

國立政治大學統計學系研究所

碩士學位論文

Lévy 過程下

Stochastic Volatility 與 Variance Gamma 之模型

估計與實證分析

Estimation and Empirical Analysis of

Stochastic Volatility Model and Variance Gamma Model

under Lévy Processes

指導教授：林士貴 博士

翁久幸 博士

研究生：黃國展 撰

中華民國一百零六年七月

Lévy 過程下 Stochastic Volatility 與 Variance Gamma 之模型

估計與實證分析

學生:黃國展

指導教授：林士貴 博士

翁久幸 博士

國立政治大學統計系

摘要

本研究以 Lévy 過程為模型基礎，考慮 Merton Jump 及跳躍強度服從 Hawkes Process 的 Merton Jump 兩種跳躍風險，利用 Particle Filter 方法及 EM 演算法估計出模型參數並計算出對數概似值、AIC 及 BIC。以 S&P500 指數為實證資料，比較隨機波動度模型、Variance Gamma 模型及兩種不同跳躍風險對市場真實價格的配適效果。實證結果顯示，隨機波動度模型其配適效果勝於 Variance Gamma 模型，且加入跳躍風險後可使模型配適效果提升，尤其在模型中加入跳躍強度服從 Hawkes Process 的 Merton Jump，其配適效果更勝於 Merton Jump。整體而言，本研究發現，以 S&P500 指數為實證資料時，SVHJ 模型有較好的配適效果。

關鍵詞：隨機波動度模型、波動度聚集、Lévy 過程、跳躍風險、粒子濾波器。

Estimation and Empirical Analysis of
Stochastic Volatility Model and Variance Gamma Model
under Lévy processes

Student: Kuo-Chan Huang

Advisor: Dr. Chiu-Hsing Weng

Dr. Shih-Kuei Lin

Department of Statistics, National Chengchi University

Abstract

This paper, based on the Lévy process, considers two kinds of jump risk, Merton Jump and the Merton Jump whose jump intensity follows Hawkes Process. We use Particle Filter method and EM Algorithm to estimate the model parameters and calculate the log-likelihood value, AIC and BIC. We collect the S&P500 index for our empirical analysis and then compare the goodness of fit between the stochastic volatility model, the Variance Gamma model and two different jump risks. The empirical results show that the stochastic volatility model is better than the Variance Gamma model, and it is better to consider the jump risk in the model, especially the Merton Jump whose jump intensity follows Hawkes Process. The goodness of fit is better than Merton Jump. Overall, we find SVHJ model has better goodness of fit when S&P500 index was used as the empirical data.

Keywords : *Stochastic volatility model, Volatility clustering, Lévy-process, Jump risk, Particle Filter*

目錄

第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
第二章 文獻回顧.....	3
2.1 Lévy Process	3
2.2 隨機波動度模型	3
2.3 Particles Filter	5
第三章 研究方法.....	6
3.1 Lévy Process	6
3.2 報酬率模型	9
3.3 Particle Filter.....	13
3.4 Expectation-Maximization Algorithm.....	16
第四章 實證分析.....	18
4.1 模擬分析.....	19
4.2 實證結果.....	19
第五章 結論.....	22
參考文獻.....	23
附錄	
附錄 A：概似函數推導.....	25

表次

表 1：各模型對應之隱藏變數 X_t 及粒子 X_t^i 對應之 w_t^i	15
表 2：各模型對應之概似函數.....	17
表 3：模擬一次之模擬結果(一).....	34
表 4：模擬一次之模擬結果(二).....	35
表 5：模擬一百次之模擬結果平均 (一).....	36
表 6：模擬一百次之模擬結果平均 (二).....	37
表 7：實證資料各段之敘述性統計.....	38
表 8：實證資料各年之敘述性統計.....	39
表 9：2002 年至 2016 年之實證結果.....	40
表 10：2002 年至 2006 年之實證結果.....	41
表 11：2007 年至 2012 年之實證結果.....	42
表 12：2013 年至 2016 年之實證結果.....	43

圖次

圖 1：S&P500 指數走勢.....	29
圖 2：S&P500 指數之對數報酬率走勢.....	29
圖 3：2002 年至 2016 年 SVHJ 模型之粒子平均.....	30
圖 4：2002 年至 2016 年 VGHJ 模型之粒子平均.....	30
圖 5：2002 年至 2006 年 SVHJ 模型之粒子平均.....	31
圖 6：2002 年至 2006 年 VGHJ 模型之粒子平均.....	31
圖 7：2007 年至 2012 年 SVHJ 模型之粒子平均.....	32
圖 8：2007 年至 2012 年 VGHJ 模型之粒子平均.....	32
圖 9：2013 年至 2016 年 SVHJ 模型之粒子平均.....	33
圖 10：2013 年至 2016 年 VGHJ 模型之粒子平均.....	33

第一章 緒論

自 2000 年以來，國際金融事件頻繁，例如英國脫離歐盟、希臘債務危機、歐債危機、冰島破產、次級房貸風暴及網路泡沫效應...等，而這些國際金融事件也對市場造成了影響，可能會使跳躍風險的發生更加的頻繁，這些突如其來的波動往往使得投資人產生大量的收益或虧損。

1.1 研究動機

國際金融事件頻繁發生，造成市場的不確定性增加，其導致股價產生大幅度的變動並使投資風險大幅增加，進而產生的跳躍風險往往使得投資人產生大量的收益或虧損。在財務工程領域中，如何建構符合標的資產價格的財務模型，使其能夠準確地描述市場價格變動，一直是一個重要的研究方向。

Hull and White (1987)建構出可以解釋波動度可能受隨機因素所影響的 SV 模型，這種模型被廣泛運用在配適資產的對數報酬率。然而，SV 模型雖然能描述對數報酬率的波動度，但在國際金融事件頻繁發生下可能頻繁的產生跳躍風險，本研究關心在這種情況下 SV 模型是否依然能夠有良好的配適能力，因此本研究將 SV 模型與能夠捕捉無限活躍跳躍的 VG Process 為基礎的模型進行比較，而兩種不同基礎的模型究竟哪一種最符合對數報酬率的變動是本研究關心的主題之一

面對金融市場上的跳躍現象，Merton (1976)所提出的跳躍擴散模型(Jump Diffusion Model)往往為各研究首要的選項。然而，Merton Jump 雖然能描述跳躍風險，但卻無法描述跳躍風險前後期之間的相關性，因此本研究藉由假設跳躍強

度服從 Hawkes Process 來試圖描述跳躍風險前後期之間的相關性，而 Hawkes Process 是否能提升模型配適能力也是本研究關心的主題之一。

1.2 研究目的

本文目的主要分為理論與實證兩大部分，理論部份：本研究採用 Hull and White (1987) 提出的隨機波動度 (SV, Stochastic Volatility) 模型設定與 Madan et al. (1998) 提出的 VG 過程為模型的基礎設定，以這兩種模型為基礎，分別加入兩種跳躍過程，Merton (1976) 所提出的 Merton Jump 及假設跳躍強度服從 Hawkes (1971b) 提出的 Hawkes Process 的 Merton Jump，探討各模型配適對數報酬率之適合度。實證的部分：本研究採用 S&P500 指數作為實證資料，研究期間為 2002 年至 2016 年，透過 Particle Filter 及 EM 演算法來估計模型參數並計算對數概似值、AIC 及 BIC。透過對數概似值、AIC 及 BIC 來比較兩種 Lévy 過程為基礎的模型對對數報酬率的配適程度，檢驗何種 Lévy 過程為基礎的模型表現較佳、考慮跳躍風險下的模型是否有較佳的配適表現及假設跳躍強度服從 Hawkes Process 是否能提升 Merton Jump 描述跳躍風險的能力。

本文主要架構如下：第 2 章對 Lévy Process、隨機波動度模型、Particle Filter 進行文獻回顧，第 3 章詳細敘述 Lévy Process、本研究所使用之模型與參數估計方法，第 4 章對實證資料做介紹，並提出模型參數估計之模擬與實證結果，第 5 章為本文結論。

第二章 文獻回顧

本章首先會於第一節回顧屬於 Lévy Process 隨機過程的相關文獻，於第二節回顧波動度模型的相關文獻，其中包含以時間序列角度出發的自我回歸條件異質變異(ARCH, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 模型相關之文獻及另一種強調隨機性的隨機波動度(SV, Stochastic Volatility)模型之相關文獻，最後於第三節回顧與 Particles Filter 相關之文獻。

2.1 Lévy Process

1827 年，Robert Brown 透過顯微鏡觀察到液體中花粉的微小粒子，其呈現連續且不規則的運動，而此現象即為布朗運動(Brownian Motion)。Wiener(1923)進一步將布朗運動以數學的方式建構出來，因此布朗運動又稱為韋納過程 (Wiener Process)。Bachelier(1900)提出股價的變動與布朗運動類似，並以布朗運動描述股價的動態。至今布朗運動的應用已十分廣泛，成為主流的評價模型之一。

為了更加精準的去描述股價的變動，至今發展出不少的隨機過程。Cox and Ross(1976)提出純跳躍模型(Pure-jump Model)，藉由此模型來解釋股價出現跳躍風險的現象，Merton(1976)進一步將純跳躍模型進行改善，提出跳躍擴散模型(Jump Diffusion Model)，藉由將模型定義為具有卜瓦松過程的跳躍過程，觀察離散時間點之下，當一個重大的新資訊進入金融市場時，該資訊對股價所產生的不尋常的巨大價格波動。Madan and Seneta(1990) 與 Madan and Milne(1991)提出 VG 過程(Variance Gamma Process)，該過程假設發生兩次布朗運動的間隔時間服從 Gamma 分配，藉由將布朗運動的間格時間視為隨機變數並納入模型中，進一步以不同角度來描述股價的變動。

2.2 隨機波動度模型

Engle(1982)提出自我回歸條件異質變異(ARCH, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)模型,以自我回歸模型的形式,將過往可利用的資訊納入模型中,讓不同時間點下的條件變異會因過往可利用的資訊不同而有所不同,藉此改善過去假設條件變異數為常數所產生的問題。Bollerslev (1986)將 ARCH 模型做出了改進,提出廣義自我回歸條件異質變異(GARCH, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity model)模型,以 ARCH 模型為基礎並進一步將條件變異數以 ARCH 模型的形式表示,藉此來達到比 ARCH 模型更精準的描述條件變異數在不同時間點下變化的效果。ARCH 模型及 GARCH 模型被廣泛的運用及進一步的改進,如 Nelson(1991)提出的 E-GARCH 模型、Engle et al. (1987) 提出的 GARCH-M 模型...等。然而,ARCH 模型及 GARCH 模型這類的模型雖然解決了波動度隨時間變動的問題,但這類的模型無法處理當報酬率出現異常波動時,當期條件變異數所產生的變動。

為了處理這一問題,Hull and White (1987)提出隨機波動度(SV, Stochastic Volatility)模型,考慮波動度具有隨機性,假設資產價格及波動度皆服從布朗運動,藉此假設來反映波動度可能受隨機因素所影響,其中更假設資產價格及波動度存在相關係數。Heston(1993)進一步改進 SV 模型,假設變異數服從 Cox et al.(1985)所提出的 CIR 過程,藉由此假設,使變異數維持在正值並讓變異數能有均數回歸(Mean Reversion)的性質。然而 SV 模型雖然能解決當報酬率出現異常波動時,當期條件變異數所產生的變動,但 SV 模型僅考慮資產價格服從布朗運動,沒有考慮標的資產價格可能會有跳躍擴散過程,因此沒有考慮標的資產價格可能會有跳躍擴散過程成為一個 SV 模型顯而易見的缺點。

Merton(1976)提到,標的資產價格具有不連續的大幅波動且服從卜瓦松過程,並將其定義為跳躍擴散 (Jump Diffusion) 過程。Bates (1996)將 Merton (1976)與 Heston (1993)所提出的模型進一步整合,提出了隨機波動與跳躍擴散模型 (SVJ,

