

國立政治大學經濟學系研究所

碩士學位論文

以 Noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian Component

分析台灣股價指數

Apply Noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian Component
to Taiwan Stock Price Index

指導教授：徐士勛 博士

研究生：溫元駿 撰

中華民國一百零六年六月

謝辭

感謝許多老師、同學以及親友在撰寫論文的期間給予我的支持與幫助，讓我能順利的完成這份論文。首先特別感謝徐士勛老師在論文研究方法以及論文的撰寫給予我莫大的指導與幫助，接著，我要感謝同為徐士勛老師指導學生的紹傑、妍之以及冠麟，不論是研究方法及議題的相互討論，或是老師所交辦的助教業務，透過與你們的合作及相互幫助讓我有有了很大的成長，最後感謝嘉純以及我的家人，在這過程中對我的支持以及鼓勵，使我儘管受挫仍有不斷向前的動力。



溫元駿 謹誌於

國立政治大學經濟學系研究所

中華民國一百零六年六月

摘要

過去實證研究多以時間序列模型搭配 GARCH 模型針對台灣股價指數進行分析。然而，Gourieroux and Zakoian(2017) 提出，當一時間序列具有泡沫現象時，noncausal Cauchy AR(1) process 是可能的優選模型。此外，Sarno and Taylor(1999) 的研究認為，台灣股價指數具有泡沫現象，故我們以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 分析台灣股價指數，進而判斷其泡沫效果係來自 noncausal linear process 之 local explosive，並根據 noncausal Cauchy AR(1) 與 Gaussian component 之係數變動，捕捉泡沫效果之形成與來源。

關鍵詞: 台灣股價指數、泡沫效果、Noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component

Abstract

Most of the previous studies focused on analyzing Taiwan Stock Price Index using time series models with GARCH effects. However, Gouriéroux and Zakoian (2017) have demonstrated that noncausal Cauchy AR(1) process may be a possible model in which the bubbles are observed. Besides, according to the studies of Sarno and Taylor (1991), some bubbles exactly existed in Taiwan Stock Price Index before 1990. Accordingly, this study aims at investigating the possible bubbles in Taiwan Stock Price Index from 2005 to 2015 by employing noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component method. As a result, we find out the bubbles which modeled by the noncausal linear process are local explosive. And based on the changes of the coefficients from noncausal Cauchy AR(1) and Gaussian component, this study successfully captures the form of bubbles.

Key words: Taiwan Stock Price Index, Bubble effect, Noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component

目錄

1	緒論	1
2	文獻回顧	3
3	研究模型	6
3.1	穩定分配 (Stable distribution)	6
3.2	橢圓分配 (Elliptical distribution)	7
3.3	Noncausal linear AR(1) process	8
4	估計方法	10
4.1	泡沫效果 (Bubble Effect)	10
4.2	Noncausal Cauchy AR(1) 之係數估計與其漸近性質	10
4.3	Noncausal Cauchy linear AR(1) process with Gaussian AR(1) component	13
4.4	實證特徵函數 (empirical characteristic function, ECF) 估計	14
4.4.1	獨立且同分配資料型態	15
4.4.2	時間序列資料型態	15
4.5	資料模擬	16
5	實證分析	19
5.1	資料基本分析與描述	19

5.2	ACF 分析	21
5.3	模型檢定	21
5.4	參數估計	24
5.5	分段估計	25
6	結論	32
A	一般動差估計法 (generalized method of moment estimator, GMM estimator)	39
圖目錄		
1	模擬資料時間序列圖。	16
2	模擬資料散布圖。	17
3	2005/1/3 至 2015/12/31 之台灣股價指數。	19
4	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數直方既機率密度圖。	20
5	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之 ACF 圖。	21
6	2005/1/3 至 2010/2/26 之台灣股價指數。	26
7	2010/3/1 至 2012/5/31 之台灣股價指數。	27
8	2012/6/1 至 2015/12/31 之台灣股價指數。	27
9	2005/1/3 至 2006/3/24 之台灣股價指數。	29
10	2008/8/22 至 2011/1/11 之台灣股價指數。	29
11	2011/1/11 至 2013/6/9 之台灣股價指數。	30

表目錄

1	模擬資料之估計。	18
2	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之敘述統計。	20
3	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之模型檢定。	22
4	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數確定性趨勢分離之模型檢定。	23
5	2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之估計結果。	24
6	I_1, I_2 與 I_3 之模型檢定。	25
7	I_1, I_2 與 I_3 之估計結果。	25
8	I_4, I_5 與 I_6 之估計結果。	30

1 緒論

一直以來，經濟學家們對於金融市場中存在之泡沫 (bubble) 現象，提出了各種不同之見解。例如在理性預期假說下，泡沫效果係由具有單根之隨機趨勢所造成；Phillips et al.(2011) 更透過遞迴檢定程序 (recursive test procedure) 發現納茲達克綜合價格月指數 (Nasdaq composite price index) 具有泡沫效果，並為泡沫增長比率提供了有效的區間估計。另外，許多研究指出，金融商品市場多具有高狹峰 (leptokurtic) 與厚尾 (fat tail) 之型態；如 Mandelbrot(1963)、Mandelbrot and Taylor(1967) 與 Fama(1963,1965)，綜合以上所述，Gourieroux and Zakoian(2017) 認為，金融市場所發生之泡沫效果應有兩種成因，一種係由於單根之隨機趨勢所造成，稱為 global explosive bubble，另一種則是反映未來存在之極端衝擊 (extreme valued shocks) 所產生之泡沫，稱為 local explosive bubble。而產生極端衝擊之前提為所觀察之時間序列誤差項具有高峰厚尾分配之性質，此性質可以穩定分配描述，並據以建構相關檢定與估計方法以分辨金融市場上所觀察到之泡沫效果係屬於何種模型。

其他投機泡沫實證研究亦指出，不僅是納茲達克綜合價格指數具有泡沫效果，另外，中國、印尼、馬來西亞、菲律賓、新加坡、南韓、台灣與泰國等亞洲國家之股票市場亦具有投機泡沫之現象；如 Zhang(2008)、Sarno and Taylor (1999)、Lehkonen (2010)、Ali et al. (2009)、Mokhtar et al. (2006) 與 Hu(2011)。同時，過去實證研究多以 GARCH 對股價指數進行

分析。但我們根據 *Gourieroux and Zakoian (2017)* 可知，具有泡沫效果之時間序列應以 noncausal 模型進行估計，若將其以 GARCH 模型估計則會有所偏誤，故我們將以 *Gourieroux and Zakoian (2017)* 所建構之檢定與估計方法，對台灣股價指數進行分析。

本文一共分為 6 個章節；首先，第 1 章中，我們介紹本文之研究背景與動機；第 2 章中，我們介紹本研究所參考之相關文獻，並比較本研究與過去文獻之異同；接著，在第 3 章，我們將介紹 noncausal linear AR(1) process，與其所使用之穩定分配，以及與穩定分配相似之橢圓分配。另外，我們將於第 4 章對泡沫效果進行正式的定義，並介紹 *Gourieroux and Zakoian (2017)* 所建立 noncausal Cauchy AR(1) process 之估計量與其漸近性質；以及 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 與實證特徵函數估計方法。第 5 章之實證分析，我們將檢定台灣股價指數是否具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之特性，並以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行估計，分析台灣股價指數之泡沫效果係屬於 local explosive 或是 global explosive 的型態；最後，我們將於第 6 章中做出本文之總結。

2 文獻回顧

許多文獻指出，財務相關的時間序列資料多具有高峰 (leptokurtic) 與厚尾 (fat tail) 之型態，如 Fama(1963,1965)、Mandelbrot and Taylor(1967) 與 Mandelbrot(1963)；另外，Praetz(1972)、Blattberg and Gonedes(1974)、Bollerslev(1987)、Huisman et al.(1998)、McNeil and Frey(2000)、Glasserman et al.(2002) 與 Broda(2012) 皆指出 Student-t 分配相較於常態分配更適合用來描述厚尾性質的資料型態。但是，由於 Student-t 分配僅能提供厚尾而無法描述高狹峰之性質，所以，亦有實證文獻藉由其他同時具有高峰厚尾分配性質之 GARCH 模型 (generalized autoregressive conditional heteroskedastic model) 進行分析，如 Nelson(1991) 提出 GED (generalized error distribution) 以及 Politis(2004) 提出之厚尾分配 (heavy tailed distribution)。

另外，Gourieroux and Zakoian(2017) 有別以往的文獻，以穩定分配來描述高峰厚尾的性質，同時，亦非使用過去實證文獻中常見之 GARCH 模型，而是以 noncausal Cauchy AR(1) process 與 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行分析。其與傳統分析方法不同的是，認為當期觀察值 (Y_t) 不僅受到過去殘差 ($\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}...$) 影響，亦可視為未來衝擊 ($\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}...$) 之總和；其中，Gourieroux and Zakoian(2017) 認為，具有 noncausal linear AR(1) process 性質之時間序列資料，並不適合以 GARCH 模型進行估計。因此，在本文中，我們透過其所建立之檢定方法，確認資料

中 noncausal linear AR(1) process 之性質，並以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行分析。

然而，當我們以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行分析時發現，由於殘差項具有柯西分配 (Cauchy distribution) 之性質，所以我們無法求得 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 之概似函數。一般而言，傳統的最大概似 (maximum likelihood, ML) 法，因為其通用性與良好的漸近性質，而被廣泛的應用於經濟與財務的研究中；但在某些經濟與財務的應用上，因為我們難以求得其概似函數 (likelihood function)，所以我們無法使用最大概似法估計參數。故本研究使用一種由一般動差法 (generalized method of moments) 推廣而來的方法，稱為實證特徵函數 (empirical characteristic function, ECF) 方法進行參數估計，實證特徵函數方法係由 Feuerverger(1990)、Knight and Satchell(1996, 1997) 提出，並由 Yu(1998)、Knight and Yu(2002)、Carrasco et al.(2002) 與 Jiang and Knight(2002) 進一步討論而得；另外，Yu(2004) 彙整了各種資料型態所適用之實證特徵函數方法，本篇研究使用其中序列相關且具有厚尾分配之估計方法。

