　$U=\frac{M}{PK}$

$=\left[\frac{(1-\alpha)}{i}\rho\right]W\frac{1}{K}$

$=\frac{\frac{(1-\alpha)\rho}{i}W}{\left(W-\frac{M}{P}\right)}$

$=\frac{\frac{(1-\alpha)\rho}{i}}{1-\frac{(1-\alpha)\rho W}{iW}}$

$=\frac{F(i)}{1-F(i)},\ o<F(i)<1$

註　六：利用 *Ito* 之隨機微分法則：

$P=\frac{M}{UK}$

$dP=\frac{dM}{UK}-\frac{M}{(UK)^2}dUK+\frac{M}{(UK)^3}(dUK)^2-\frac{dMdUK}{(UK)^2}+$其他

故　$\frac{dP}{P}=\frac{dM}{M}-\frac{dK}{K}+\frac{dK^2}{K^2}-\frac{dMdK}{MK}+$其他

註　七：$\frac{dP}{P}=\frac{dM}{M}-\frac{dK}{K}+\frac{dK^2}{K^2}-\frac{dM}{M}\frac{dK}{K}+$其他

$=(\mu dt+dm)-(rdt+de-\frac{C}{K}dt-\frac{1}{K}dT)+(\sigma_e^2+\sigma_f^2)dt-o+$其他

$=\left[\mu-(r-\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-\ell)+\sigma_e^2+\sigma_f^2\right]dt+(dm-de+df)$

註　八：因模型假設 $df\cdot de=o,\ dm\cdot de=o,\ dm\cdot df=o$

故　$\sigma_{ep}=de\cdot dp=de\cdot(dm-de+df)=-\sigma_e^2$

$\sigma_{fp}=df\cdot dp=df\cdot(dm-de+df)=\sigma_f^2$

$\sigma_{ep}-\sigma_{fp}=\sigma_e^2-\sigma_f^2$

假設實質移轉所得之變動，決定於貨幣供給法則與物價水準，

即　$dV=\frac{dM}{P}$，其可進一步化爲：

$dV=\frac{dM}{M}\cdot\frac{M}{P}$

$=(\mu dt+dm)\frac{M}{P}$

$=(udt+dm)\frac{M}{P}$

$=u\left[\frac{(1-\alpha)\rho W}{i}\right]dt+\left[\frac{(1-\alpha)\rho W}{i}\right]dm$

$=\mu F(i)Wdt+F(i)Wdm$

對照上式與式 (6)，得到 $dS=F(i)dm$

故 $\sigma_{es}=dS\cdot de=F(i)dm\cdot de=0$

$\sigma_{fs}=dS\cdot df=F(i)dm\cdot df=0$

$\sigma_{ps}=dp\cdot dS=(dm-de+df)F(i)dm=\sigma_m^2F(i)$

由上可求得：

$$\sigma_{es}+\sigma_{ps}-\sigma_{fs}=\sigma_m^2F(i)$$

註 九：因 $\varnothing=\frac{K}{W},\ F=\frac{\frac{M}{P}}{W}$

故 $\varnothing+F=1$

亦即：$\frac{r-\ell+\pi-i-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2-\sigma_e^2}{\sigma_m^2}+\frac{(1-\alpha)\rho}{i}=1$

將 $F(i)=\frac{(1-\alpha)\rho}{i}$ 代進上式，經化簡，得到：

$$i=\pi+r-\ell-\sigma_e^2-\sigma_m^2-\rho_f^2$$

再將(26a)之 π 代進上式，得到：

$$i=\mu-\left[r-\ell-\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}\right]+\sigma_e^2+r-\ell-\sigma_e^2-\sigma_m^2-\sigma_f^2$$

$$=\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2+\frac{\alpha\rho}{1-\frac{(1-\alpha)\rho}{i}}$$

經重新整理：

$$i^2-(\rho+\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2)i+(1-\alpha)\rho(\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2)=0$$

所以，

$$i=\frac{1}{2}\{(\rho+\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2)\pm\sqrt{(\rho+\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2)^2-4(1-\alpha)\rho(\mu-\sigma_m^2-\sigma_f^2)}\}$$

取正名目利率解。

註一〇：因 $\frac{M}{P}=F(i)(\frac{M}{P}+K)$

亦即 $\frac{M}{P}+K=\frac{\frac{M}{P}}{F(i)}$

將式(32)與上式，代進式(31)：

$$K=\frac{r-\ell+\mu-r+\ell+\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}+\sigma_e^2-i-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2-\sigma_e^2}{\sigma_m^2}\frac{M}{PF(i)}$$

$$=\left[\frac{\mu-i+\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2}{\sigma_m^2}\right]\frac{M}{PF(i)}$$