Stochastic Volatility Jump Diffusion Model)，藉由將跳躍擴散過程加入原本的 SV 模型中，來改善 SV 模型原本沒有考慮跳躍風險的缺點。因此，相較於 SV 模型，SVJ 模型能更精準的描述報酬率的變動。隨機波動度模型至今被廣泛的運用及改進，如 Bakshi et al. (1997)提出的 SVSI-J 模型及 Eraker (2004)提出的 SVSCJ 模型...等，然而這些改進過後的模型更精準地描繪了報酬率，但也因為更複雜的模型及使用的參數更多，使得模型相對變的更複雜，參數估計的難度也相對提升。

2.3 Particles Filter

Kalman(1960)提出 Kalman Filter，此方法是建立在馬可夫鍊及線性模型上，假設其中的誤差為常態分配，且假設狀態空間模型為線性模型。此方法主要分為預測及更新兩步驟。對於每一期，預測步驟根據上一期的估計對當期進行估計，並在更新步驟中藉由觀察值對預測步驟中當期的估計值進行修正，重複執行此兩步驟直到最後一期。

然而，Kalman Filter的基本假設使其只能運用在高斯及線性的問題，Del Moral, Pierre(1996)提出了Particles Filter，透過從狀態變數的後驗分配中抽取粒子，並根據觀察值對粒子進行篩選，透過篩選完的粒子來近似該後驗分配。相較於Kalman Filter，由於Particles Filter並沒有常態分配的假設，而是使用狀態變數的後驗分配，因此能處理非高斯、非線性的問題。因為Particles Filter能處理較多的問題，因此被廣泛地運用且進一步改進，Pitt (2002) 藉由估計隨機波動度模型比較Particles Filter及Kalman Filter兩種濾波方法，發現Particles Filter能較Kalman Filter有效且快速地進行濾波。至今Particles Filter被頻繁的運用在模型參數估計上，包含Christoffersen et al.(2010)運用Particles Filter對Affine Square Root (SQR) Stochastic Volatility Model 進行參數估計及Ornathanalai (2014)用Particles Filter對GARCH- Lévy模型進行參數估計。

第三章 研究方法

首先本章將會定義並介紹 Lévy Process，再來將介紹本文所使用的各個模型，最後介紹參數估計時所用到的方法，Particle Filter 及 EM 演算法，運用 Particle Filter 得到隱藏變數的資訊，藉由隱藏變數的資訊，透過 EM 演算法進行參數估計。

3.1 Lévy Process

首先定義 Lévy process，若一個隨機過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 滿足以下條件，則為 Lévy process：

1. $X_0 = 0$
2. 獨立增量：對任意不重疊之時間區間的增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互獨立，其中各時間點須滿足 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ ，即為獨立增量
3. 穩定增量：對任意不重疊之時間區間的增量 $X_t - X_s$ 與 X_{t-s} 服從相同分配，其中 $0 \leq s < t < \infty$
4. 對任意時間點 t ， X_t 須滿足右連續且左極限存在

本文將使用其中三種 Lévy process，分別為 Wiener Process、Variance Gamma Process 及 Compound Poisson Process。

3.1.1 Wiener Process

Wiener Process 屬於 Lévy Process，亦為最有名的 Lévy Process 之一，其假設對於任意的正實數 t ， X_t 會服從 $Normal(0, t)$ ， X_t 之機率密度函數為：

$$f(X_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{X_t^2}{2t}}$$

X_t 之特徵函數為：

$$E[e^{i\phi X_t}] = e^{\frac{t\phi^2}{2}}$$

3.1.2 Variance gamma Process

Variance Gamma Process 屬於 Lévy Process， Variance Gamma Process 可表示成時間變動為 Gamma 分配的 Wiener Process，即

$$X_t = \theta G_t + \delta W_{G_t}$$

其中 G_t 服從 $Gamma(\frac{t}{\nu}, \nu)$ ， W_{G_t} 服從 $Normal(0, G_t)$ 。

X_t 之機率密度函數為：

$$f(X_t) = \int_0^\infty \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(X - \theta g)^2}{2\delta^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} dg$$

X_t 之特徵函數為：

$$E[e^{i\phi X_t}] = \left(\frac{1}{1 - i\theta\nu\phi + \left(\frac{\delta^2\nu}{2}\right)\phi^2} \right)^{\frac{t}{\nu}}$$

3.1.3 Compound Poisson Process

本文運用了兩種 Compound Poisson Process，分別是 Merton Jump 及假設跳躍強度服從 Hawkes Process 的 Merton Jump，於後續章節將以 Merton Jump 及 Hawkes Jump 分別表示兩跳躍過程。

Merton Jump 屬於 Lévy Process，其假設單位時間區間的增量次數為 N_t ，每

次的增量為 J_t ，Merton Jump 可表示為

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} J_{t,i}$$

其中 N_t 服從 $Poisson(\bar{\lambda})$ ， J_t 服從 $Normal(\mu_J, \sigma_J^2)$ 。

X_t 之機率密度函數為：

$$f(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\lambda}} \bar{\lambda}^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi n}} \exp\left(\frac{-(y - n\mu_J)^2}{2n\sigma_J^2}\right)$$

X_t 之特徵函數為：

$$E[e^{i\phi X_t}] = \exp\left[\lambda \left(e^{\phi\mu_J + \frac{1}{2}\phi^2\sigma_J^2} - 1\right)\right]$$

Hawkes Jump 屬於 Lévy Process，其假設單位時間區間的增量次數為 N_t ，每次的增量為 J_t ，Hawkes Jump 可表示為

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} J_{t,i}$$

其中跳躍強度 λ_t 服從 Hawkes Process，(3-1) 式為 λ_t 之動態過程。

$$\lambda_t = \lambda_{t-1} + \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_{t-1}) + \beta N_{t-1} \quad (3-1)$$

N_t 服從 $Poisson(\lambda_t)$ ， J_t 服從 $Normal(\mu_J, \sigma_J^2)$ 。

X_t 之機率密度函數為：

$$f(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_t} \lambda_t^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi n}} \exp\left(\frac{-(y - n\mu_J)^2}{2n\sigma_J^2}\right)$$

X_t 之特徵函數為：

$$E[e^{i\phi X_t}] = \exp\left[\lambda_t \left(e^{\phi\mu_J + \frac{1}{2}\phi^2\sigma_J^2} - 1\right)\right]$$

當 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 0$ 時，Hawkes Jump 會退化成 Merton Jump。

3.2 報酬率模型

本節將介紹本研究所使用之報酬率模型，首先，本文假設 R_t 為時間點 t 之下的報酬率， S_t 為時間點 t 之下的資產價格，(3-2)式為對數報酬率的動態過程。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) - \xi_y(1) + z_t + y_t \quad (3-2)$$

μ 為無風險利率， z_t 與 y_t 為 Lévy Process，其中假設 z_t 與 y_t 相互獨立，而為了使報酬率滿足平賭條件，在報酬率的動態過程中減去 $\xi_z(\phi)$ 及 $\xi_y(\phi)$ ，其中 $\xi_z(\phi)$ 為 z_t 的累積生成函數， $\xi_y(\phi)$ 為 y_t 的累積生成函數。

3.2.1 SV Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中僅包含 z_t ， z_t 為 Wiener Process，並將 SV 模型寫成(3-3)式。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) + z_t \quad (3-3)$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma\sqrt{V_{t-1}}W_{t,2} \quad (3-4)$$

$$z_t = \sqrt{V_{t-1}}W_{t,1} \sim N(0, V_{t-1})$$

V_{t-1} 為隨機波動度，假設 V_{t-1} 服從之動態過程為(3-4)式，其中

$$W_{t,1} = \varepsilon_1, W_{t,2} = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \sim N(0,1), \varepsilon_2 \sim N(0,1), \text{corr}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

因此隨機波動度的動態過程可以改寫成(3-5)式。

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma\sqrt{V_{t-1}}(\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2) \quad (3-5)$$

$\xi_z(\phi)$ 為 z_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = \frac{V_{t-1}\phi^2}{2}。$$

3.2.2 SVMJ Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中包含 z_t 及 y_t ， z_t 為 Wiener Process， y_t 為 Merton Jump，並將 SVMJ 模型寫成(3-6)式。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) - \bar{\lambda}\xi_y(1) + z_t + y_t \quad (3-6)$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma\sqrt{V_{t-1}}W_{t,2} \quad (3-7)$$

z_t 為具有隨機波動度 V_{t-1} 的 Wiener Process， V_{t-1} 為隨機波動度，假設 V_{t-1} 服從之動態過程為(3-7)式，其中

$$W_{t,1} = \varepsilon_1, W_{t,2} = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \sim N(0,1), \varepsilon_2 \sim N(0,1), \text{corr}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

因此隨機波動度的動態過程可以改寫成(3-8)式。

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma\sqrt{V_{t-1}}(\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2) \quad (3-8)$$

另外假設跳躍次數 N_t 服從 Poisson($\bar{\lambda}$)， $\bar{\lambda}$ 為跳躍強度， $\xi_z(\phi)$ 、 $\xi_y(\phi)$ 分別為 z_t 及 y_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = \frac{V_{t-1}\phi^2}{2} \quad \xi_y(\phi) = e^{\phi\mu_J + \frac{\phi^2\sigma_J^2}{2}} - 1$$

3.2.3 SVHJ Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中包含 z_t 及 y_t ，且 z_t 為 Wiener Process， y_t 為 Hawkes Jump，並將 SVHJ 模型寫成(3-9)式。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) - \lambda_t \xi_y(1) + z_t + y_t \quad (3-9)$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma \sqrt{V_{t-1}} W_{t,2} \quad (3-10)$$

z_t 為一具有隨機波動度 V_{t-1} 的 Wiener Process， V_{t-1} 為隨機波動度，假設 V_{t-1} 服從之動態過程為(3-10)式，其中

$$W_{t,1} = \varepsilon_1, W_{t,2} = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \sim N(0,1), \varepsilon_2 \sim N(0,1), \text{corr}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

因此隨機波動度的動態過程可以改寫成(3-11)式。

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) + \sigma \sqrt{V_{t-1}} (\rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2) \quad (3-11)$$

另外假設跳躍次數 N_t 服從 Poisson(λ_t)， λ_t 為跳躍強度，假設 λ_t 服從 Hawkes Process，其動態過程為(3-12)式。

$$\lambda_t = \lambda_{t-1} + \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_{t-1}) + \beta N_{t-1} \quad (3-12)$$

$\xi_z(\phi)$ 、 $\xi_y(\phi)$ 分別為 z_t 及 y_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = \frac{V_{t-1} \phi^2}{2} \quad \xi_y(\phi) = e^{\phi \mu_j + \frac{\phi^2 \sigma_j^2}{2}} - 1$$

3.2.4 VG Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中僅包含 z_t ， z_t 為 Variance Gamma Process，並將 VG 模型寫成(3-13)式。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) + z_t \quad (3-13)$$

本文假設 $z_t = \delta W_{G_t}$, $W_{G_t} \sim Normal(0, G_t)$, $G_t \sim Gamma\left(\frac{t}{v}, v\right)$,

$\xi_z(\phi)$ 為 z_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = -\frac{1}{v} \ln\left(1 - \frac{v\phi^2\delta^2}{2}\right)。$$

3.2.5 VGMJ Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中包含 z_t 及 y_t , z_t 為 Variance Gamma Process , y_t 為 Merton Jump , 並將 VGMJ 模型寫成(3-14)式。

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) - \bar{\lambda} \xi_y(1) + z_t + y_t \quad (3-14)$$