另外，透過 Gouriéroux and Zakoian (2017) 與 Gouriéroux and Hengic (2015) 可知，noncausal linear process 與 mixed causal-noncausal model 適合分析具有泡沫效果之時間序列資料；其中，泡沫效果為 Blanchard(1979) 在理性預期模型 (rational expectation model) 架構下所發現之現象，接著，Blanchard and Watson(1982) 與 Evans(1991) 對泡沫效果進行正式的定義。

一直以來，具有泡沫效果之時間序列資料都被視為非定態的時間序列資料，並將其以具有單根性質之隨機趨勢資料進行處理，文獻上也建立了一些檢定泡沫效果之方法，如 Phillips et al.(2011) 與 Phillips et al.(2012)。但是，Gourieroux and Zakoian(2017) 提出了不一樣的看法，認為某些泡沫效果係由反映未來之極端衝擊 (extreme valued shocks) 所產生，而此模型之架構為定態的 noncausal linear process。

同時，我們透過 Homm and Breitung (2012)、Phillips et al. (2011) 與 Gourieroux and Zakoian(2017) 可知，1973 年 2 月至 2005 年 6 月之納茲達克綜合價格指數月資料具有泡沫效果，另外，亦有文獻指出亞洲股票市場具有投機泡沫的現象，如 Sarno and Taylor(1999)、Zhang(2008)、Lehkonen (2010)、Ali et al.(2009)、Mokhtar et al.(2006) 與 Hu(2011)。其中，Sarno and Taylor(1999) 發現中國、印尼、馬來西亞、菲律賓、新加坡、南韓、台灣與泰國之股票市場於 1989 至 1997 具有投機泡沫；Zhang(2008) 與 Lehkonen(2010) 分別指出中國股票市場於 1991 年至 2001 以及 1992 年至 2008 年皆存在投機泡沫之現象。據此，我們懷疑台灣加權股價指數 (Taiwan Capitalization Weighted Stock Index) 亦存在泡沫效果，因此我們將透過 Gourieroux and Zakoian(2017) 所建立之檢定與估計方法進行研究。

3 研究模型

Gourieroux and Zakoian(2017) 提出誤差項為穩定分配之 noncausal autoregressive process，相較於傳統的 causal autoregressive process 的設定

$$Y_t = \sum_{h=1}^n a_n Y_{t-h} + \epsilon_t, \quad n \in \mathbb{N},$$

noncausal autoregressive process 更適合捕捉財務及經濟上具有 locally explosion 的定態 (stationary) 時間序列；相關的實證研究可參考 Gourieroux and Hencic(2015)。本節我們將先仔細討論各種具有重尾 (heavy-tail) 機率分配之定義，接著建構 noncausal AR(1) process 並介紹其性質。

3.1 穩定分配 (Stable distribution)

穩定分配係一種連續機率分配，由 Paul Levy 於 1928 年提出，通常用來描述存在偏態或厚尾的機率分布，其定義如下：

定義 1. 令 $X_1, X_2 \sim X$ 且 $X_1 \perp X_2$ ，若對於任何 $a > 0$ 且 $b > 0$ ， $\exists c, d$ 且 $c > 0$ ，使得 $aX_1 + bX_2$ 與 $cX + d$ 服從相同分配，則我們稱 X 為一穩定分配；記作 $X \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ ，其中分配指數 $\alpha \in (0, 2]$ ，偏度參數 $\beta \in [-1, 1]$ ，尺度參數 $\sigma \in [0, \infty)$ ，位置參數 $\mu \in \mathbb{R}$ 。

亦即，當兩獨立機率分配 X_1 與 X_2 皆服從同樣的穩定分配 $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ 時， X_1 與 X_2 兩分配之線性組合亦會服從同樣之穩定分配 $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ 。一般而言，穩定分配的機率密度函數 (probability density function, pdf) 並

不存在，¹ 所以，我們以其特徵函數 (characteristic function, CF) $\psi(s) = E(e^{isX})$ 來替代，取對數後可表示為

$$\log \psi(s) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |s|^\alpha \left[1 - i\beta(\text{sign } s) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] + i\mu s & \text{if } \alpha \neq 1; \\ -\sigma |s| \left[1 + i\beta(\text{sign } s) \frac{2}{\pi} \log |s| \right] + i\mu s & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

另外，當 $X \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ 且 $\alpha < 2$ ，則

$$E|X|^p < \infty \Leftrightarrow p < \alpha, \quad (3.1)$$

亦即，除了常態分配外，其他穩定分配之二階動差皆不存在。其中，柯西分配 ($\alpha = 1, \beta = 0$) 不論是一階動差與二階動差皆不存在。

3.2 橢圓分配 (Elliptical distribution)

橢圓分配通常用來建構風險性資產之日報酬，其直接以特徵函數來定義，因此其不須動差與絕對連續的假設。

定義 2. 若一 k 維隨機變數 X 對於某些 $\mu \in \mathbb{R}^k$ 且 Σ 為 $n \times n$ 之非負定矩陣，使得 $X - \mu$ 之特徵函數 $\psi_{X-\mu}(s) = \psi(t\Sigma t')$ ，則我們稱 X 為一橢圓分配；記作 $X \sim EC_k(\mu, \sigma, \psi)$ 。

值得一提的是，當 $\psi(u) = e^{-u/2}$ 時， $EC_k(\mu, \sigma, \psi)$ 為多元常態分配 $N_k(\mu, \Sigma)$ ；當 $k = 1$ 時，此橢圓分配族即是一維的對稱分配。此外，橢圓分配亦包含各種維度的 t 分配。由此可知，部分之橢圓分配亦屬於本篇所探討之重尾機率分配。

¹僅有三種特例，當 $\alpha = 2, \beta = 0$ ，為高斯分配 (Gaussian distribution)，變異數為 $2\sigma^2$ ，平均數為 μ ；當 $\alpha = 1, \beta = 0$ ，為柯西分配 (Cauchy distribution)，尺度參數為 σ ，位置參數為 μ ；當 $\alpha = 1/2, \beta = 1$ ，為雷維分配 (Levy distribution)，尺度參數為 σ ，位置參數為 μ 。

3.3 Noncausal linear AR(1) process

由於財務時間序列上之誤差多為重尾機率分配，同時，我們由章節 3.1 與 3.2 可知，穩定分配較橢圓分配更適合用來描述重尾機率分配；於是，我們考慮一個誤差項為穩定分配之 noncausal linear AR(1) process：

$$Y_t = \rho Y_{t+1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \sigma, 0), \quad (3.2)$$

其中， ε_t 為獨立且具同分配 (i.i.d.)；² 我們由式 (3.2) 得到之嚴格定態解為

$$Y_t = \sum_{h=0}^{\infty} \rho^h \varepsilon_{t+h}. \quad (3.3)$$

且根據 Gouriéroux and Zakoian(2017) 的 Proposition 3.1，我們可以得到 Y_t 的各種分配如下：

$$\begin{aligned} Y_t &\sim \mathcal{S}\left(\alpha, \beta, \frac{\sigma}{(1-|\rho|^\alpha)^{1/\alpha}}, 0\right), & \text{if } \alpha \neq 1, \rho \geq 0; \\ Y_t &\sim \mathcal{S}\left(\alpha, \beta \frac{1-|\rho|^\alpha}{1+|\rho|^\alpha}, \frac{\sigma}{(1-|\rho|^\alpha)^{1/\alpha}}, 0\right), & \text{if } \alpha \neq 1, \rho \leq 0; \\ Y_t &\sim \mathcal{S}\left(1, \beta \frac{1-|\rho|}{1-\rho}, \frac{\sigma}{1-|\rho|}, \beta \sigma \frac{2\rho \log|\rho|}{\pi(1-\rho)^2}\right), & \text{if } \alpha = 1. \end{aligned}$$

若

$$Y_t = \rho Y_{t+1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{C}(0, 1), \quad (3.4)$$

其中， $\mathcal{C}(0, 1)$ 表示位置參數為 0 且尺度參數為 1 之標準柯西分配，則

$$Y_t \sim \mathcal{C}\left(0, \frac{1}{1-|\rho|}\right). \quad (3.5)$$

²當 $\alpha \leq 1$ 且 $\beta = 0$ ，我們以 $\text{med}(Y_t|Y_{t+1})$ 替代 $E(Y_t|Y_{t+1})$ ，得 $\varepsilon_t = Y_t - \text{med}(Y_t|Y_{t+1})$ ；但是，當 $\alpha \leq 1$ 且 $\beta \neq 0$ ， $E(Y_t|Y_{t+1})$ 不存在，亦無法以中位數取代，故在本研究不做討論。

我們由式 (3.1) 可知，

$$E(|Y_t|^p | Y_{t+1}) \text{ 不存在} \Leftrightarrow p > \alpha, \forall \alpha < 2,$$

在這樣的情況下，我們無法直接將式 (3.2) 表示為 causal linear process 之形式，所以，我們透過 Gouriou and Zakoian(2017) 的 Proposition 3.3，對 Y_t 之 p 階條件動差 $E(|Y_t|^p | Y_{t+1})$ 進行轉換。當 $\rho \neq 0$ 且 $\beta = 0$ ，

$$E(|Y_{t+h}| | Y_{t-1}) = \text{sign}(\rho) |\rho|^{(h+1)(\alpha-1)} Y_{t-1}, \quad \forall h \geq 0.$$

另外，當 (3.4) 式中的 $\rho \neq 0$ 時，

$$E(Y_t | Y_{t-1}) = \text{sign}(\rho) Y_{t-1}, \quad (3.6)$$

且

$$E(Y_t^2 | Y_{t-1}) = \frac{1}{|\rho|} Y_{t-1}^2 + \frac{1}{|\rho|(1-|\rho|)}, \quad (3.7)$$