再將上式代進式(33)：

$$\overline{dK}=(r-\ell)K-\alpha\rho(\frac{M}{P}+K)$$

$$=\left[(r-\ell)\frac{\mu-i+\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2}{\sigma_m^2}-\alpha\rho\right]\frac{M}{PF(i)}$$

對上式全微分：

$$d\,\overline{dK}=\frac{1}{\sigma_m^2 PF(i)}\Big\{(r-\ell)\phi dM+M\phi(dr-d\ell)+M(r-\ell)\,(d\mu-di$$
$$+\frac{(1-F(i))(d\alpha+d\rho)+\alpha\rho\frac{\partial F}{\partial i}di}{(1-F(i))^2}-\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}di-F(i)d\sigma_m^2-d\sigma_f^2)$$
$$-\frac{1}{\sigma_m^2 PF(i)}(r-\ell)\phi M(PF(i)d\sigma_m^2+P\sigma_m^2\frac{\partial F}{\partial i}di+\sigma_m^2 F(i)dP)\Big\}$$
$$-\frac{1}{PF(i)}\Big\{\alpha\rho dM+\alpha Md\rho+\rho Md\alpha-\frac{1}{PF(i)}\alpha\rho M(P\frac{\partial F}{\partial i}di+F(i)\alpha\rho)\Big\}$$

其中 $\varnothing=\mu-i+\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2$，同式(31)所定義之$\phi$。

由上可求得：

$$\frac{\partial\,\overline{dK}}{\partial\ell}=-\frac{\mu-i+\frac{\alpha\rho}{1-F(i)}-F(i)\sigma_m^2-\sigma_f^2}{\sigma_m^2}\cdot\frac{M}{PF(i)}$$
$$=-\phi(i,\pi)\frac{M}{PF(i)}<0,\ 0<\phi(i,\pi)<1$$

以及 $\frac{\partial\,\overline{dK}}{\partial\sigma_f^2}$，$\frac{\partial\,\overline{dK}}{\partial\mu}$，與$\frac{\partial\,\overline{dK}}{\partial\sigma_m^2}$。

參 考 文 獻

1. Barro, R., 1976, Rational expectations and the role of monetary policy, *Journal of Monetary Economics* 2, no. 1, Jan.
2. Brock, W., 1974, Money and growth: The case of long-run perfect foresight, *International Economic Review*, Oct. 750-777.
3. Brock, W., 1979, Asset prices in a production economy, no.275 (Institute of Technology, CA),, Mimeo.
4. Cox, J., J. Ingersoll and S, Ross, 1980, The term structure of interest rates, Mimeo.
5. Fama, E. and A. Farber, 1979, Money, bonds and foreign exchange, *American Economic Review*, Sept.
6. Feldstein, 1980, Inflation, tax rules and the stock market, *Journal of Monetary Economics* 6, no. 3, Oct.
7. Fischer, S., 1972, Money, income, wealth and welfare, *Journal of Economic Theory*, April.
8. Fischer, S., 1975, The demand for index bonds, *Journal of Political Economy*, 83, no. 3.
9. Fisher, S., 1979, Capital accumulation on the transition path in a monetary optimizing model, *Econometrica* 47, NoV., 1433-1441.
10. Kamien, M.I. and N.L. Schwartz, 1981, *Dynamic Optimization*, N.Y.: North-Holland.
11. Gertler M. and E. Grinols, 1982, Monetary randomness and investment, *Journal of Monetary Economics* 10, 259-271.
12. Lucas, R.E., 1972, Expectations and the neutrality of money, *Journal of Economic Theory* 4, 103-124.

13. Lucas, R.E., 1975, An Equilibrium model of the business cycle, *Journal of Political Economy*, Dec.
14. Lucas, R.E., 1976, Econometric policy evaluation: A critique, in: K. Brunner and A. Meltzer, esd., *The Phillips curve and labor murkets* (North-Holland, Amsterdam).
15. Lucas, R.E., 1978, Asset prices in a production economy, *Econometrica* 46, 1429-1445.
16. Mussa, M., 1976, *A study in macroeconomics* (North-Holland, Amesterdam).
17. Merton, R.C., 1969, Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case, *Review of Economics and Statistics*, Aug.
18. Sargent J.T. and N. Wallace, 1975, "Rational" expectations, the optimal monetary instrument, and the optimal money supply rule, *Journal of Poeitcal Economy* 83, no. 2.
19. Shiller, R.J., 1978, Rational expectations and the dynamic structure of macroeconomic models, *Journal of Monetary Economics* 4, Jan., 1-44.
20. Sidrauski, M., 1967, Rational choice and patterns of growth in a monetary economy, *American Economic Review*, Papers and Proceedings.
21. Tobin, J., 1965, *Money and Economic Growth, Econometrica*, Oct.
22. Tobin, J., 1969, A general equilibrium approach to monetary theory, *Journal of Money, Gedit and Banking*, Feb.