本文假設 $z_t = \delta W_{G_t}$, $W_{G_t} \sim Normal(0, G_t)$, $G_t \sim Gamma\left(\frac{t}{v}, v\right)$, y_t 為 Merton Jump , 其中 N_t 服從 $Poisson(\bar{\lambda})$, $\xi_z(\phi)$ 、 $\xi_y(\phi)$ 分別為 z_t 及 y_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = -\frac{1}{v} \ln\left(1 - \frac{v\phi^2\delta^2}{2}\right) \quad \xi_y(\phi) = e^{\phi\mu_J + \frac{\phi^2\sigma_J^2}{2}} - 1$$

3.2.6 VGHJ Model

假設報酬率 R_t 的動態過程中包含 z_t 及 y_t , z_t 為 Variance Gamma Process , y_t 為 Hawkes Jump , 並將 VGHJ 模型寫成(3-15)式：

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu - \xi_z(1) - \lambda_t \xi_y(1) + z_t + y_t \quad (3-15)$$

本文假設 $z_t = \delta W_{G_t}$, $W_{G_t} \sim Normal(0, G_t)$, $G_t \sim Gamma\left(\frac{t}{v}, v\right)$, y_t 為 Hawkes Jump , 其中 N_t 服從 $Poisson(\lambda_t)$ 且假設 λ_t 服從 Hawkes Process , 其動態過程可寫為(3-16)式，

$$\lambda_t = \lambda_{t-1} + \alpha(\bar{\lambda} - \lambda_{t-1}) + \beta N_{t-1} \quad (3-16)$$

$\xi_z(\phi)$ 、 $\xi_y(\phi)$ 分別為 z_t 及 y_t 的累積生成函數。

$$\xi_z(\phi) = -\frac{1}{\nu} \ln \left(1 - \frac{\nu \delta^2}{2} \right) \quad \xi_y(\phi) = e^{\phi \mu_J + \frac{\phi^2 \sigma_J^2}{2}} - 1$$

3.3 Particle Filter

本研究利用 Particle Filter 來處理有隱藏變數(Latent Variable)的狀態空間模型，此方法主要是透過應用貝氏理論，藉由粒子(Particles)模擬隱藏變數，並進一步根據觀察值對各粒子加權以近似所求的後驗分配。Particle Filter 主要流程為在各資料時點下，利用蒙地卡羅濾波法(Monte Carlo Filter) 建構粒子與其對應的權重，再透過重複抽樣(Resampling) 根據不同的權重篩選粒子，重複執行上述兩步驟直到近似完各時點下隱藏變數的後驗分配。

3.3.1 蒙地卡羅濾波法(Monte Carlo Filter)

首先定義狀態空間模型(State Space Model)，狀態空間模型由(3-17)式及(3-18)式兩方程式組成

$$X_t = F_t(X_{t-1}, u_t) \quad (3-17)$$

$$R_t = H_t(X_t, v_t) \quad (3-18)$$

假設 X_t 為時間點 t 下的隱藏變數， u_t 為狀態誤差， F_t 為狀態方程式。 R_t 為時間點 t 下的觀察值， v_t 為觀測誤差， H_t 為觀測方程式，狀態空間模型中的兩組方程式可分別表示成(3-19)式及(3-20)式的分配形式。

$$F_t(X_t | X_{t-1}, u_t) \quad (3-19)$$

$$H_t(R_t | X_t, v_t) \quad (3-20)$$

雖然無法直接觀察到隱藏變數 X_t ，但由於觀察值 R_t 會包含隱藏變數 X_t 的資訊，因此可以藉由觀察值來得到有關隱藏變數的資訊。隱藏變數的後驗分配可拆解如(3-21)式。

$$f(X_t | R_t) = \frac{f(X_t, R_t)}{f(R_t)} = f(R_t | X_t) \frac{f(X_t)}{f(R_t)} \propto f(R_t | X_t) f(X_t) \quad (3-21)$$

由(3-21)式之拆解可知，隱藏變數的後驗分配會正比於觀察值分配乘上隱藏變數分配，然而無法直接觀察到隱藏變數，因此透過建構 N 個粒子 $\{X_t^i\}_{i=1}^N$ 來模擬隱藏變數 X_t ，

$$\{X_t^i\}_{i=1}^N \sim F_t(X_t|X_{t-1}, u_t)$$

並運用建構的粒子將(3-21)式改寫成(3-22)式，

$$f(X_t^i|R_t) = \frac{f(X_t^i, R_t)}{f(R_t)} = f(R_t|X_t^i) \frac{f(X_t^i)}{f(R_t)} \propto f(R_t|X_t^i)f(X_t^i) \quad (3-22)$$

再來建構各粒子對應的權重 π_t^i ，權重 π_t^i 的定義如(3-23)式。

$$w_t^i = f(R_t|X_t^i), \pi_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{i=1}^N w_t^i} = \frac{f(R_t|X_t^i)}{\sum_{i=1}^N f(R_t|X_t^i)} \quad (3-23)$$

表 1 為各模型的隱藏變數 X_t 及粒子 X_t^i 對應之 w_t^i

表 1：各模型對應之隱藏變數 X_t 及粒子 X_t^i 對應之 w_t^i

模型	隱藏變數 X_t	粒子 X_t^i 對應之 w_t^i
SV	$X_t = \{V_{t-1}\}$	$w_t^i = (2\pi V_{t-1}^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1))\right)^2}{2V_{t-1}^i} \right]$
SVMJ	$X_t = \{V_{t-1}, N_t, y_t\}$	$w_t^i = (2\pi V_{t-1}^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1) - \xi_y(1) + y_t^i)\right)^2}{2V_{t-1}^i} \right]$
SVHJ	$X_t = \{V_{t-1}, \lambda_t, N_t, y_t\}$	$w_t^i = (2\pi V_{t-1}^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1) - \xi_y(1) + y_t^i)\right)^2}{2V_{t-1}^i} \right]$
VG	$X_t = \{G_t\}$	$w_t^i = (2\pi G_t^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1))\right)^2}{2G_t^i} \right]$
VGMJ	$X_t = \{G_t, N_t, y_t\}$	$w_t^i = (2\pi G_t^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1) - \xi_y(1) + y_t^i)\right)^2}{2G_t^i} \right]$
VGHJ	$X_t = \{G_t, \lambda_t, N_t, y_t\}$	$w_t^i = (2\pi G_t^i)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(R_t - (\mu - \xi_z(1) - \xi_y(1) + y_t^i)\right)^2}{2G_t^i} \right]$

3.3.2 重複抽樣(Resampling)

為了調整每一個資料時點下在蒙地卡羅濾波法(Monte Carlo Filter)中所建構的粒子及其所對應的權重 $\{X_t^i, \pi_t^i\}_{i=1}^N$ 的出現頻率，透過重複抽樣增加權重大的粒子的出現數量，減少權重小的粒子的出現數量，藉此讓重複抽樣後的粒子 $\{X_t^{i*}\}_{i=1}^N$ 能夠具有相同的權重。

為了執行重複抽樣，首先，從 $Uniform(0,1)$ 抽出 N 個隨機亂數 $\{r_t^j\}_{j=1}^N$ ，再來建立各粒子對應的累積權重 $\{s_t^i\}_{i=1}^N$ ，

$$s_t^i = \sum_{k=1}^i \pi_t^k$$

之後建立各粒子對應的 N 個累積權重的區間。

$$[0, s_t^1), [s_t^1, s_t^2), \dots, [s_t^{N-2}, s_t^{N-1}), [s_t^{N-1}, s_t^N]$$

找到各隨機亂數與其對應的累積權重之區間，計算各區間所包含的亂數個數，該區間包含的亂數個數即表示該粒子該複製的個數，假設若 X_t^1 所對應的區間 $[0, s_t^1)$ 包含 2 個隨機亂數，則粒子 X_t^1 複製兩個， X_t^2 所對應的區間 $[s_t^1, s_t^2)$ 包含 0 個隨機亂數，則刪減粒子 X_t^2 ，以此類推，最後以重複抽樣所複製及刪減完的粒子 $\{X_t^{i*}\}_{i=1}^N$ 取代執行重複抽樣前的粒子，並以重複抽樣後的粒子 $\{X_t^{i*}\}_{i=1}^N$ 近似隱藏變數的後驗分配。

3.4 Expectation-Maximization Algorithm

本研究利用 EM 演算法來估計狀態空間模型中的參數，EM 演算法分成兩步驟，E 步驟及 M 步驟。於 E 步驟，根據狀態空間模型建構概似函數。

$$\begin{aligned} f(X_{0:T}, R_{1:T}) &= f(X_0)f(R_1|X_0)f(X_1|X_0, R_1) \dots f(R_T|X_{0:T-1}, R_{1:T-1})f(X_T|X_{0:T-1}, R_{1:T}) \\ &= f(X_0) \prod_{t=1}^T f(R_t|X_{0:t-1}, R_{1:t-1}) \prod_{t=1}^T f(X_t|X_{0:t-1}, R_{1:t}) \end{aligned}$$

將概似函數中的隱藏變數以前述 Particle Filter 所得的粒子取代後可得(3-25)式。

$$f(X_{0:T}^{i*}, R_{1:T}) = f(X_0^{i*}) \prod_{t=1}^T f(R_t|X_{0:t-1}^{i*}, R_{1:t-1}) \prod_{t=1}^T f(X_t^{i*}|X_{0:t-1}^{i*}, R_{1:t}) \quad (3-25)$$

為將以粒子取代隱藏變數的概似函數取期望值可得(3-26)式，至此即完成 E 步驟，其中 Θ^{start} 為參數起始值。

$$E[f(X_{0:T}^{i*}, R_{1:T})|\Theta^{start}] \quad (3-26)$$

於 M 步驟，根據 E 步驟所得之概似函數，建構出對數概似函數，如(3-27)式

$$L(\Theta) = \ln\{E[f(X_{0:T}^{i*}, R_{1:T})|\Theta^{start}]\} \quad (3-27)$$

最後找出一組參數集合 $\hat{\Theta}$ 能使對數概似函數值最大化，則該組參數即為所求參數

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{arg\,min}} L(\Theta)$$

表 2 為各模型的概似函數，詳細的概似函數推導請參閱附錄 A

表 2：各模型對應之概似函數

模型	概似函數
SV	$f(V_0) \prod_{t=1}^T f(R_t V_{t-1}) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t R_t)$
SVMJ	$f(V_0) \prod_{t=1}^T f(N_t)f(y_t N_t)f(R_t V_{t-1}, N_t, y_t) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t R_t)$
SVHJ	$f(V_0)f(N_0) \prod_{t=1}^T f(N_t \lambda_t)f(y_t N_t)f(R_t V_{t-1}, N_t, y_t) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t R_t)$
VG	$\prod_{t=1}^T f(G_t)f(R_t G_t)$
VGMJ	$\prod_{t=1}^T f(G_t)f(N_t)f(y_t N_t)f(R_t G_t, N_t, y_t)$
VGHJ	$\prod_{t=1}^T f(G_t)f(N_t \lambda_t)f(y_t N_t)f(R_t G_t, N_t, y_t)$

第四章 模擬分析與實證分析

本章首先介紹針對不同模型進行模擬分析之模擬結果，之後將會介紹運用實證資料進行研究分析之實證結果。

4.1 模擬分析

為了確認所使用之方法能正確的藉由電腦程式執行，因此藉由模擬一組樣本進行參數估計，並確認估計結果與預先設定的參數值接近。本研究之模擬分析分兩次進行，第一次為模擬次數一次，藉由模擬次數一次之模擬結果觀察估計之參數值、參數標準差及對數概似值並與預設之參數進行比較。第二次為模擬次數一百次，將模擬次數一百次之參數估計值加以平均，並與預設之參數進行比較。