其中， $\text{sign}(x)$ 表示 x 之正負號。接著，我們由 (3.6)-(3.7) 式可得，

$$Y_t = \text{sign}(\rho) Y_{t-1} + \sigma_t \eta_t, \quad \sigma_t^2 = \left(\frac{1}{|\rho|} - 1 \right) Y_{t-1}^2 + \frac{\sigma^2}{|\rho|(1-|\rho|)} \quad (3.8)$$

其中， $E(\eta_t | Y_{t-1}) = 0$ 且 $E(\eta_t^2 | Y_{t-1}) = 1$ 。由式 3.8 我們可以發現，若我們以傳統的 GRACH 模型對 noncausal Cauchy AR(1) process 之定態時間序列資料進行分析，則會認為其具之泡沫效果係來自具有單根之隨機趨勢，亦即 Gouriou and Zakoian(2017) 所定義之 global explosive bubble 而非 local explosive bubble。

4 估計方法

在使用模型 (3.4) 進行分析時，我們必須判斷時間序列是否具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之特性。首先，我們以最小平方法 (the method of least squares) 建構一 ρ 的估計量 $\hat{\rho}_n$ ，接著，透過 Davis and Resnick(1986) 提出之收斂分配進行檢定；若觀察值具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之特性，我們才能進行前述模型中各參數的估計。

4.1 泡沫效果 (Bubble Effect)

在經濟學相關文獻中，存在兩種不同定義之泡沫，Flood and Garber(1980) 提到，在理性預期 (Rational Expectation, RE) 模型中，一公司的價值可分為兩部分，基本價值 (未來股利之現值加總) 與經濟泡沫。某些理性預期模型的均衡解，具有伴隨破裂之 local explosive，這樣的現象在 Evans(1991) 與 Diba and Grossman(1988) 的文章中，被稱為投機泡沫 (speculative bubbles) 或 explosive。本研究所探討的對象為後者所定義之泡沫，此泡沫包含兩個部分，首先，我們會觀察到偏離原本趨勢的急速增長 (下跌)，接著觀察值將會近乎垂直的下落 (上升) 回原本之趨勢；這樣的現象則為一個泡沫。

4.2 Noncausal Cauchy AR(1) 之係數估計與其漸近性質

首先，我們將對一個 noncausal AR(1) process 的係數進行估計，若

$$Y_t = \rho Y_{t+1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \quad (\varepsilon_t) \text{ i.i.d.}, \quad (4.1)$$

ε_t 為對稱分配，且

$$P(|\varepsilon_t| > x) = x^{-\alpha}L(x), \quad \alpha \in (0, 2), \quad (4.2)$$

其中，

$$L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$s.t. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1, \quad \forall a > 0,$$

則我們根據 Davis and Resnick(1985) 可知，

性質 1. 若 Y_t 為式 (4.1)-(4.2) 之嚴格定態解，則

$$\hat{\rho}_n(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^n Y_t Y_{t-l}}{\sum_{t=1}^n Y_t^2} \xrightarrow{p} \rho^l, \quad \forall l \geq 1.$$

接著，我們令 $\hat{\rho}_n = (\hat{\rho}_n(1), \dots, \hat{\rho}_n(M))'$ ， $\rho = (\rho, \dots, \rho^M)$ ，且

$$a_n = \inf\{x : P(|\varepsilon_1| > x) \leq n^{-1}\},$$

$$\tilde{a}_n = \inf\{x : P(|\varepsilon_1 \varepsilon_2| > x) \leq n^{-1}\}.$$

根據 Davis and Resnick(1986) 我們可以得到，

性質 2. 當 Y_t 為式 (4.1)-(4.2) 之嚴格定態解，且 $E|\varepsilon_t|^\alpha = \infty$ ，則

$$\frac{a_n^2}{\tilde{a}_n} (\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{d} \mathbf{Z} := (Z_1, \dots, Z_M), \quad (4.3)$$

其中， $Z_l = \sum_{j=1}^{\infty} \{\rho^{j+l} - \rho^{|j-l|}\} S_j / S_0$ ， $l = 1, \dots, M$ 且 S_0, S_1, S_2, \dots 為獨立之穩定分配； $S_0 \sim \mathcal{S}(\alpha/2, \beta, \sigma, \mu)$ 而 $S_j \sim (\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ ， $\forall j \geq 1$ 。

另外，當式 (4.3) 中之 $\alpha = 1$ ，則 $a_n^2/\tilde{a}_n = n/\log n$ 。接下來，我們將透過以上估計之 $\hat{\rho}_n$ 分別得到向後以及向前之殘差 $\hat{\varepsilon}_t^*$ 與 $\hat{\varepsilon}_t$ 如下，

$$\hat{\varepsilon}_t^* = Y_t - \hat{\rho}_n Y_{t+1}, \quad t = 1, \dots, n-1, \quad (4.4)$$

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\rho}_n Y_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

爲了檢測殘差之白噪音 (white noise) 性質，我們令

$$R_n^* = \frac{\sum_{t=2}^{n-1} \hat{\varepsilon}_t^* \hat{\varepsilon}_{t-1}^*}{\sum_{t=1}^{n-1} (\hat{\varepsilon}_t^*)^2}, \quad (4.6)$$

$$R_n = \frac{\sum_{t=3}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^n (\hat{\varepsilon}_t)^2}. \quad (4.7)$$

根據 [Gourieroux and Zakoian\(2017\) Proposition 5.3](#)，令 Y_t 符合式 (3.4) 之假設，則

$$\frac{n}{\log n} R_n^* \xrightarrow{d} \rho(1+2\rho)YX \quad (4.8)$$

$$\frac{n}{\log n} R_n \xrightarrow{d} \rho(1+2\rho)YX \quad (4.9)$$

其中， $Y \sim \mathcal{C}(0, 1)$ 且 $X \sim \chi^2(1)$ 。另一方面，根據 [Gourieroux and Zakoian\(2017\) Proposition 5.4](#) 可知，當 $Y_{n,t}$ 爲一 (漸近) 隨機漫步過程 ((near) random walk process)

$$Y_{n,t} = a_n Y_{n,t-1} + \xi_t, \quad t \geq 1, \quad a_n = e^{c/n}, \quad (4.10)$$

且滿足，

$$E(\xi_t) = 0, \quad E(\xi_t^2) > 0, \quad \sum_{h=0}^{\infty} [\alpha_{\xi}(h)]^{\frac{\nu}{2+\nu}} < \infty, \quad (4.11)$$

其中， $\nu > 0$, $E|\xi_t|^{2+\nu} < \infty$ 且 $\forall c \in \mathbb{R}$, 則

$$\frac{n}{\log n} R_n^* \xrightarrow{p} \infty \quad \text{and} \quad \frac{n}{\log n} R_n \xrightarrow{p} \infty \quad (4.12)$$

所以，我們可以透過 5.3 節所定義之方法，檢定資料之泡沫效果係來自 non-causal Cauchy AR(1) process 或是 (漸近) 隨機漫步過程。

4.3 Noncausal Cauchy linear AR(1) process with Gaussian AR(1) component

若我們欲以模型 (3.4) 進行估計時，須確保資料符合定態假設，我們會將資料分解為基本趨勢與泡沫效果兩個部分；一般而言，我們假設此資料之基本趨勢為非線性確定性趨勢 (nonlinear deterministic trend)，

$$y_t = \text{trend}_t + y_t = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i + y_t. \quad (4.13)$$

在這樣的情況下，我們就能確定資料之泡沫效果來自於 noncausal Cauchy AR(1) process，亦即，此泡沫效果屬於 local explosive。但是，當資料之基本趨勢無法有效以非線性確定性趨勢表示時，我們將以隨機趨勢 (stochastic trend) 的方法進行分解，

$$y_t = Z_t + cY_t, \quad (4.14)$$

其中， Y_t 為 noncausal Cauchy linear AR(1) process,

$$Y_t = \rho Y_{t+1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{C}(0, 1), \quad (4.15)$$

而 Z_t 為高斯 AR(1) 過程

$$Z_t = rZ_{t+1} + \sigma \eta_t, \quad (\eta_t) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad r \neq 1, \quad (4.16)$$

因爲，此模型之機率密度函數亦不存在，我們只能以其聯合特徵函數 (joint CF) 表示

$$\begin{aligned}\Psi(u_0, \lambda u_0) &:= E[\exp\{iu_0(\mathcal{Y}_t + \lambda\mathcal{Y}_{t+1})\}] \\ &= \exp\left\{-\frac{u_0^2\sigma^2(1 + 2\lambda r + \lambda^2)}{2(1 - r^2)} - c|u_0|E_\pi\left(1 + \frac{|\rho + \lambda|}{1 - |\rho|}\right)\right\}.\end{aligned}$$

根據 Gouriou and Zakoian(2017)，一般而言，當式 (4.16) 中的 $r \rightarrow 1$ 則此時間序列之高斯部分爲隨機漫步過程 (random walk process)，在這樣情況下所觀察到的泡沫現象屬於爲 global explosive；若式 (4.15) 中的 $\rho \rightarrow 1$ 則我們所觀察到之泡沫效果則爲 local explosive，所以我們可以透過 r 與 ρ 來判斷泡沫效果的類型。

4.4 實證特徵函數 (empirical characteristic function, ECF) 估計

由於在模型 (4.14)-(4.16) 的假設下，我們無法求得其概似函數，所以本研究無法使用過去被廣泛應用之最大概似法。根據 Yu(2004)，我們可以透過最小化實證特徵函數 (empirical characteristic function, ECF) 與理論特徵函數 (theoretical characteristic function) 之距離以求得模型 (4.14)-(4.16) 中之參數向量 $\theta = (\rho, r, c, \sigma)'$ 。其中，實證特徵函數估計方法係始於 Parzen (1962)，其估計方法可依研究標的之不同性質分爲兩類，獨立且同分配與時間序列資料。

