國立政治大學九十八學年度研究所博碩士班入學考試命題紙

考試科目	微積分	所別	數學系數學碩士在職專班	考試時間	3月14日 星期六 第3節

1. (20%) Evaluate the following integrals.

   (a) $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\, dxdy$

2. (20%) Let $f(x)$ be a continuous function on the real line.

   (a) Show that $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

   (b) Suppose that $f(x)$ satisfies

   $$\int_{x^2}^{e^x} f(t)\,dt = x.$$

   What is the value of $f(x)$ at $x = 1$?

3. (20%) Evaluate the following limits if exists.

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

4. (20%) Let $a_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le k$, be k distinct points and

   $$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \|x - a_i\|^2, x \in \mathbb{R}^n,$$

   where $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm of $\mathbb{R}^n$. Does $f(x)$ have a minimum at some point of $\mathbb{R}^n$?

5. (20%) Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are continuous functions on the real line. Show that the composition $f \circ g(x)$ is also continuous.

備考	試題隨卷繳交
命題委員：	（簽章）

命題紙使用說明：1.試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
2.書寫時請勿超出格外，以免印製不清。
3.試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。

國立政治大學九十八學年度研究所博碩士班入學考試命題紙

考試科目	線性代數	所別	數學教學碩士專班	考試時間	3月14日 星期六 第四節

1. (20%) Let $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation. Show that there exists real numbers $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, such that $T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z)$.

2. (20%) Let

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Find the Jordan canonical form J for A, and an invertible matrix P such that

$$J = P^{-1}AP.$$

3. (20%) Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Let $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

(a) Find a basis for the range of L_A.

(b) Find a basis for the null space of L_A.

4. (20%) Let V and W be subspaces of a finite-dimensional vector space over a field $\mathbb{F}$. Show that

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim V \cap W.$$

5. (20%) Let V and W be vector spaces over a field $\mathbb{F}$. Let $T: V \to W$ be a linear transformation. Show that T is an isomorphism if and only if T is one-to-one and onto.

備考	試題隨卷繳交

命題委員：　　　　　　　　　　　　（簽章）

命題紙使用說明：1.試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
2.書寫時請勿超出格外，以免印製不清。
3.試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。