附錄表 3 及表 4 為模擬次數一次之模擬結果，由模擬結果可知，在模擬一次的情況下，各參數估計值與給定之參數值十分接近。而附錄表 5 及表 6 為模擬一百次之模擬結果平均，由模擬結果可知，模擬一百次之模擬結果平均與給定之參數值也是十分接近，且從標準差可知，一百次之模擬結果已有收斂的現象。

4.2 實證分析

首先本章會針對所選用之 S&P500 指數之對數報酬率資料去計算敘述性統計，再來會進行實證並介紹實證之結果。本研究選取 2002 年至 2016 年 S&P500 指數之對數報酬率作為實證資料，並將選取之資料分成三個部分，分別為 2002 年至 2006 年、2007 年至 2012 年及 2013 年至 2016 年，針對不同部分的資料個別進行實證並介紹實證結果。

4.2.1 資料描述

附錄表 7 紀錄了實證資料各區段之敘述性統計，從標準差可以看出 2007 年至 2012 年之資料波動較劇烈，且該區段包含到整段資料的最小值及最大值，並由最後兩列紀錄了對數報酬率超過兩倍標準差與三倍標準差以上的筆數，顯示出該區段有跳躍風險頻繁發生的可能性。從附錄圖 1 可以看到在 2007 年至 2009 年時，S&P500 指數有急遽下降的現象，且附錄圖 2 也可以看到 2007 年至 2009 年間對數報酬率有劇烈的震盪。

在這三個不同的資料區間下，2002 年至 2006 年之實證資料具有明顯的對數報酬率震盪，但其震盪幅度較 2007 年至 2012 年之實證資料小，而 2007 年至 2012 年之實證資料具有較強烈的對數報酬率震盪，2013 年至 2016 年之實證資料則是對數報酬率震盪較為平緩的資料區間。附錄表 8 詳細記錄了各年實證資料之敘述性統計。

4.2.2 實證結果

本節將檢視各區段資料之實證結果，根據各個模型之對數最大概似值(Log likelihood Value)、AIC 及 BIC，來檢視不同模型對實證資料之配適度。

附錄表 9 為以 2002 年至 2016 年 S&P500 指數之對數報酬率作為實證資料之實證結果，其中上半部為參數估計之結果。不論以對數最大概似值(Log likelihood Value)、AIC 或 BIC 來看，SV 模型為基礎的模型表現優於以 VG 模型為基礎的模型，然而，在模型中考慮了跳躍風險後，模型表現較不考慮跳躍風險之模型有所提升，另外，考慮跳躍風險的模型中，又以加入了 Hawkes Jump 的模型表現優於加入 Merton Jump 的模型表現，綜觀六個不同模型，以 SVHJ 表現最為優異。附錄圖 3 及圖 4 分別為 SVHJ 模型及 VGHJ 模型之粒子平均圖，圖中由上到下分別是對數報酬率之走勢、波動度、跳躍大小、跳躍次數以及跳躍強度，而圖中各點是由當期用來模擬隱藏變數的粒子加以平均並描繪而成，從圖中可以看出在對數報酬率有劇

烈變動時，Particle Filter所捕捉到的粒子也有較劇烈的變動。

附錄表10紀錄了2002年至2006年區段資料之實證結果，其中上半部為參數估計之結果。以對數最大概似值(Log likelihood Value)、AIC或BIC來看，在這段對數報酬率之實證資料下，以SV模型為基礎的模型表現優於以VG模型為基礎的模型，然而，考慮跳躍風險後，模型的配適度表現較未考慮跳躍風險的模型佳，且在兩不同跳躍過程的比較上，加入了Hawkes Jump的模型配適度表現優於加入Merton Jump的模型配適度表現，綜觀六個不同模型，以SVHJ表現最為優異。附錄圖5及圖6為SVHJ模型及VGHJ模型之粒子平均圖，圖中由上到下分別是對數報酬率之走勢、波動度、跳躍大小、跳躍次數以及跳躍強度，而圖中各點是由當期用來模擬隱藏變數的粒子加以平均並描繪而成，從圖中可以看出在對數報酬率有劇烈變動時，Particle Filter所捕捉到的粒子也有較劇烈的變動。

附錄表11紀錄了2007年至2012年區段資料之實證結果，其中上半部為參數估計之結果。以對數最大概似值(Log likelihood Value)、AIC或BIC來看，在這段對數報酬率之實證資料下，以SV模型為基礎的模型表現優於以VG模型為基礎的模型，然而，考慮跳躍風險後，模型的配適度表現較未考慮跳躍風險的模型佳，且在兩不同跳躍過程的比較上，加入了Hawkes Jump的模型配適度表現優於加入Merton Jump的模型配適度表現，綜觀六個不同模型，以SVHJ表現最為優異。附錄圖7及圖8為SVHJ模型及VGHJ模型之粒子平均圖，圖中由上到下分別是對數報酬率之走勢、波動度、跳躍大小、跳躍次數以及跳躍強度，而圖中各點是由當期用來模擬隱藏變數的粒子加以平均並描繪而成，從圖中可以看出在對數報酬率有劇烈變動時，Particle Filter所捕捉到的粒子也有較劇烈的變動。

附錄表12紀錄了2013年至2016年區段資料之實證結果，其中上半部為參數估計之結果。以對數最大概似值(Log likelihood Value)、AIC或BIC來看，在這段對數報酬率之實證資料下，以SV模型為基礎的模型表現優於以VG模型為基礎的模型，然而，考慮跳躍風險後，模型的配適度表現較未考慮跳躍風險的模型佳，且

在兩不同跳躍過程的比較上，加入了Hawkes Jump的模型配適度表現優於加入Merton Jump的模型配適度表現，綜觀六個不同模型，以SVHJ表現最為優異。附錄圖9及圖10為SVHJ模型及VGHJ模型之粒子平均圖，圖中由上到下分別是對數報酬率之走勢、波動度、跳躍大小、跳躍次數以及跳躍強度，而圖中各點是由當期用來模擬隱藏變數的粒子加以平均並描繪而成，從圖中可以看出對數報酬率的變動雖然較其他區段之實證資料平緩，但其仍有變動較劇烈的區段，然而，在對數報酬率變動較為劇烈時，Particle Filter所捕捉到的粒子也有較劇烈的變動。

因此，從各段資料之實證結果可以驗證，以SV模型為基礎的模型能夠較好的描述對數報酬率的變動，在模型中考慮跳躍風險也確實能夠提升模型配適程度，且若是用Hawkes Jump來描述跳躍風險，則可以使模型的配適度更進一步的提升，在本研究之實證結果顯示，SVHJ模型具有最好的配適能力。



第五章 結論

本研究以S&P500指數為實證資料，從對數報酬率的歷史走勢可明顯觀察到波動度叢聚的現象，並從對數報酬率的敘述統計可以觀察到每年皆有跳躍的現象發生。以Hull and White (1987)提出隨機波動度模型及Madan and Seneta(1990)提出的VG模型為基準進行比較，結果顯示考慮跳躍風險能夠明顯改善模型配適度，也驗證了跳躍風險在解釋報酬率中扮演著重要的角色。

從實證的結果顯示，面對國際金融事件發生頻繁，相較於VG相關模型，隨機波動度相關模型的配適結果較佳。通過加入Merton Jump與Hawkes Jump這兩種跳躍過程，使SV模型及VG模型能夠藉此描述更劇烈的報酬率變化並改善SV模型及VG模型無法捕捉跳躍風險的缺陷。過去文獻往往偏好加入Merton Jump來解釋跳躍風險，然而加入Merton Jump確實可以改善模型配適度，但加入了Hawkes Jump後不僅能夠有效捕捉跳躍風險，還能進一步捕捉跳躍風險的叢聚現象並進一步提升模型的配適度。整體而言，本研究建議，在配適報酬率時，可以使用隨機波動度模型進行配適，並加入Hawkes Jump來捕捉跳躍風險，即本研究之SVHJ模型。

對於哪一種Lévy過程，能夠較有效的描述市場上真實報酬率走勢是本研究欲進一步探討的議題，因此未來可透過運用其他Lévy過程如NIG過程及CGMY過程來配適報酬率，檢視各種Lévy過程對於報酬率的配適情形。因此本研究未來可以繼續探討其他Lévy過程下的報酬率配適，並透過實證來比較各模型對於報酬率配適度，以提供能夠更好配適報酬率的模型。

參考文獻

- [1] Bakshi, G., Cao, C., & Chen, Z. W., 1997. Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, 52: 2003-2049.
- [2] Bates, D. S., 1996. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, 9: 69-107.
- [3] Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31: 307-327.
- [4] Christoffersen, P., Jacobs, K., & Mimouni, K., 2010. Volatility dynamics for the S&P500: Evidence from realized volatility, daily returns, and option prices. *Review of Financial Studies*, 23: 3141-3189.
- [5] Eraker, B., 2004. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices. *Journal of Finance*, 59, 1367-1404.
- [6] Heston, S. L., 1993. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6: 327-343.
- [7] Hull, J., White, A., 1987. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2): 281-300.
- [8] Madan, D. B., Milne, F., 1991. Option Pricing With V.G. Martingale Components. *Mathematical Finance*, 1(4): 39-55.
- [9] Madan, D. B., Seneta, E., 1990. The variance gamma (V.G.) model for share market returns. *Journal of Business*, 63: 511-524.
- [10] Madan, D. B., Carr, P. P., Chang, E.C., 1998. The variance gamma (V.G.) model for share market returns. *European Finance Review*, 2: 79-105.
- [11] Merton, R. C., 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, 63: 3-50.
- [12] Ornthalalai, C., 2014. Lévy jump risk: Evidence from options and returns. *Journal of Financial Economics*, 112: 69-90.
- [13] Pitt, M., Shephard, N., 1999. Filtering via simulation based on auxiliary particle filters. *J. Am. Stat. Assoc.* 94: 590-599.
- [14] Pitt, M., 2002. Smooth particle filters for likelihood evaluation and

maximization. *Unpublished working paper*. University of Warwick.



附錄 A：概似函數推導

在附錄 A 中將根據不同模型推導出相對應的概似函數，首先針對 SV 模型進行推導。SV 模型概似函數如下：

$$f(X_{0:T}, R_{1:T})$$

SV 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{V_{t-1}\}$ ，將 V_{t-1} 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(V_{0:T-1}, R_{1:T}) \\ &= f(V_0, V_1, V_2, \dots, V_{T-1}, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(V_0)f(R_1|V_0)f(V_1|R_1, V_0) \cdots f(V_{T-1}|R_{1:T-1}, V_{0:T-2})f(R_T|R_{1:T-1}, V_{0:T-1}) \\ &= f(V_0)f(R_1|V_0)f(V_1|R_1) \cdots f(V_{T-1}|R_{T-1})f(R_T|V_{T-1}) \\ &= f(V_0) \prod_{t=1}^T f(R_t|V_{t-1}) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t|R_t) \end{aligned}$$

SVMJ 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{V_{t-1}, N_t, y_t\}$ ，將 V_{t-1}, N_t, y_t 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(V_{0:T-1}, N_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T}) \\ &= f(V_0, V_1, V_2, \dots, V_{T-1}, N_1, N_2, N_3, \dots, N_T, y_1, y_2, y_3, \dots, y_T, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(V_0)f(N_1|V_0)f(y_1|V_0, N_1)f(R_1|V_0, N_1, y_1) \\ & \quad f(V_1|V_0, N_1, y_1, R_1)f(N_2|V_0, N_1, y_1, R_1, V_1) \\ & \quad f(y_2|V_0, N_1, y_1, R_1, V_1, N_2)f(R_2|V_0, N_1, y_1, R_1, V_1, N_2, y_2) \\ & \quad \cdots f(V_{T-1}|V_{0:T-2}, N_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(N_T|V_{0:T-1}, N_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(y_T|V_{0:T-1}, N_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(R_T|V_{0:T-1}, N_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T-1}) \\ &= f(V_0)f(N_1)f(y_1|N_1)f(R_1|V_0, N_1, y_1) \\ & \quad f(V_1|R_1)f(N_2)f(y_2|N_2)f(R_2|V_1, N_2, y_2) \\ & \quad \cdots f(V_{T-1}|R_{T-1})f(N_T)f(y_T|N_T)f(R_T|V_{T-1}, N_T, y_T) \end{aligned}$$

$$= f(V_0) \prod_{t=1}^T f(N_t) f(y_t | N_t) f(R_t | V_{t-1}, N_t, y_t) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t | R_t)$$