4.4.1 獨立且同分配資料型態

令 $F(x; \boldsymbol{\theta})$ 為 X 之累積分配函數 (cumulative distribution function, CDF)，其中， $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ ，則 X 之理論特徵函數與實證特徵函數分別定義如下，

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) &= E\left(e^{i\mathbf{r}X}\right) = \int e^{i\mathbf{r}X} dF(x; \boldsymbol{\theta}), \\ \Psi_n(\mathbf{r}) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\mathbf{r}X_j} = \int e^{i\mathbf{r}x} dF_n(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

其中， $i = \sqrt{-1}$ ， $\{X_j\}_{j=1}^n$ 為獨立且同分配， $F_n(\mathbf{x})$ 為實證累積分配函數。由於實證特徵函數估計的方法為最小化實證特徵函數與理論特徵函數之距離，故可視為一種一般動差估計量 (generalized method of moment estimator, GMM estimator)，表示為

$$h(\mathbf{r}, X_j; \boldsymbol{\theta}) = e^{i\mathbf{r}X_j} - \Psi(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}),$$

其中， $E(h(\mathbf{r}, X_j; \boldsymbol{\theta})) = 0, \forall \mathbf{r}$ 。根據 \mathbf{r} 所挑選之集合的不同，估計的過程會有所不同，因本篇之研究對象不屬於此類，故不在此多做說明，詳細內容可參考 Yu(2004)。

4.4.2 時間序列資料型態

當研究標的為時間序列資料，我們會以其聯合實證特徵函數 (joint ECF) 表示

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^{n-p} e^{i\mathbf{r}'X_t}, \quad (4.17)$$

其中

$$\mathbf{X}_t = (\mathcal{Y}_t, \dots, \mathcal{Y}_{t+p}), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{p+1})', \quad t = 1, \dots, T.$$

此外，根據 *Gourieroux and Zakoian(2017)*，我們對 4.17 進行修改，得到

$$\Psi_n(u, \lambda u) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \cos\{u(\mathcal{Y}_t + \lambda \mathcal{Y}_{t+1})\}, \quad (4.18)$$

接著，透過 *Gourieroux and Zakoian(2017)* 我們可得到特徵函數估計量 (CF estimator) 為

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}^2} |\Psi_n(u, \lambda u) - \Psi(u, \lambda u)|^2 dW(u, \lambda). \quad (4.19)$$

亦即，我們透過不同的參數向量 $\theta = (\rho, r, c, \sigma)'$ 來最小化理論特徵函數與實證特徵函數間的加權距離；當實證特徵函數與理論特徵函數間的差距最小時，則代表其所使用的參數向量 $\theta = (\rho, r, c, \sigma)'$ 最能使我們所設定之模型 (4.14)-(4.15) 符合我們所觀察到的資料。

4.5 資料模擬

首先，圖 1 為我們在模型 (4.14)-(4.16) 架構下，分別為 $(\rho, r, c, \sigma) = (0.9, 0.4, 1, 2)$ 以及 $(\rho, r, c, \sigma) = (0.9, 1, 1, 2)$ 模擬之時間序列資料。

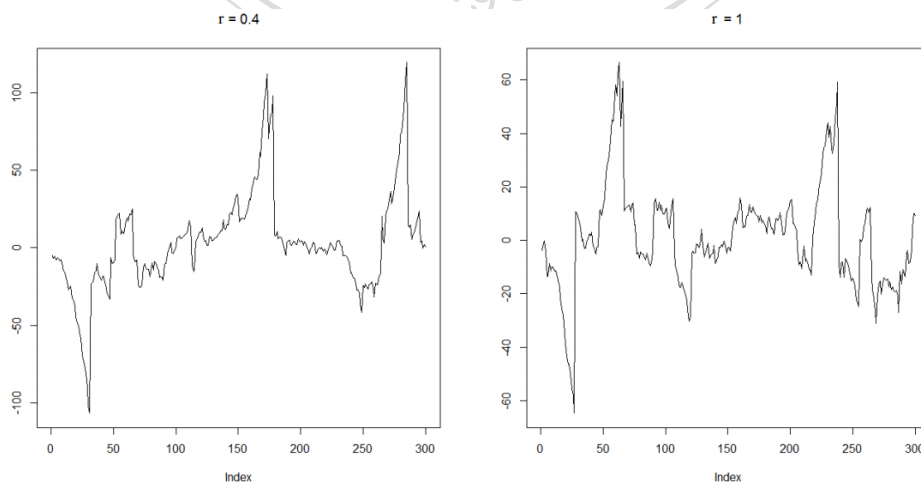


圖 1: 模擬資料時間序列圖。

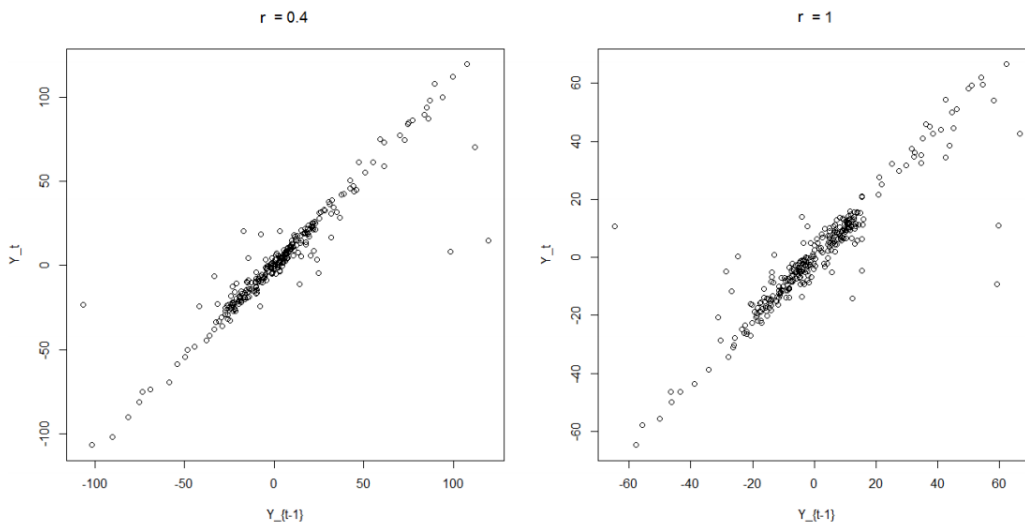


圖 2: 模擬資料散布圖。

我們由圖 1 可知，右圖於 $y_t = 0$ 附近有較多且明顯之跳躍，此現象係來自於隨機漫步之效果。另外，圖 2 為以上模擬結果之 y_{t-1} 與 y_t 散布圖，我們由圖 2 可知，當一時間序列為 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component，且 noncausal Cauchy AR(1) 之係數為正時，其 y_{t-1} 與 y_t 散布圖多落在斜率為 1 之直線上，另外，我們可以觀察到部分偏離此直線且落於直線 $y_t = 0$ 附近之點，這些點表示，其觀察值由 y_{t-1} 回到 $y_t = 0$ ，這樣的現象顯示了泡沫的破裂。

接著，我們透過 4.4 節所介紹之實證特徵函數估計方法，分別對以上之兩種資料以模型 (4.14)-(4.16) 進行估計如表 1 所示。

表 1: 模擬資料之估計。

	$\hat{\rho}_n$	r_n	c_n	σ_n
$r = 0.4$	0.9210	0.3726	0.9984	2.2232
$r = 1$	0.8115	0.9799	0.9999	1.9109

$\rho = 0.9, c = 1, \sigma = 2.$

由表 1 可知，我們透過實證特徵函數估計方法，所估計之係數與我們透過式 (4.14)-(4.16) 設定之係數十分接近，因此，對於符合式 (4.14)-(4.16) 假設下之時間序列資料，實證特徵函數估計法係一個良好的估計方法。



5 實證分析

本節我們以 2005/1/3 至 2015/12/31 之台灣股價指數 (TAIEX) 作為研究標的。首先，我們檢測其是否具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之特性；接著，將其分解為基本趨勢與泡沫兩部分，若其基本趨勢屬於非線性確定性趨勢，則將分解後之泡沫部分以 noncausal Cauchy AR(1) 進行分析，反之，則以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行分析；最後，觀察泡沫成因係屬於 local explosive 或是 global explosive。

5.1 資料基本分析與描述

圖 3 為 台灣股價指數，由圖 3 我們可以觀察到，2006/8/1 至 2008/5/16 股價指數持續上漲，接著出現大幅度的下跌；同時，根據 4.1 節中對泡沫的定義，我們可以初步猜測此筆資料存在泡沫之現象，並同時存在時間趨勢。

