

考試科目	線性代數	所別	應數	考試時間	五月 24 日 上午第一節 星期六
國立政治大學圖書館					
<p>一.</p> <p>10% (1) 設 $A: n \times p, B: p \times n, \lambda \neq 0$. 證明: λ 是 AB 的特徵值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是 BA 的特徵值.</p> <p>10% (2) 設 $A \geq 0, B > 0$ 都是 $n \times n$ 矩陣. 證明: $\lambda \neq 0$ 是 $B^{-1}A$ 的特徵值 $\Rightarrow \lambda > 0$.</p> <p>二. 設 A, B 都是 $n \times n$ 矩陣. 10% 證明: A, B 可同時對角化 (simultaneously diagonalizable) $\Rightarrow AB = BA$. 又逆敘述是否成立? 說明理由.</p> <p>三. 設 V, W 是向量空間, $\dim(V) < \infty$, 15% $T: V \rightarrow W$ 是線性變換 (linear transformation). 證明: $\dim(V) = \text{nullity}(T) + \text{rank}(T)$.</p> <p>四. 設 V 是有限維的內積空間, T 是 20% V 上的線性算子 (linear operator). 證明: $\forall x, y \in V, \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ $\Leftrightarrow \forall x \in V, \ T(x)\ = \ x\$.</p>					
備考	試題隨卷繳交				
命題委員:	-155-	(簽章) 92 年 5 月 12 日			

命題紙使用說明: 1. 試題將用原件印製, 敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字 (紅色不能製版請勿使用)。
2. 書寫時請勿超出格外, 以免印製不清。
3. 試題由郵寄遞者請以掛號寄出, 以免遺失而示慎重。

考試科目	線性代數	所別	應數	考試時間	五月 24 日 上午 第一節 星期六 下午
------	------	----	----	------	--------------------------

國立政治大學圖書館

20% 五. 設 $A = (a_{ij}) : n \times n$ 是複數元矩陣.

$$\text{令 } \rho_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$r_i = \rho_i(A) - |a_{ii}|$$

$$C_i = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - a_{ii}| \leq r_i\}, i=1, 2, \dots, n.$$

證明: 任一 A 的特徵值必在某 C_i 中.

六. 令

15%

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

找出 A 的 Jordan canonical form.

備 考	試 題 隨 卷 繳 交
命 題 委 員 :	-156- (簽章) 92 年 5 月 12 日

命題紙使用說明: 1. 試題將用原件印製, 敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字 (紅色不能製版請勿使用)。
2. 書寫時請勿超出格外, 以免印製不清。
3. 試題由郵寄遞者請以掛號寄出, 以免遺失而示慎重。

考試科目	分析概論	所別	應數所	考試時間	五月十四日 星期六	第 1 節
------	------	----	-----	------	--------------	-------

國立政治大學圖書館

I. Prove or disprove the following statements:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p dx = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx$ if $p > -1$. (10%)

2. For $u \in L^p(0, 1)$ define $\|u\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |u(x)|^p dx}$; suppose that $f_n, g_n \in L^2(0, 1) \forall n \in \mathbb{N}$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_2$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) g_n(x) dx = \int_0^1 f(x) g(x) dx. \quad (10\%)$$

II. In a metric space (X, d) let A be a nonempty subset of X . For each x in X define

$$f_A(x) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}.$$

Prove the following results:

3. f_A is uniformly continuous. (10%)

4. The closure of A , $\overline{A} = \{x \in X : f_A(x) = 0\}$. (10%)

III. Suppose that $u_{n+1}(t) = 1 + 2 \int_0^t r u_n(r)^2 dr$ for all $n \in \mathbb{N}$.

5. Compute the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{0.5} u_n(t) dt$. (10%)

6. Prove that there exists a positive constant T such $u_n(t)$ converges to a continuous function $u(t)$ in $[0, T)$. (10%)

IV. Define $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Prove or disprove the statements:

7. The partial derivatives $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ and $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ exist for every (x, y) in \mathbb{R}^2 . (10%)

8. f is differentiable at $(0, 0)$. (10%)

備	考	試	題	隨	卷	繳	交
---	---	---	---	---	---	---	---

命題委員：	-157-	(簽章)	92年5月6日
-------	-------	------	---------

命題紙使用說明：1. 試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
2. 書寫時請勿超出格外，以免印製不清。
3. 試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。

考試科目	分析概論	所別	政研所	考試時間	五月十四日上午第 1 節 星期六
------	------	----	-----	------	---------------------

國立政治大學圖書館

V. Let f be defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

9. Is f of bounded variation in $[-1, 1]$? (10%)

VI. For each function g in $L^q(0, 1)$, $q > 1$ define F in $L^{\frac{q}{q-1}}(0, 1)$ by

$$F(f) = \int_0^1 fg(x) dx,$$

10. Show that F is a bounded linear functional and $\|F\| = \|f\|_q$.

備考	試題隨卷繳交
命題委員：	-158- (簽章) 92年5月6日

命題紙使用說明：1. 試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
2. 書寫時請勿超出格外，以免印製不清。
3. 試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。