SVHJ 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{V_{t-1}, \lambda_t, N_t, y_t\}$ ，將 $V_{t-1}, \lambda_t, N_t, y_t$ 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(V_{0:T-1}, N_{0:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T}) \\ &= f(V_0, V_1, V_2, \dots, V_{T-1}, N_0, N_1, N_2, \dots, N_T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_T, y_1, y_2, y_3, \dots, y_T, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(V_0) f(N_0 | V_0) f(\lambda_1 | N_0, V_0) f(N_1 | V_0, N_0, \lambda_1) \\ & \quad f(y_1 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1) f(R_1 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1) \\ & \quad f(V_1 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1, R_1) f(\lambda_2 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, V_1) f(N_2 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, V_1, \lambda_2) \\ & \quad f(y_2 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, V_1, \lambda_2, N_2) f(R_2 | V_0, N_0, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, V_1, \lambda_2, N_2, y_2) \\ & \quad \dots f(V_{T-1} | V_{0:T-2}, N_{0:T-1}, \lambda_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(\lambda_T | V_{0:T-1}, N_{0:T-1}, \lambda_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) f(N_T | V_{0:T-1}, N_{1:T-1}, \lambda_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(y_T | V_{0:T-1}, N_{1:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) f(R_T | V_{0:T-1}, N_{1:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T-1}) \\ &= f(V_0) f(N_0) f(N_1 | \lambda_1) f(y_1 | N_1) f(R_1 | V_0, N_1, \lambda_1, y_1) \\ & \quad f(V_1 | R_1) f(N_2 | \lambda_2) f(y_2 | N_2) f(R_2 | V_1, N_2, \lambda_2, y_2) \\ & \quad \dots f(V_{T-1} | R_{T-1}) f(N_T | \lambda_T) f(y_T | N_T) f(R_T | V_{T-1}, N_T, \lambda_T, y_T) \\ &= f(V_0) f(N_0) \prod_{t=1}^T f(N_t | \lambda_t) f(y_t | N_t) f(R_t | V_{t-1}, N_t, \lambda_t, y_t) \prod_{t=1}^{T-1} f(V_t | R_t) \end{aligned}$$

VG 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{G_t\}$ ，將 G_t 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(G_{1:T}, R_{1:T}) \\ &= f(G_1, G_2, G_3, \dots, G_T, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(G_1) f(R_1 | G_1) f(G_2 | R_1, G_1) \dots f(G_T | R_{1:T-1}, G_{1:T-1}) f(R_T | R_{1:T-1}, G_{1:T}) \\ &= f(G_1) f(R_1 | G_1) f(G_2) \dots f(G_T) f(R_T | G_T) \end{aligned}$$

$$= \prod_{t=1}^T f(G_t)f(R_t|G_t)$$

VGMJ 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{G_t, N_t, y_t\}$ ，將 G_t, N_t, y_t 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(G_{1:T}, N_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T}) \\ &= f(G_1, G_2, G_3, \dots, G_T, N_1, N_2, N_3, \dots, N_T, y_1, y_2, y_3, \dots, y_T, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(G_1)f(N_1|G_1)f(y_1|G_1, N_1)f(R_1|G_1, N_1, y_1) \\ & \quad f(G_2|G_1, N_1, y_1, R_1)f(N_2|G_1, N_1, y_1, R_1, G_2) \\ & \quad f(y_2|G_1, N_1, y_1, R_1, G_2, N_2)f(R_2|G_1, N_1, y_1, R_1, G_2, N_2, y_2) \\ & \quad \dots f(G_T|G_{1:T-1}, N_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(N_T|G_{1:T}, N_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(y_T|G_{1:T}, N_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(R_T|G_{1:T}, N_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T-1}) \\ &= f(G_1)f(N_1)f(y_1|N_1)f(R_1|G_1, N_1, y_1)f(G_2)f(N_2)f(y_2|N_2)f(R_2|G_2, N_2, y_2) \\ & \quad \dots f(G_T)f(N_T)f(y_T|N_T)f(R_T|G_T, N_T, y_T) \\ &= \prod_{t=1}^T f(G_t)f(N_t)f(y_t|N_t)f(R_t|G_t, N_t, y_t) \end{aligned}$$

VGHJ 模型的隱藏變數 X_t 為 $\{G_t, \lambda_t, N_t, y_t\}$ ，將 G_t, λ_t, N_t, y_t 取代概似函數中的 X_t 並進行整理，過程如下：

$$\begin{aligned} & f(G_{1:T}, N_{0:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T}) \\ &= f(G_1, G_2, G_3, \dots, G_T, N_0, N_1, N_2, \dots, N_T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_T, y_1, y_2, y_3, \dots, y_T, R_1, R_2, R_3, \dots, R_T) \\ &= f(N_0)f(G_1|N_0)f(\lambda_1|N_0, G_1)f(N_1|N_0, G_1, \lambda_1)f(y_1|N_0, G_1, \lambda_1, N_1)f(R_1|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1) \\ & \quad f(G_2|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1, R_1)f(\lambda_2|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, G_2)f(N_2|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, G_2, \lambda_2) \\ & \quad f(y_2|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, G_2, \lambda_2, N_2)f(R_2|N_0, G_1, \lambda_1, N_1, y_1, R_1, G_2, \lambda_2, N_2, y_2) \\ & \quad \dots f(G_T|G_{1:T-1}, N_{0:T-1}, \lambda_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(\lambda_T|G_{1:T}, N_{0:T-1}, \lambda_{1:T-1}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(N_T|G_{1:T}, N_{0:T-1}, \lambda_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1}) \\ & \quad f(y_T|G_{1:T}, N_{0:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T-1}, R_{1:T-1})f(R_T|G_{1:T}, N_{0:T}, \lambda_{1:T}, y_{1:T}, R_{1:T-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(N_0)f(G_1)f(N_1|\lambda_1)f(y_1|N_1)f(R_1|G_1, N_1, \lambda_1, y_1) \\
&\quad f(G_2)f(N_2|\lambda_2)f(y_2|N_2)f(R_2|G_2, N_2, \lambda_2, y_2) \\
&\quad \cdots f(G_T)f(N_T|\lambda_T)f(y_T|N_T)f(R_T|G_T, N_T, \lambda_T, y_T) \\
&= \prod_{t=1}^T f(G_t)f(N_t|\lambda_t)f(y_t|N_t)f(R_t|G_t, N_t, \lambda_t, y_t)
\end{aligned}$$