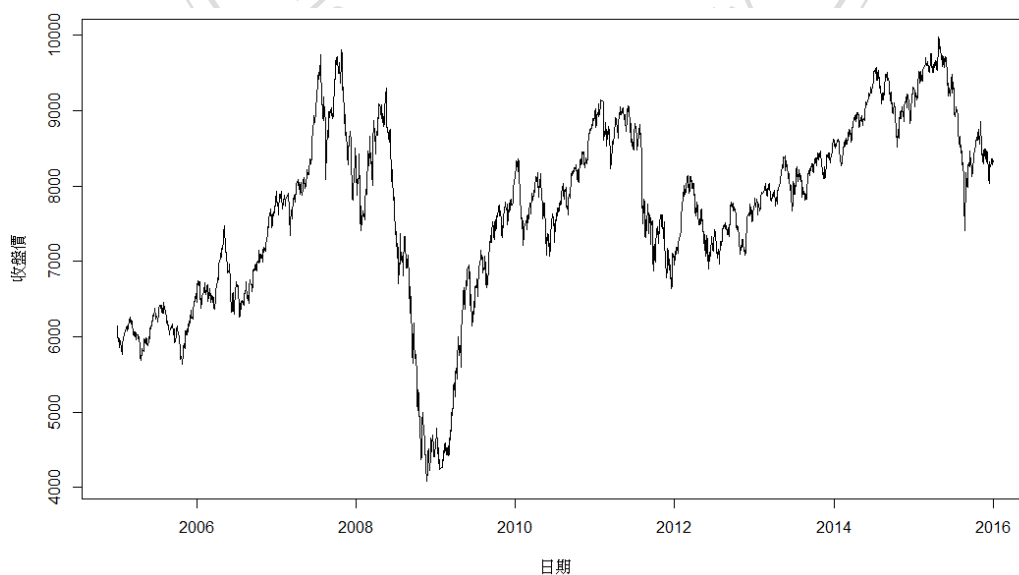


圖 3: 2005/1/3 至 2015/12/31 之台灣股價指數。

此筆資料之敘述統計如表 2 所示，其中，此筆資料的峰態係數略大於 3，所以我們可以推斷其具有高峰厚尾的機率分配特性，另外，此筆資料不僅偏態係數略小於零。同時，我們由圖 4 可知，此資料資分配具有雙峰的現象，與我們原先所假設之穩定分配並不相符，所以我們認為此筆資料並非單純之穩定分配，若我們選擇以 noncausal Cauchy AR(1) process 進行分析，則必須分離出資料中之時間趨勢；或者我們選擇直接以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行分析。

表 2: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之敘述統計。

平均數	標準差	中位數	四分位數	全距	峰態係數	偏態係數
7684	1188.975	7813	1593	5883	3.1301	-0.6214

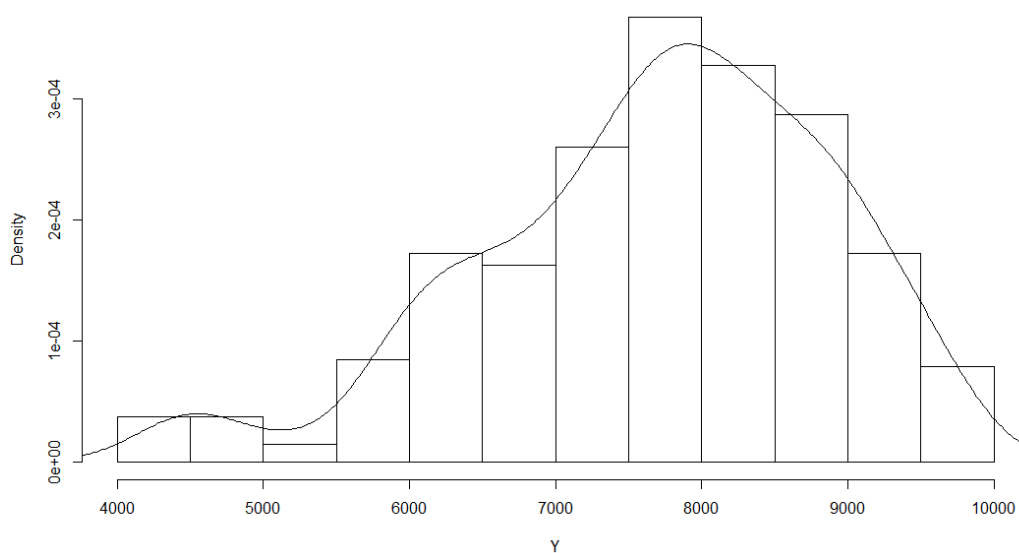


圖 4: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數直方既機率密度圖。

5.2 ACF 分析

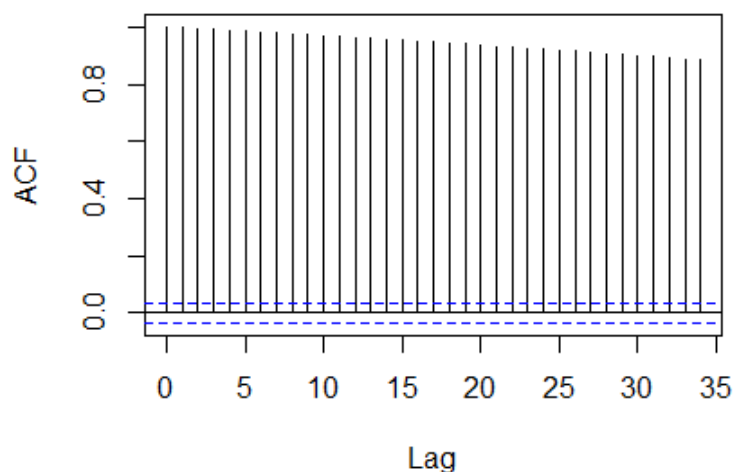


圖 5: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之 ACF 圖。

首先，根據 *Gourieroux and Hencic(2015)* 可知，noncausal Cauchy AR(1) process 之 ACF 分析所使用之信賴區間，有別於傳統之 causal linear process，所以我們透過式 (4.8)-(4.9) 之漸近分配對 95% 信賴區間進行修改，得到 $(-0.0362, 0.0362)$ 如圖 5 中之虛線所示。我們由圖 5 可知，此筆資料之 ACF 呈現緩慢遞減，所以我們推測此資料為非定態且存在時間趨勢。

接著，由 4.3 節可知，若我們欲以模型 (3.4) 進行估計，我們必須先將資料以式 (4.13) 分解為非線性確定性趨勢與泡沫兩個部分；或者是將基本趨勢視為隨機趨勢，以式 (4.14)-(4.16) 進行分析。

5.3 模型檢定

根據 *Gourieroux and Zakoian(2017)* 我們可以建立以下的檢定方法，以驗證此筆資料是否具有 Noncausal linear AR(1) process 之性質，首先，我們

可透過修改式 (4.8)-(4.9) 得到

$$Z_n^* = \frac{n}{\log n} \left| \frac{R_n^*}{\hat{\rho}_n(1 + 2\hat{\rho}_n)} \right|, \quad (5.1)$$

$$Z_n = \frac{n}{\log n} \left| \frac{R_n}{\hat{\rho}_n(1 + 2\hat{\rho}_n)} \right|, \quad (5.2)$$

並建構一分配 $|YX|$ ，其中

$$Y \sim C(0, 1), \quad X \sim \chi^2(1),$$

由 4.2 節我們可知，在給定一顯著水準 (significant level) α 下，若 $P(|YX| \geq Z_n^*) > \alpha$ ，則此資料具有 noncausal Cauchy AR(1) process。接著，我們透過 $\hat{\rho}_n$ 得到式 (4.4)-(4.5) 中之 $\hat{\varepsilon}_t^*$ 與 $\hat{\varepsilon}_t$ ，並以式 (4.6)-(4.7) 得到 R_n^* 與 R_n ，最後，以本節所推導出之式 (5.1)-(5.2) 與 $P(|YX| \geq Z_n^*)$ 、 $P(|YX| \geq Z_n)$ 得到表 3 之結果，其中， $|YX|$ 之分配係以蒙地卡羅法 (Monte Carlo method) 模擬 1,000,000 次所得。

由表 3 我們可知，在 0.05 的顯著水準下，此資料並不顯著拒絕其不具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之性質的假設；但在 0.1 的顯著水準下，則會拒絕其具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之性質。由於此筆資料並非在所有顯著水準下，皆不拒絕其具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之性質。

表 3: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之模型檢定。

n	$\hat{\rho}_n$	Z_n^*	Z_n	$P(YX \geq Z_n^*)$	$P(YX \geq Z_n)$
2728	0.9996	6.3057	6.4316	0.0931	0.0916

H_0 : 時間序列為 noncausal Cauchy AR(1) process.

另外，我們由圖 3 可知，2005/1/3 至 2015/12/31 之台灣股價指數存在多個泡沫效果，所以我們猜測 2005/1/3 至 2015/12/31 之台灣股價指數，同時包含了 local explosive 與 global explosive 之泡沫效果。另一方面，根據 4.3 節可知，若泡沫現象僅來自 local explosive，則我們可以透過式 (4.13) 對資料進行分解，使資料符合定態假設後，直接以 noncausal Cauchy AR(1) process 進行分析。我們透過給定不同 m 之趨勢對資料進行分解，並再次進行模型檢定之結果如表 4 所示。

由表 4 可知，不論 m 為多少，我們皆無法使 $P(|YX| \geq Z_n^*) > 0.1$ ，亦即，我們無法透過非線性確定性趨勢的分解，使資料不論在何種顯著水準下皆不拒絕其符合 noncausal Cauchy AR(1) process 之假設。因此，我們推斷此資料無法有效的以式 (4.13) 進行分解，故我們認為此筆資料之基本趨勢應為隨機趨勢 (stochastic trend)，亦即，資料中的泡沫現象應屬於 global explosive。

表 4: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數確定性趨勢分離之模型檢定。

	$\hat{\rho}_n$	Z_n^*	Z_n	$P(YX \geq Z_n^*)$	$P(YX \geq Z_n)$
$m = 0$	0.9969	6.4976	6.4297	0.0908	0.0917
$m = 1$	0.9957	6.5072	6.5151	0.0907	0.0906
$m = 2$	0.9957	6.5145	6.5246	0.0906	0.0905
$m = 3$	0.9953	6.5318	6.5981	0.0904	0.0900
$m = 4$	0.9951	6.5605	6.5413	0.0900	0.0902
$m = 5$	0.9951	6.5653	6.5454	0.0900	0.0902
$m = 6$	0.9950	6.6154	6.5635	0.0894	0.0900

此表以式 (4.13) 中不同之 m 分離資料中之確定性趨勢。

H_0 : 時間序列為 noncausal Cauchy AR(1) process.

