

考試科目	微積分(-)	系別	應用數學系	考試時間	月 日 上午第 節
------	--------	----	-------	------	-----------

一、設 $f(x) = ax^2 + bx$ ，若極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 存在時，試問 $a = ?$ $b = ?$ (8%)

二、試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) = ?$ (7%)

三、設 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{當 } x < 3 \text{ 時} \\ 2mx, & \text{當 } x \geq 3 \text{ 時} \end{cases}$

假定 f 在 $x=3$ 處是連續的，試問 $m = ?$ (8%)

四、(i) 何謂“均值定理”，請敘述之，但不必證明。 (7%)

(ii) 請你用兩種方法證明“若 $x > 0$ 時， $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ ” (10%)
(但 $\ln x$ 表以 e 為底之自然對數)

五、設 $f(x) = \ln(1+x)$ ，

(i) 試求函數 f 在原點 $x=0$ 處所衍生的泰勒(Taylor)級數？ (5%)

(ii) 試求函數 f 在原點 $x=0$ 處所衍生的 n 次泰勒多項式 $P_n(x)$ 及其餘項 $R_{n+1}(x)$ 。 (6%)

(iii) 試問 f 在原點 $x=0$ 處所衍生的泰勒級數是否在其收斂區間內收斂於 $f(x)$ ？ (9%)

六、(i) 設 $z = f(x, y) = \frac{f(\frac{x}{y})}{y}$ ，試求 $y \cdot f_y + x \cdot f_x + z = ?$ (5%)

(ii) 設 $z = f(x^2 + y^2)$ ，試求 $x \cdot f_y - y \cdot f_x = ?$ (5%)

七、設通過曲線 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 上之某所引切綫，被座標軸所截之部分的長為 l 。試在曲線上求使 l 為最小之切某座標及 l 之長 (15%)

八、試求函數 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在限制條件 $x - y + z = 1$ 之下，於何某處有最小值，並求最小值。 (15%)

考試科目	微積分(二)	系別	應用數學系	考試時間	7月10日 上午第 節
------	--------	----	-------	------	-------------

一、試計算下列各積分：

(i). $\int_0^1 x^2(1-x)^n dx = ?$ (8%) (ii). $\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos x dx = ?$ (8%)

二、設常數 $a > 0$, 若函數 $f: [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ 是連續函數。

(i). 試證 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ (6%)

(ii) 試應用 (i) 題結果, 求 $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx = ?$ (8%)

三

(i) 試敘述 "微積分基本定理" (不需證明) (5%)

(ii) 設函數 $F(x) = \int_x^{x+2} (2-t^2) dt$, 試求函數 F 於何處有極大值? (10%)

四

(i). 試繪出函數 $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ 的概略圖形。 (5%)

(ii). 試求此函數 f 之圖形與 x 軸所圍成封閉區域之面積。 (10%)

五

設 λ 表正常數, 且 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{當 } x > 0 \text{ 時,} \\ 0, & \text{當 } x \leq 0 \text{ 時.} \end{cases}$

試求 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = ?$ (10%)

六

設 R 表由曲線 $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ 及直線 $y = 2$ 所圍成區域, (15%)

若將此區域 R 繞直線 $y = -2$ 週轉一周所成之體的體積為何?

七

設 R 表由兩座標軸、曲線 $y = 1 + x^2$ 及直線 $y = 7 - x$ 所圍成封閉區域, (i) 試求 R 之面積, (15%)

(ii) 試求 $\iint_R f(x, y) dA$, 但 $f(x, y) = x + 2y$.