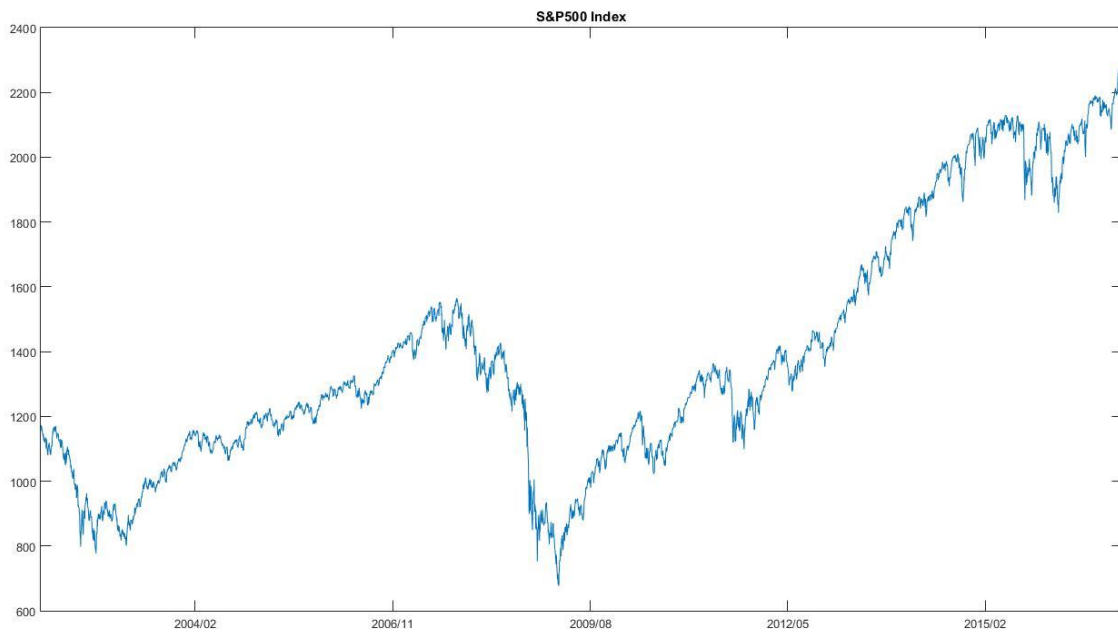


圖 1：S&P500 指數之走勢

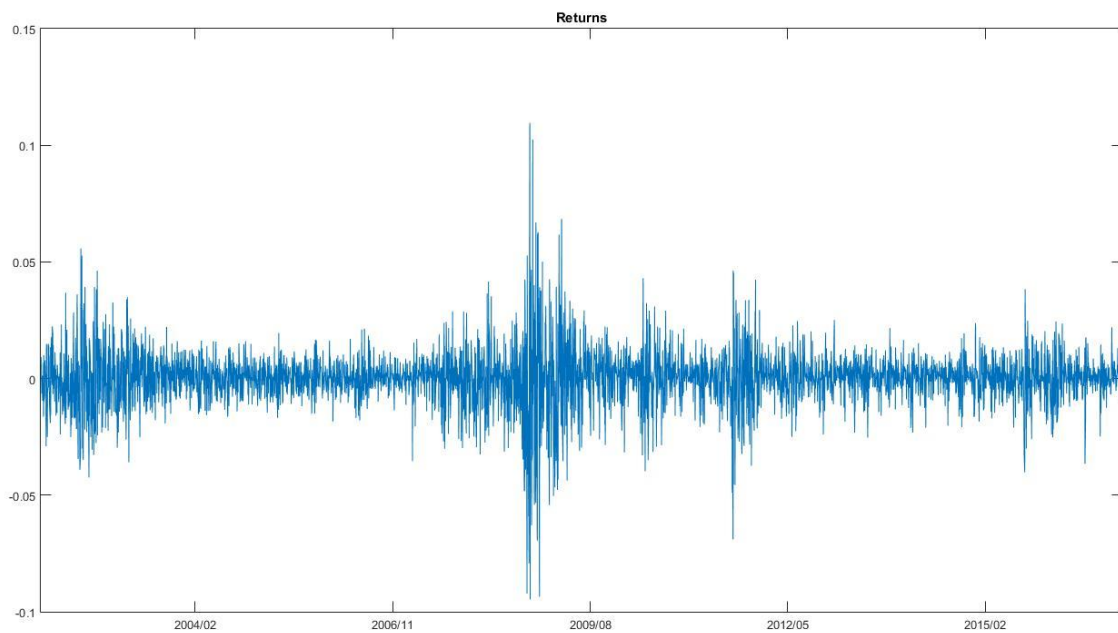


圖 2：S&P500 指數之對數報酬率走勢

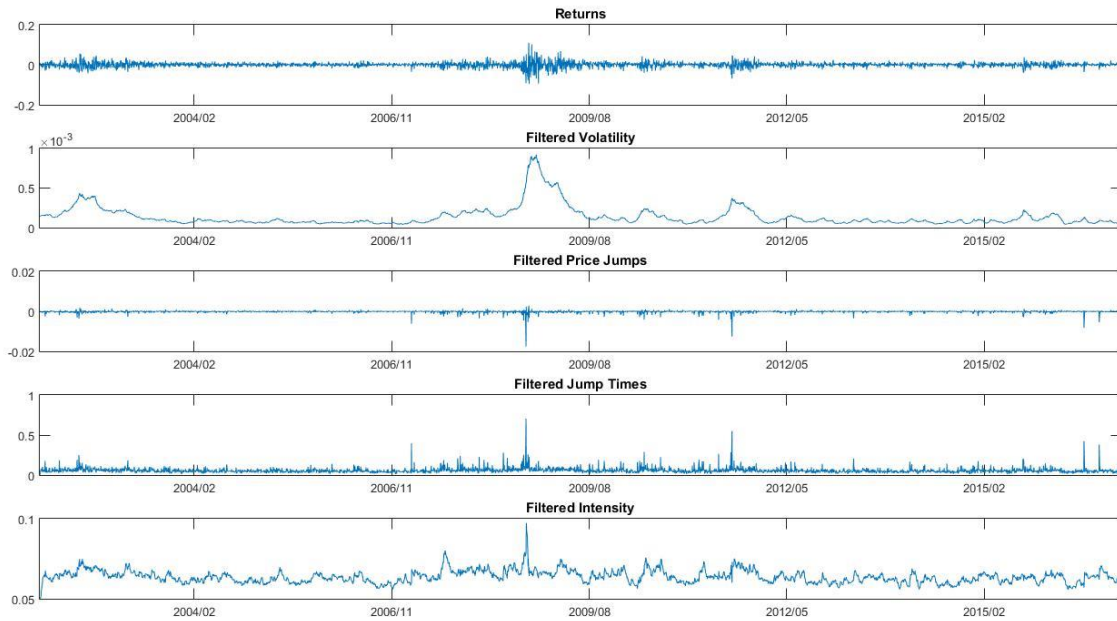


圖 3：2002 年至 2016 年 SVHJ 模型之粒子平均

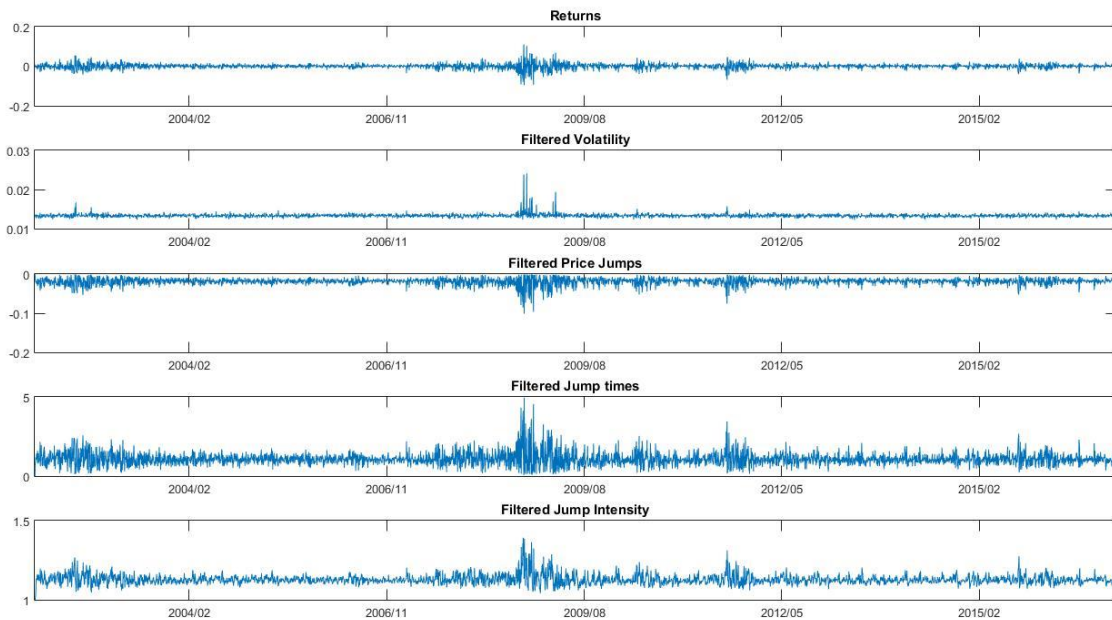


圖 4：2002 年至 2016 年 VGHJ 模型之粒子平均

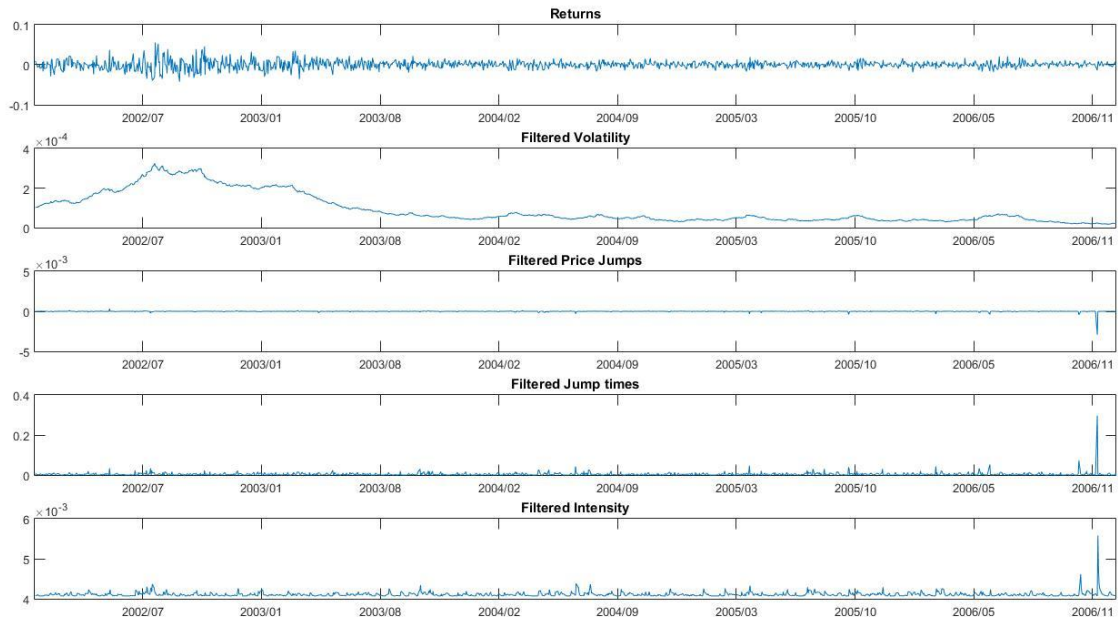


圖 5：2002 年至 2006 年 SVHJ 模型之粒子平均

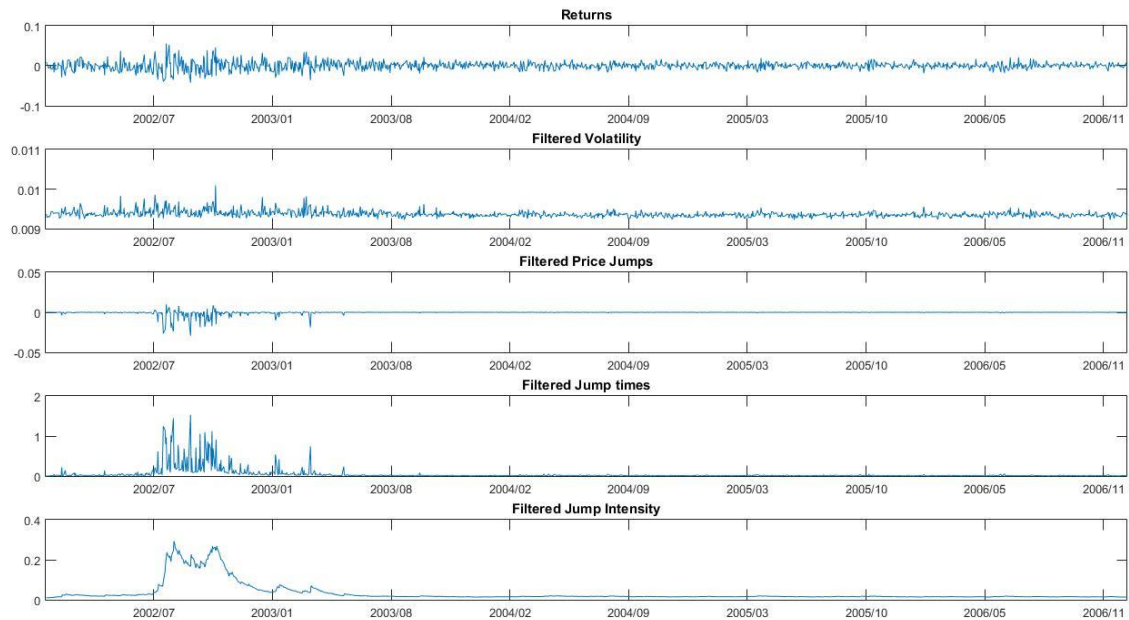


圖 6：2002 年至 2006 年 VGHJ 模型之粒子平均

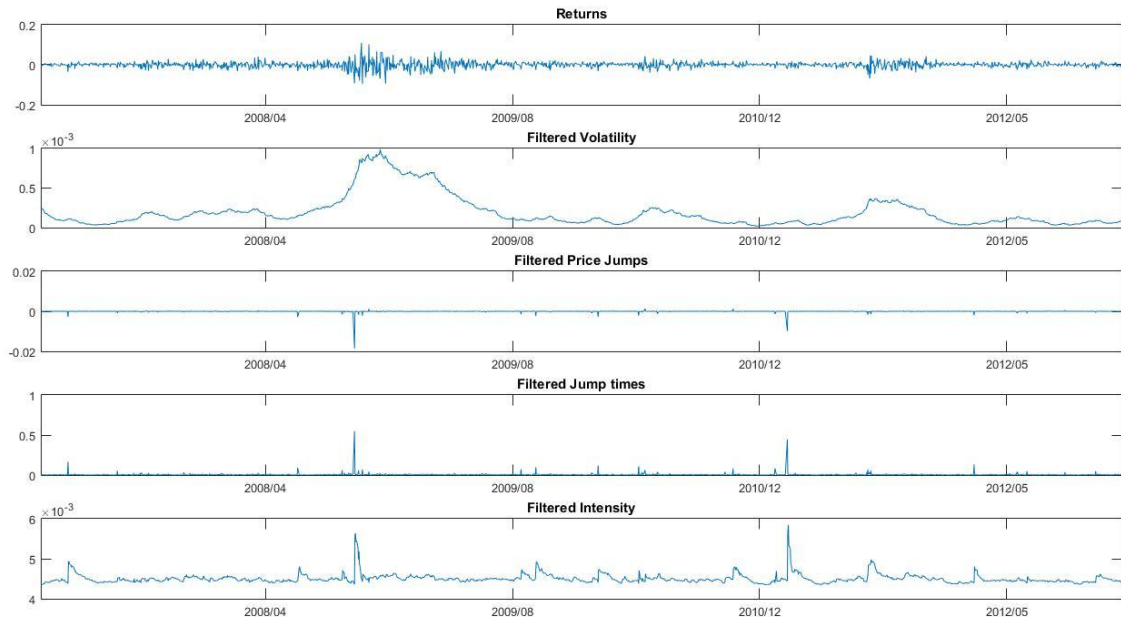


圖 7：2007 年至 2012 年 SVHJ 模型之粒子平均

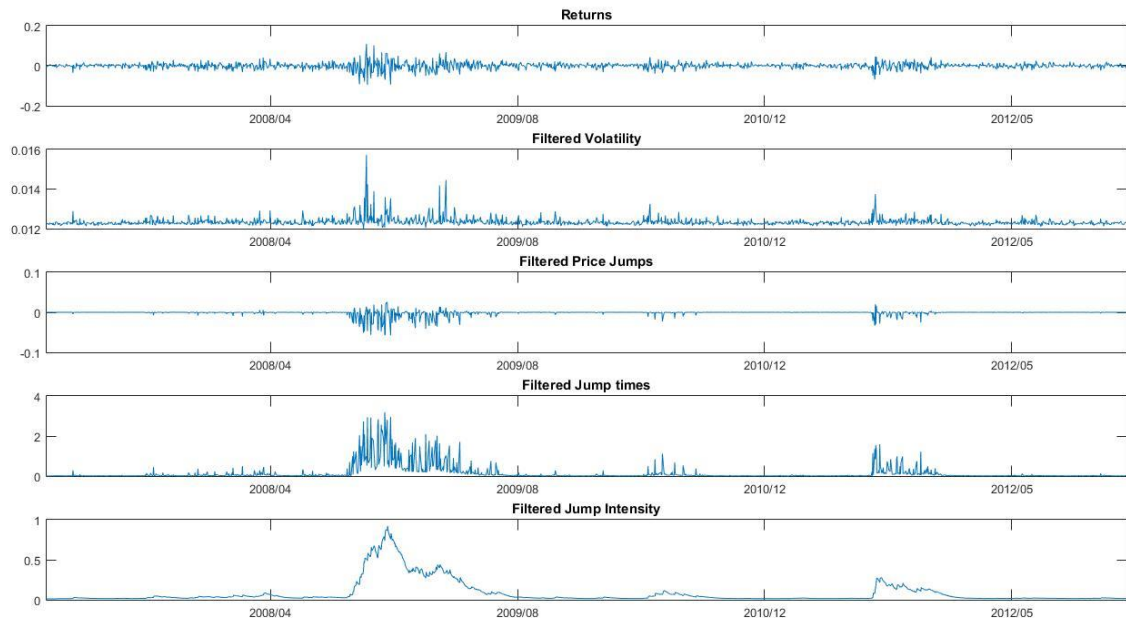


圖 8：2007 年至 2012 年 VGHI 模型之粒子平均

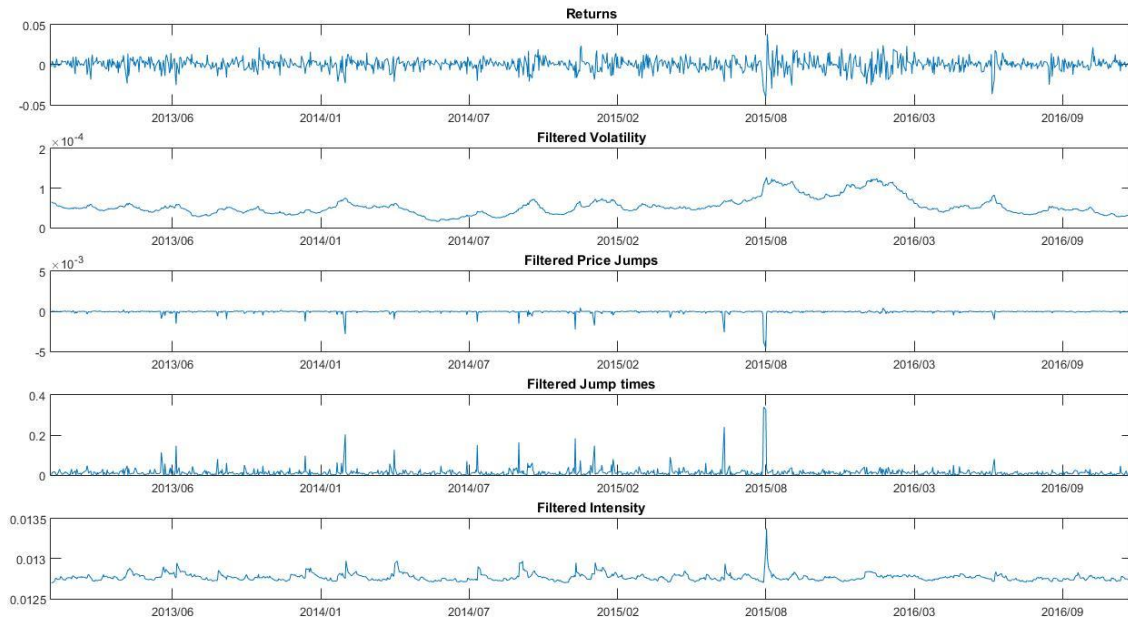


圖 9：2013 年至 2016 年 SVHJ 模型之粒子平均

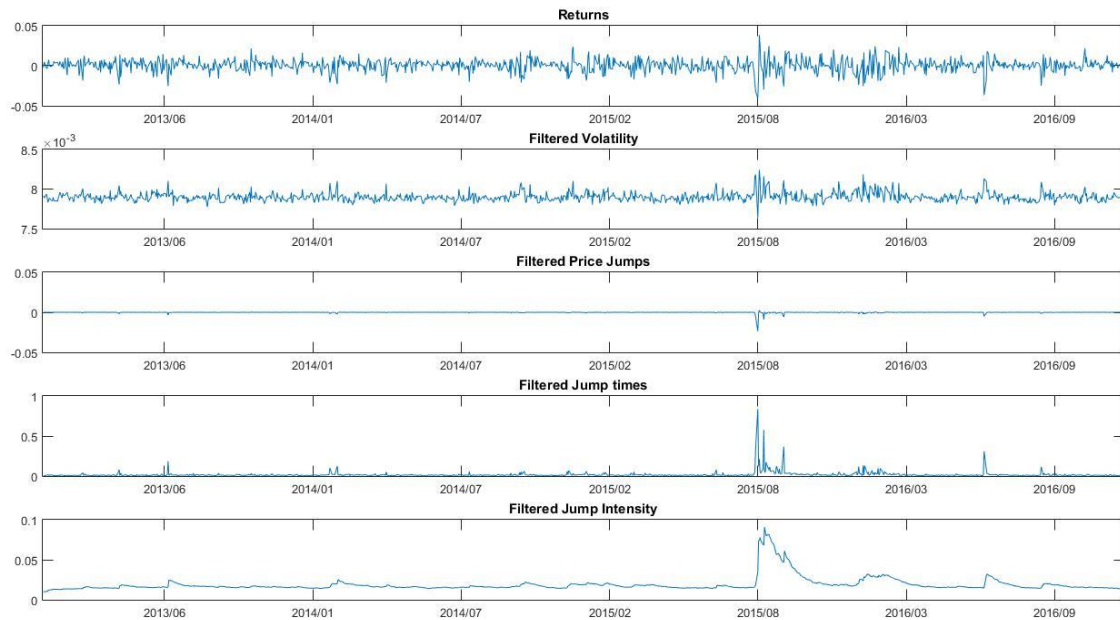


圖 10：2013 年至 2016 年 VGJH 模型之粒子平均

表 3：模擬一次之模擬結果(一)

	SV		SVMJ		SVHJ	
	給定	估計	給定	估計	給定	估計
μ	5.00E-02	4.94E-02 (8.84E-03)	5.00E-03	3.94E-03 (3.72E-02)	5.00E-03	2.51E-03 (3.72E-02)
κ	3.00E-01	2.95E-01 (1.20E-02)	5.00E-02	5.32E-02 (5.47E-03)	5.00E-02	4.83E-02 (5.93E-03)
θ	1.00E-03	9.98E-04 (1.10E-05)	1.00E-03	1.01E-03 (1.66E-05)	1.00E-03	1.02E-03 (1.48E-05)
σ	5.00E-03	5.00E-03 (7.17E-05)	1.00E-03	9.99E-04 (2.32E-05)	1.00E-03	1.00E-03 (1.53E-05)
ρ	-5.00E-01	-5.01E-01 (1.44E-02)	-5.00E-01	-4.73E-01 (1.73E-02)	-5.00E-01	-3.61E-01 (2.29E-02)
μ_j			-8.00E-02	-1.00E-01 (5.17E-02)	-8.00E-02	-7.99E-02 (1.17E-01)
σ_j			1.00E-01	1.02E-01 (8.51E-03)	1.00E-02	1.01E-02 (4.48E-04)
$\bar{\lambda}$			2.00E-02	2.34E-02 (3.11E-03)	1.00E-01	1.18E-01 (1.31E-02)
α					4.00E-01	5.34E-01 (9.75E-02)