接著，我們將透過 4.4 節之方法估計式 (4.14)-(4.16) 之參數向量 $\theta = (\rho, r, c, \sigma)'$ 以驗證上述的結果。

5.4 參數估計

根據 4.4 節所介紹之方法估計參數向量 $\theta = (\rho, r, c, \sigma)'$ 時，我們必須先決定式 (4.19) 中之 u 與 λ 。另外，我們由 Yu(1998) 可知，若 u 與 λ 個數越多，估計則越有效；但過多的 u 與 λ 則會增加最佳化過程的計算難度；所以我們參考 Gouriou and Zakoian(2017) 使用 $u \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 3\}$ 與 $\lambda \in \{0.1, -0.2, 0.5, -1, -0.5, 1, 2\}$ 進行估計。首先，由於我們所使用的 u 與 λ 皆為離散集合，所以我們將式 (4.19) 修改為

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{u, \lambda} |\Psi_n(u, \lambda u) - \Psi(u, \lambda u)|^2 W_{\hat{\theta}_n}(u, \lambda), \quad (5.3)$$

其中，

$$\begin{aligned} W_{\hat{\theta}_n}(u, \lambda) &= [\text{Var}(\cos\{u(\mathcal{Y}_t + \lambda \mathcal{Y}_{t+1})\})]^{-1} \\ &= \{0.5[1 + \Psi(2u, 2\lambda u)] - [\Psi(u, \lambda u)]^2\}^{-1}. \end{aligned}$$

估計結果如表 5 所示，其中 $\hat{\rho}_n$ 與 r_n 分別為 noncausal Cauchy AR(1) 與 Gaussian AR(1) 之係數；根據 4.3 節可知，當 $\hat{\rho}_n \rightarrow 1$ 且 $r_n \rightarrow 1$ ，則此筆資料之泡沫成因同時包含了 local explosive 與 global explosive。

表 5: 2005/1/3 至 2015/12/31 台灣股價指數之估計結果。

$\hat{\rho}_n$	r_n	c_n	σ_n
0.999	0.999	1.000	2.447

以模型 (4.14)-(4.16) 進行估計。

另外，我們由圖 3 可知，台灣股價指數分別於 2008/5/16 至 2009/6/4、2011/8/1 至 2011/10/3 以及 2015/6/1 至 2015/10/1 皆有大幅度的下跌，所以，我們猜測 2005/1/3 至 2015/12/31 整段期間包含多種不同的泡沫現象；於是，我們試著將資料分割為三個區間 I_1 , I_2 與 I_3 分別進行模型檢定與估計，三個區間分別為 2005/1/3 至 2010/2/26、2010/3/1 至 2012/5/31 以及 2012/6/1 至 2015/12/31。

5.5 分段估計

首先，我們分別對 I_1 , I_2 與 I_3 進行模型檢定，由表 6 可知， I_1 , I_2 與 I_3 不論在何種顯著水準下，皆不拒絕其具有 noncausal Cauchy AR(1) process 之性質，同時，也表示 I_1 , I_2 與 I_3 所具有之泡沫效果皆屬於 local explosive。接著，我們以式 (4.14)-(4.16) 分別對 I_1 , I_2 與 I_3 進行估計，如表 7 所示。

表 6: I_1 , I_2 與 I_3 之模型檢定。

	n	$\hat{\rho}_n$	Z_n^*	Z_n	$P(YX \geq Z_n^*)$	$P(YX \geq Z_n)$
I_1	1276	0.9992	2.5422	2.6762	0.1914	0.1846
I_2	564	0.9984	3.1958	3.1144	0.1620	0.1652
I_3	888	0.9990	2.5134	2.8896	0.1930	0.1746

H_0 : 時間序列為 noncausal Cauchy AR(1) process.

表 7: I_1 , I_2 與 I_3 之估計結果。

	$\hat{\rho}_n$	r_n	c_n	σ_n
I_1	0.9997	0.1292	0.9998	2.7841
I_2	0.9998	0.4187	0.9999	2.3546
I_3	0.9997	0.4064	0.9998	2.7051

以模型 (4.14)-(4.16) 進行估計。

由表 7 可知，不論是 I_1 , I_2 或 I_3 其所估計之 r_n 皆不趨近於 1，僅有 $\hat{\rho}_n \rightarrow 1$ ，亦即 I_1 , I_2 或 I_3 包含之泡沫效果，皆屬於 local explosive，此結果與我們由表 6 所推論之結果相同。在分析表 7 中各項係數前，我們先判斷造成泡沫效果係正向之極值或是負向之極值。

首先， I_1 中之泡沫效果出現在 2008/5/16 至 2009/6/4，同時，透過圖 6 可知，在 2008/5/19 之泡沫破裂回到基本趨勢後，緊接著在 2008/9/1 繼續往下跌落至低點，接著才上漲回到基本趨勢，由此可知，此泡沫效果係由一正一負極值連續影響而成，在兩極值間並無足夠時間調整至基本趨勢，而使此期間所估計之 r_n 為三段區間中之最小值；此外，我們猜測正向極值係因投資人對於市場過於樂觀而形成，而負向極值則為金融危機所造成。

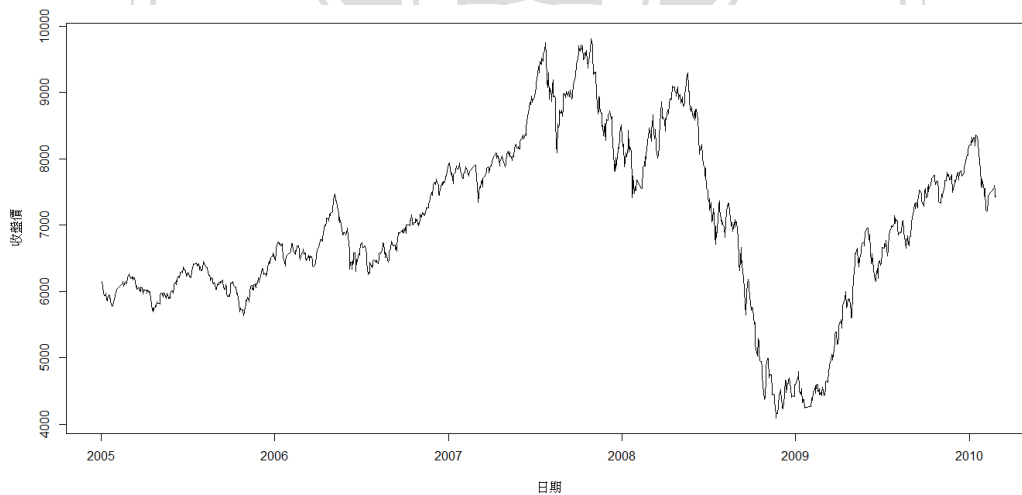


圖 6: 2005/1/3 至 2010/2/26 之台灣股價指數。

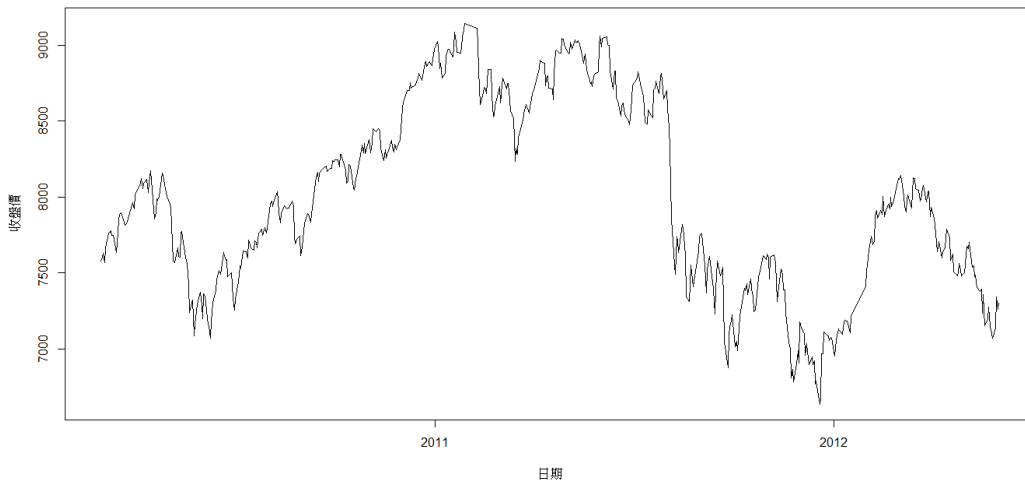


圖 7: 2010/3/1 至 2012/5/31 之台灣股價指數。

接著， I_2 中之泡沫效果出現在 2011/8/1 至 2011/10/3，由圖 7 我們可知，在 2011/8/2 泡沫破裂並下降回到基本趨勢，所以，此泡沫效果係由正向之極值造成；我們猜測此極值係因為投資人對於金融危機後的經濟復甦過於樂觀。

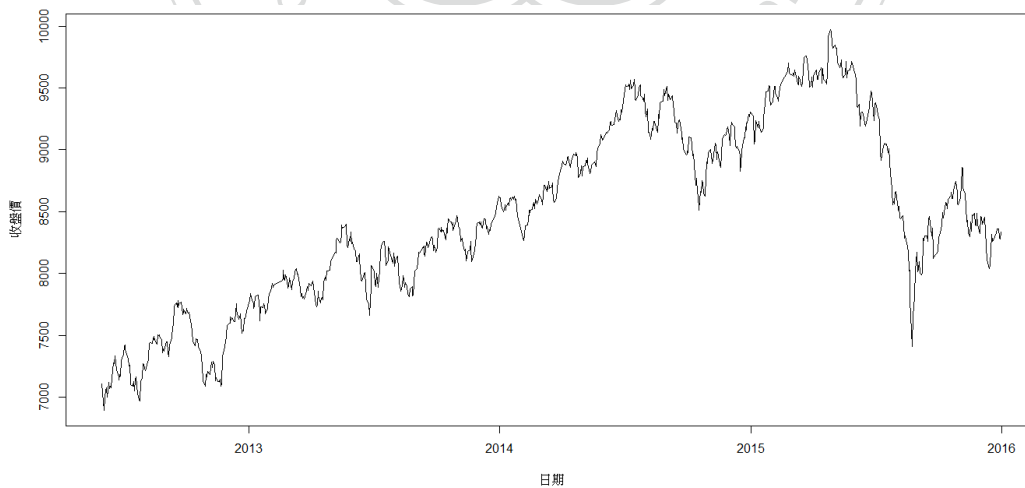


圖 8: 2012/6/1 至 2015/12/31 之台灣股價指數。

最後，由圖 8 可知， I_3 中之泡沫於 2015/4/30 破裂並下降至基本趨勢，而此泡沫效果亦來自正向極值，我們猜測其成因係因中國市場之成長不如預期，而導致市場的過於樂觀。透過以上結果，我們發現 I_2 與 I_3 估計之 r_n 十分相近，同時，我們可將 2008 年金融危機期間所估計出之 r_n 視為極值密集發生所導致的偏誤，所以我們認為台灣股價指數之 r_n 大約為 0.4，亦即，在 causal 模型下之衝擊發生後，對於台灣股價指數之基本價值在一周後之影響不到 1%。