β					5.00E-02	2.98E-02 (1.53E-02)
$\ln(L)$		11418.3		13149.3		13188.65

表 4：模擬一次之模擬結果(二)

	VG		VGMJ		VGHJ	
	給定	估計	給定	估計	給定	估計
μ	5.00E-03	5.28E-03 (1.78E-04)	5.00E-03	4.86E-03 (2.03E-04)	5.00E-03	4.74E-03 (2.48E-04)
δ	1.00E-02	1.05E-02 (1.62E-04)	1.00E-02	1.04E-02 (1.53E-04)	1.00E-02	1.09E-02 (1.66E-04)
ν	1.00E-01	1.00E-01 (3.36E-03)	1.00E-01	1.00E-01 (3.10E-03)	1.00E-01	1.01E-01 (2.55E-03)
μ_J			-1.00E-02	-9.46E-03 (1.29E-03)	-1.00E-02	-1.01E-02 (9.80E-04)
σ_J			1.00E-02	9.37E-03 (8.43E-04)	1.00E-02	9.84E-03 (6.89E-04)
$\bar{\lambda}$			3.00E-02	2.85E-02 (4.29E-03)	5.00E-02	5.43E-02 (4.99E-03)
α					5.00E-01	8.80E-01 (2.41E-02)
β					3.00E-02	7.51E-03 (2.42E-02)
$\ln(L)$		3546.55		3473.61		3412.69

表 5：模擬一百次之模擬結果平均 (一)

	SV		SVMJ		SVHJ	
	給定	估計	給定	估計	給定	估計
μ	5.00E-02	4.94E-02 (5.86E-05)	5.00E-03	4.00E-03 (1.04E-04)	5.00E-03	5.05E-03 (2.20E-05)
κ	3.00E-01	2.99E-01 (1.91E-03)	5.00E-02	5.15E-02 (2.62E-03)	5.00E-02	5.26E-02 (2.21E-03)
θ	1.00E-03	1.00E-03 (1.92E-06)	1.00E-03	1.01E-03 (7.09E-06)	1.00E-03	1.00E-03 (6.29E-06)
σ	5.00E-03	5.00E-03 (6.55E-06)	1.00E-03	1.00E-03 (1.72E-06)	1.00E-03	9.98E-04 (1.62E-06)
ρ	-5.00E-01	-4.97E-01 (1.52E-03)	-5.00E-01	-4.71E-01 (3.77E-03)	-5.00E-01	-4.05E-01 (9.70E-03)
μ_j			-8.00E-02	-8.37E-02 (5.45E-03)	-8.00E-02	-7.89E-02 (8.02E-04)
σ_j			1.00E-01	1.11E-01 (6.37E-03)	1.00E-01	9.83E-02 (1.42E-03)
$\bar{\lambda}$			2.00E-02	2.49E-02 (8.11E-04)	1.00E-01	9.74E-02 (8.24E-04)
α					7.00E-01	9.95E-01 (2.99E-02)
β					5.00E-02	5.17E-03 (2.90E-03)

表 6：模擬一百次之模擬結果平均 (二)