我們根據表 7 可知，不論是 I_1 , I_2 或 I_3 ，其所估計之 $\hat{\rho}_n$ 與 c_n 皆十分接近，表示不論何時，台灣股價指數對於未來的預期皆沒有太大的差別；另外，根據 Gouriéroux and Zakoian(2017) 可知，式 (4.16) 亦可以 causal 形式表示，亦即

$$Z_t = rZ_{t-1} + \sigma\eta_t, \quad (\eta_t) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad r \neq 1,$$

所以，我們可以將表 7 中之 r_n 視為 causal AR(1) 之係數。由此可知，相較於 noncausal 的部分，causal 的部分在不同的時期影響的持續皆有不同，此處要特別注意的是，在 (4.14)-(4.16) 模型假設下，noncausal 與 causal 的殘差是彼此獨立存在的，所以，前面所猜測的極值並不能用以解釋 r_n 的大小所造成的持續影響。此處僅能說明，在 2005/1/3 至 2010/2/26 期間相較於其他兩區間，causal 部分所組成之台灣股價指數小於 noncausal 的部分，亦即，台灣股價指數在 2005/1/3 至 2010/2/26 期間，大多反應投資人對於未來市場的預期，而非傳統上認為之隨機漫步過程。

另外，若我們試著對其他子區間 I_4 、 I_5 與 I_6 進行估計，期間分別為 2005/1/3 至 2006/3/24、2008/8/22 至 2011/1/11 與 2011/1/11 至 2013/6/9，時間序列圖如下所示。

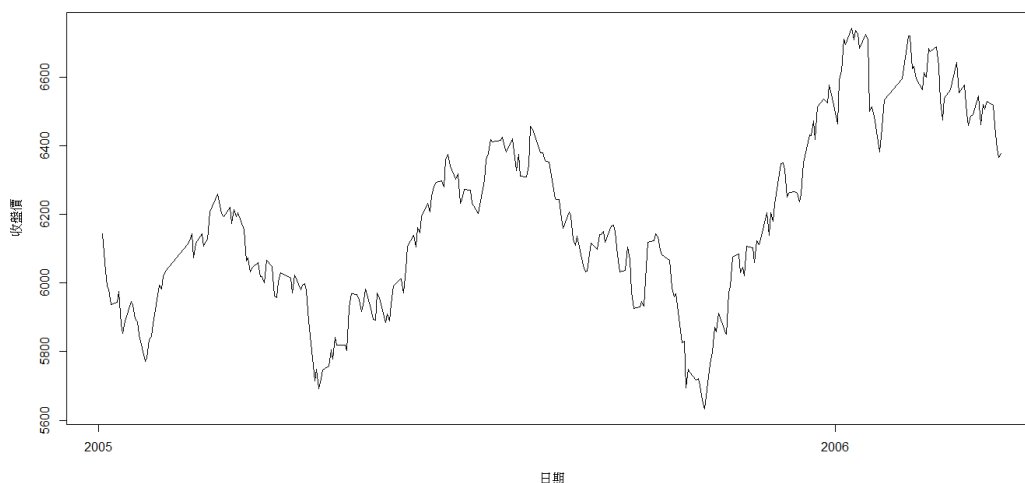


圖 9: 2005/1/3 至 2006/3/24 之台灣股價指數。

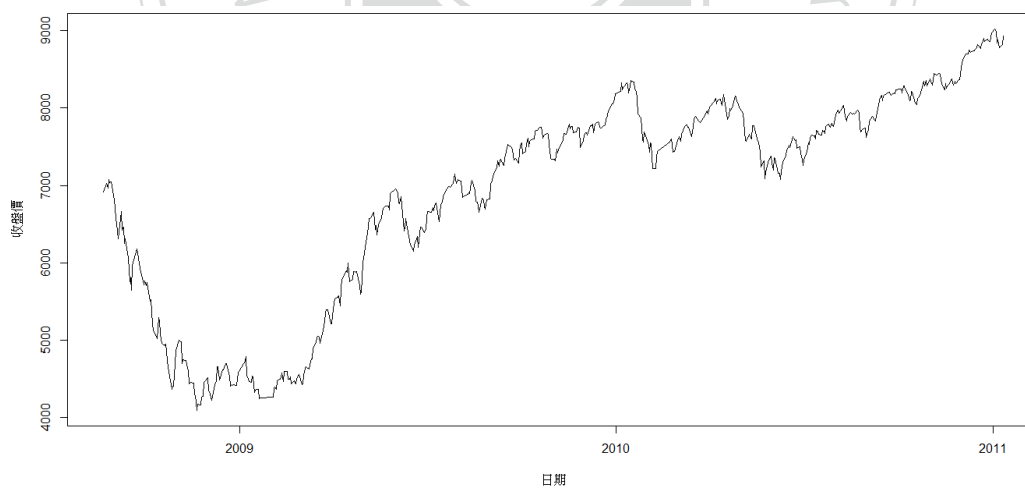


圖 10: 2008/8/22 至 2011/1/11 之台灣股價指數。

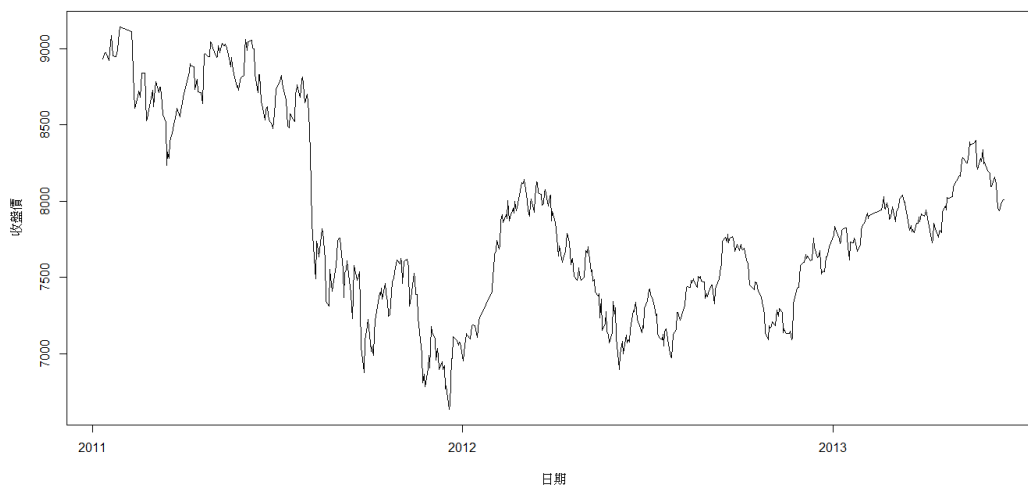


圖 11: 2011/1/11 至 2013/6/9 之台灣股價指數。

我們由圖 9 可知， I_4 有別於 I_1 、 I_2 與 I_3 ，並未包含明顯之泡沫現象。另外，我們由圖 10 與圖 11 可知， I_5 包含 I_1 一部分之泡沫現象與 I_2 前半段之資料，而 I_6 包含 I_2 一部分之泡沫現象與 I_3 前半段之資料。接著，我們以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 分別對 I_4 、 I_5 與 I_6 進行估計。

表 8: I_4 , I_5 與 I_6 之估計結果。

	$\hat{\rho}_n$	r_n	c_n	σ_n
I_4	0.7835	0.1919	0.9999	2.0377
I_5	0.9999	0.3367	0.9998	2.1006
I_6	0.9998	0.4075	0.9999	2.6337

以模型 (4.14)-(4.16) 進行估計。

由表 8 可知， I_4 之 $\hat{\rho}_n$ 與 r_n 皆不趨近於 1，另外， I_5 與 I_6 之 r_n 分別介於 I_1 、 I_2 與 I_2 、 I_3 之間。由此可知，我們可以透過 $\hat{\rho}_n$ 與 r_n 之變化，判斷泡沫效果之存在與變化，當 $\hat{\rho}_n$ 與 r_n 皆不趨近於 1 時，表示此時間序列並不存在泡沫現象；當 $\hat{\rho}_n \rightarrow 1$ 但 $r_n \not\rightarrow 1$ 時，表示此時間序列存在 local explosive 之泡沫現象；當 $\hat{\rho}_n \not\rightarrow 1$ 但 $r_n \rightarrow 1$ 時，表示此時間序列存在 global explosive 之泡沫現象；當 $\hat{\rho}_n \rightarrow 1$ 且 $r_n \rightarrow 1$ 時，表示此時間序列同時存在 local explosive 與 global explosive 之泡沫現象，亦可推測其估計期間可能存在結構性改變。



6 結論

我們由以上的實證結果可知，當我們以三段期間分別進行估計時，台灣股價指數確實具有泡沫效果，同時，此泡沫效果皆屬於 local explosive，而非過去文獻所認為之 global explosive。其中，第一段期間資料 I_1 由於極端衝擊的連續產生，而導致 r_n 之估計值與後兩段期間資料 I_2 與 I_3 之估計值相去甚遠，我們將其視為此模型在估計時可能發生之偏誤。

接著，我們的實證結果顯示，分段估計之 r_n 皆不趨近於 1，但全段估計之 r_n 卻趨近於 1；此現象說明，不同期間之模型可能存在差異，而我們誤將所有區間以同一模型估計時，noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 無法有效的進行估計，所以，當我們以 noncausal Cauchy AR(1) with Gaussian component 進行估計時，亦須注意估計期間是否可能具有結構性之改變。

在實證研究的過程中，我們切割資料時係以資料中所能直接觀察到之泡沫現象為依據，往後之研究可透過遞迴 (recursive) 或移動窗格 (rolling window) 之方式進行估計，並透過 $\hat{\rho}_n$ 與 r_n 之變化，作為判定市場上所出現泡沫效果之類型，抑或是市場中是否出現泡沫效果。

此外，由 5.5 節可知， r_n 不僅可用以判斷泡沫效果之型態，亦可視為台灣股價指數之基本趨勢以 AR(1) 模型估計之係數，同時，根據 Knight, Yu (2002) 指出，實證特徵函數方法所估計之參數具有漸近常態分配之性質，且收斂速率為 \sqrt{n} ，我們便可以進一步判斷其統計上之顯著性。

參考文獻

- Ali, N., A. Nassir, T. Hassan and S. Z. Abidin (2009). Stock Overreaction and Financial Bubbles: Evidence from Malaysia. *Journal of Money, Investment and Banking*, **11**, 90–101.
- Blanchard, O. (1979). Speculative Bubbles: Crashes and Rational Expectations. *Economics Letters*, **3**, 387–389.
- Blanchard, O. and M. Watson (1982). Bubbles, Rational Expectations and Financial Markets. *Crisis in the Economic and Financial Structure*, edited by Paul Wachtel, Lexington Books, 295–316.
- Blattberg, R. C. and N. J. Gonedes (1974). A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices. *The Journal of Business*, **47:2**, 244–280.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, **69:3**, 542–547.
- Broda, S. A. (2012). The Expected Shortfall of Quadratic Portfolios with Heavy-Tailed Risk Factors. *Mathematical Finance*, **22:4**, 710–728.
- Carrasco, M., M. Chernov, J. Florens and E. Ghysels (2002). Efficient Estimation of Jump Diffusions and General Dynamic Models with a Con-

- tinuum of Moment Conditions. *Working Paper*; Department of Economics: University of Rochester.
- Davis, R. and S. Resnick (1985). Limit Theory for Moving Averages of Random Variables with Regularly Varying Tail Probabilities. *Annals of Probability*, **13**, 179–195.
- Davis, R. and S. Resnick (1986). Limit Theory for the Sample Covariance and Correlation Functions of Moving Averages. *Annals of Statistics*, **14**, 533–558.
- Diba, B. and H. Grossman (1988). Explosive Rational Bubbles in Stock Prices? *The American Economic Review*, **78**, 520–530.
- Evans, G. (1991). Pitfalls in Testing for Explosive Bubbles in Asset Prices. *The American Economic Review*, **81:4**, 922–930.
- Fama, E. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *The Journal of Business*, **36:4**, 420–429.
- Fama, E. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, **38:1**, 34–105.
- Feuerverger, A. (1990). An Efficiency Result for the Empirical Characteristic Function in Stationary Time-Series Models. *The Canadian Journal of Statistics*, **18:2**, 155–161.

- Flood, R. and P. Garber (1980). Market Fundamentals Versus Price Level Bubbles. The First Tests. *Journal of Political Economy*, **88**, 745–770.
- Glasserman, P., P. Heidelberger and P. Shahabuddin (2002). Portfolio Value at Risk with Heavy-Tailed Risk Factors. *Mathematical Finance*, **12:3**, 239–269.
- Gourieroux, C. and A. Hencic (2015). Noncausal Autoregressive Model in Application to Bitcoin/USD Exchange rate. *Econometrics of Risk*, **583**, 17–40.
- Gourieroux, C. and J. M. Zakoian (2017). Local Explosion Modelling by Noncausal Process. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, forthcoming.
- Homm, U. and J. Breitung (2012). Testing for Speculative Bubbles in Stock Markets: A Comparison of Alternative Methods. *Journal of Financial Econometrics*, **10**, 198–231.
- Hu, B. (2011). Are Asian stock markets characterized by rational speculative bubbles? Lincoln University.
- Huisman, R., K. G. Koedijk and R. A. J. Pownall (1998). VaR-x: Fat Tails in Financial Risk Management. *Journal of Risk*, **1:1**, 47–61.
- Jiang, G. and J. L. Knight (2002). Estimation of Continuous Time Pro-

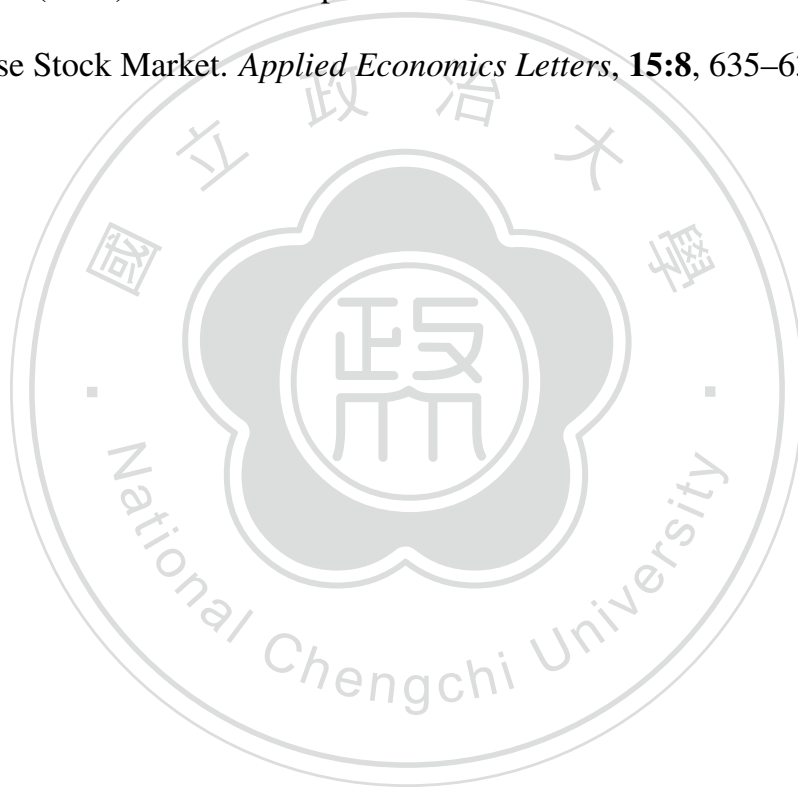
- cesses via the Empirical Characteristic Function. *Journal of Business & Economic Statistics*, **20:2**, 198–212.
- Knight, J. L. and S. E. Satchell (1996). Estimation of Stationary Stochastic Processes via the Empirical Characteristic Function. *Working Paper*, Department of Economics, University of Western Ontario.
- Knight, J. L. and S. E. Satchell (1997). The Cumulant Generating Function Estimation Method. *Econometric Theory*, **13:2**, 170–184.
- Knight, J. L. and J. Yu (2002). The Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation. *Econometric Theory*, **18**, 691–721.
- Lehkonen, H. (2010). Bubble in China. *International Review of Financial Analysis*, **19**, 113–117.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, **36:4**, 394–419.
- Mandelbrot, B. and H. M. Taylor (1967). On the Distribution of Stock Price Difference. *Operations Research*, **15:6**, 1057–1062.
- McNeil, A. J. and R. Frey (2000). Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach. *Journal of Empirical Finance*, **7:3-4**, 271–300.
- Mokhtar, S. H., A. M. Nassir and T. Hassan (2006). Detecting Rational

- Speculative Bubbles in the Malaysian Stock Market. *International Research Journal of Finance and Economics*, **6**, 102–115.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, **59:2**, 347–370.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1065–1076.
- Phillips, P., Y. Wu and J. Yu (2011) Explosive Behavior in the 1990s Nasdaq: When Did Exuberance Escalate Asset Values? *International Economic Review*, **52**, 201–226.
- Phillips, P., S. Shi and J. Yu (2012). Testing for Multiple Bubbles. Cowles Foundation Discussion Paper, 1843.
- Politis, D. N. (2004). A Heavy-Tailed Distribution for ARCH Residuals with Application to Volatility Prediction. *Annals of Economics and Finance*, **5**, 283–298.
- Praetz, P. D. (1972). The Distribution of Share Price Changes. *The Journal of Business*, **45:1**, 49–55.
- Sarno, L. and M. P. Taylor (1999). Moral Hazard, Asset Price Bubbles, Capital Flows, and the East Asian Crisis: The First Tests. *Journal of International Money and Finance*, **18**, 637–657.

Yu, J. (1998). The Empirical Characteristic Function in Time-Series Estimation. Ph.D. thesis, University of Western Ontario.

Yu, J. (2004). Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications. *Econometric Reviews*, **23**, 93–123.

Zhang, B. (2008). Duration Dependence Test for Rational Bubbles in Chinese Stock Market. *Applied Economics Letters*, **15:8**, 635–639.



附錄

A 一般動差估計法 (generalized method of moment estimator, GMM estimator)

我們根據 Hansen(1982)，假設 X 之 l 階動差如下

$$E(f(X_j; \theta_0)) = 0,$$

其中， $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ ，且根據強大數法則 (the strong law of large numbers, SLLN)，我們可以得到

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta) \xrightarrow{a.s.} E(f(X_j; \theta)).$$

一般動差估計法的基本概念是最小化樣本動差與母體動差的距離，表示為

$$\min_{\theta} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta)' W_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j; \theta),$$

其中， W_n 為半正定 (positive semidefinite) 加權矩陣。在滿足正規條件下，一般動差估計法具有一致性與漸近常態的性質。