	VG		VGMJ		VGHJ	
	給定	估計	給定	估計	給定	估計
μ	5.00E-03	5.15E-03 (1.35E-04)	5.00E-03	4.80E-03 (2.36E-05)	5.00E-03	5.20E-03 (3.73E-04)
δ	1.00E-02	1.03E-02 (2.88E-04)	1.00E-02	1.08E-02 (8.65E-05)	1.00E-02	3.02E-02 (2.13E-02)
ν	1.00E-01	1.00E-01 (1.99E-04)	1.00E-01	1.24E-01 (1.46E-02)	1.00E-01	9.96E-02 (2.66E-03)
μ_j			5.00E-03	6.27E-03 (3.91E-03)	-5.00E-02	-4.92E-02 (6.72E-03)
σ_j			1.00E-02	1.12E-02 (1.04E-03)	1.00E-01	9.89E-02 (4.93E-03)
$\bar{\lambda}$			5.00E-02	3.43E-02 (9.07E-03)	1.00E-01	9.34E-02 (3.22E-02)
α					5.00E-01	5.46E-01 (2.50E-01)
β					5.00E-02	4.98E-02 (2.15E-02)

表 7：實證資料各段之敘述性統計

YEAR	2002-2016	2002-2006	2007-2012	2013-2016
Obs	3776	1258	1509	1007
Mean	0.000175	0.000163	4.47E-06	0.000423
S.D	0.012263	0.010144	0.015704	0.008083
Min	-0.0947	-0.04242	-0.0947	-0.04021
Mid	0.000593	0.000558	0.000733	0.000488
Max	0.109572	0.055744	0.109572	0.038291
Skewness	-0.22572	0.239397	-0.26426	-0.39789
kurtosis	12.50261	6.094969	10.49753	5.258253
$ R > \mu + 2\sigma$	184	68	79	48
$ R > \mu + 3\sigma$	64	20	27	10

表 8：實證資料各年之敘述性統計

YEAR	2002	2003	2004	2005	2006
Obs	251	251	251	251	250
Mean	-0.00108	0.000803	0.000355	0.00015	0.000446
S.D	0.016381	0.010569	0.006999	0.006469	0.006242
Min	-0.04242	-0.03587	-0.01646	-0.01686	-0.0185
Mid	-0.00182	0.00126	0.000678	0.000566	0.000923
Max	0.055744	0.034814	0.016233	0.019544	0.021336
Skewness	0.429334	-0.01648	-0.11551	-0.02259	0.071921
kurtosis	3.654231	3.692046	2.857087	2.86492	4.192379
$ R > \mu + 2\sigma$	16	12	13	10	12
$ R > \mu + 3\sigma$	2	3	0	0	2
YEAR	2007	2008	2009	2010	2011
Obs	250	252	251	251	251
Mean	0.000144	-0.00187	0.000715	0.000416	-4.50E-05
S.D	0.010112	0.025879	0.017103	0.011358	0.014724
Min	-0.03534	-0.0947	-0.05426	-0.03976	-0.06896
Mid	0.000813	2.65E-05	0.001757	0.000771	0.000947
Max	0.02879	0.109572	0.068366	0.043035	0.046317
Skewness	-0.49472	-0.03906	-0.06253	-0.20675	-0.50885
kurtosis	4.432092	6.661771	4.912624	4.995462	5.856021
$ R > \mu + 2\sigma$	17	18	14	16	13
$ R > \mu + 3\sigma$	1	6	3	3	6
YEAR	2012	2013	2014	2015	2016
Obs	249	251	251	251	251
Mean	0.000444	0.000933	0.000465	-2.77E-05	0.000424
S.D	0.007997	0.00682	0.00716	0.009789	0.008216
Min	-0.02495	-0.02533	-0.0231	-0.04021	-0.03658
Mid	0.000195	0.001329	0.000728	-0.00035	0.000205
Max	0.024615	0.021596	0.023731	0.038291	0.024459
Skewness	0.034986	-0.52541	-0.43682	-0.22379	-0.43126
kurtosis	3.869345	4.172212	4.342464	4.882812	5.452371
$ R > \mu + 2\sigma$	13	7	15	11	15
$ R > \mu + 3\sigma$	2	3	2	4	2

表 9：2002 年至 2016 年之實證結果

	SV	SVJ	SVJH	VG	VGJ	VGJH
Panel A : Volatility Parameters						
μ	4.19E-04 (2.12E-05)	4.26E-04 (3.07E-04)	3.35E-04 (1.22E-03)	1.15E-03 (1.07E-04)	3.62E-04 (1.45E-04)	3.46E-04 (2.60E-04)
κ	9.86E-01 (6.40E-02)	1.69E-02 (4.38E-03)	6.44E-03 (8.31E-06)			
θ	1.45E-04 (9.20E-06)	1.78E-04 (6.23E-05)	8.43E-05 (1.44E-05)			
σ	6.40E-03 (5.92E-05)	1.08E-03 (1.39E-05)	5.08E-04 (3.49E-02)			
ρ	-1.98E-01 (1.16E-02)	-5.41E-01 (2.73E-03)	-4.61E-01 (8.32E-03)			
δ				1.09E-02 (8.81E-05)	1.22E-02 (2.12E-04)	1.35E-02 (1.10E-04)
ν				1.06E-01 (1.70E-03)	7.68E-02 (2.59E-03)	1.13E-01 (1.88E-03)
Panel B : Jump Parameters						
μ_j		-1.99E-03 (3.86E-03)	-4.78E-03 (3.49E-02)		-8.20E-04 (6.40E-04)	-1.72E-02 (8.03E-05)
σ_j		1.14E-02 (2.19E-02)	3.62E-02 (1.54E-03)		5.62E-03 (3.79E-05)	7.21E-03 (6.75E-05)
$\bar{\lambda}$		1.36E-03 (1.60E-03)	5.45E-07 (1.12E-02)		1.99E-02 (6.99E-03)	9.81E-01 (1.96E-02)
Panel C : Hawkes Process Parameters						
α			3.40E-01 (8.29E-02)			5.46E-01 (2.04E-02)
β			1.04E-01 (1.79E-02)			3.17E-02 (7.37E-03)
$\ln(L)$	43296.2	49300.8	53756	10774.7	10821.75	15147.09
AIC	-86582.4	-98585.6	-107492	-21543.4	-21631.5	-30278.18
BIC	-86551.22	-98535.71	-107429.6	-21524.69	-21594.08	-30228.29

表 10：2002 年至 2006 年之實證結果

	SV	SVJ	SVJH	VG	VGJ	VGJH
Panel A : Volatility Parameters						
μ	4.76E-04 (6.56E-05)	1.88E-04 (1.39E-04)	3.43E-04 (1.38E-04)	2.98E-04 (7.75E-04)	-1.11E-04 (2.03E-04)	2.23E-04 (5.35E-04)
κ	9.66E-01 (8.79E-03)	1.46E-02 (2.42E-03)	4.51E-03 (1.45E-03)			
θ	1.86E-04 (1.56E-06)	9.20E-05 (1.30E-05)	6.60E-05 (1.60E-05)			
σ	5.55E-03 (9.05E-05)	1.18E-03 (1.40E-05)	5.14E-04 (7.00E-06)			
ρ	-1.63E-02 (1.77E-02)	-6.33E-01 (3.51E-03)	-5.28E-01 (1.09E-02)			
δ				1.01E-02 (1.41E-04)	9.90E-03 (2.01E-04)	1.01E-02 (8.52E-04)
ν				1.05E-01 (2.92E-03)	1.05E-01 (2.50E-03)	1.00E-02 (3.13E-04)
Panel B : Jump Parameters						
μ_j		-1.80E-03 (7.98E-03)	-1.92E-03 (1.30E-03)		-3.60E-04 (7.82E-04)	-9.54E-03 (3.30E-04)
σ_j		4.87E-03 (2.42E-03)	4.53E-03 (9.33E-04)		7.89E-03 (5.47E-04)	1.07E-02 (7.64E-03)
$\bar{\lambda}$		6.97E-04 (5.20E-04)	4.07E-03 (2.03E-03)		2.55E-02 (5.47E-04)	9.46E-02 (7.29E-02)
Panel C : Hawkes Process Parameters						
α			5.42E-01 (2.26E-02)			1.67E-02 (1.63E-02)
β			5.10E-03 (5.58E-03)			1.36E-02 (2.46E-02)
$\ln(L)$	14236.75	17333	18227	3742.19	4036	5077.95
AIC	-28463.5	-34650	-36434	-7478.38	-8060	-10439.9
BIC	-28437.81	-34608.9	-36382.63	-7462.97	-8029.176	-10098.8

表 11：2007 年至 2012 年之實證結果

	SV	SVJ	SVJH	VG	VGJ	VGJH
Panel A : Volatility Parameters						
μ	5.07E-04 (3.46E-05)	3.78E-04 (4.10E-03)	4.28E-04 (1.13E-01)	1.40E-03 (1.80E-04)	-5.40E-05 (2.87E-04)	3.05E-04 (4.67E-04)
κ	4.09E-01 (8.24E-03)	1.84E-02 (2.54E-03)	1.13E-02 (1.73E-03)			
θ	2.11E-04 (4.43E-06)	4.58E-04 (2.00E-05)	1.53E-04 (1.86E-05)			
σ	7.81E-03 (1.02E-04)	1.04E-03 (1.42E-05)	1.07E-03 (3.83E-05)			
ρ	-2.59E-01 (1.65E-02)	-5.04E-01 (1.21E-02)	-4.86E-01 (1.38E-02)			
δ				1.27E-02 (1.73E-04)	1.56E-02 (2.01E-04)	1.65E-02 (2.28E-04)
ν				1.16E-01 (4.43E-03)	9.12E-02 (2.32E-03)	1.80E-01 (4.19E-03)
Panel B : Jump Parameters						
μ_j		-5.89E-03 (4.56E-03)	-4.64E-03 (1.20E-02)		-2.79E-03 (7.28E-04)	-2.02E-02 (1.59E-04)
σ_j		1.97E-02 (7.48E-03)	1.59E-02 (1.84E-03)		7.60E-03 (5.07E-04)	7.32E-03 (1.25E-04)
$\bar{\lambda}$		1.96E-03 (8.26E-04)	4.35E-03 (2.89E-02)		3.78E-02 (3.56E-03)	1.65E-03 (2.04E-01)
Panel C : Hawkes Process Parameters						
α			1.00E-01 (3.14E-01)			1.17E-01 (2.95E-02)
β			3.05E-03 (1.97E-02)			3.42E-02 (2.06E-02)
$\ln(L)$	16602.10	18315.05	19451.25	3927.05	4145.45	4887.15
AIC	-33194.2	-36614.1	-38882.5	-7848.1	-8278.9	-9758.3
BIC	-33167.6	-36571.55	-38829.31	-7832.14	-8246.99	-9715.75

表 12：2013 年至 2016 年之實證結果

	SV	SVJ	SVJH	VG	VGJ	VGJH
Panel A : Volatility Parameters						
μ	4.49E-04 (1.17E-03)	4.06E-04 (1.23E-04)	4.28E-04 (1.71E-04)	7.17E-04 (1.80E-04)	3.74E-04 (1.81E-04)	4.14E-04 (2.24E-04)
κ	8.94E-01 (8.35E-03)	5.27E-02 (4.68E-03)	1.76E-02 (3.49E-03)			
θ	2.19E-04 (1.94E-06)	5.43E-05 (4.15E-06)	5.06E-05 (7.49E-06)			
σ	5.22E-03 (8.16E-05)	1.52E-03 (1.92E-05)	5.54E-04 (8.09E-06)			
ρ	1.66E-01 (2.54E-02)	-7.49E-01 (8.07E-03)	-5.59E-01 (1.35E-02)			
δ				8.28E-03 (1.30E-04)	8.02E-03 (1.28E-04)	8.09E-03 (1.38E-04)
ν				1.04E-01 (2.36E-03)	1.00E-01 (3.12E-03)	8.14E-02 (2.72E-03)
Panel B : Jump Parameters						
μ_j		-7.24E-03 (2.48E-03)	-4.50E-03 (1.81E-03)		-2.95E-03 (1.14E-03)	-9.01E-03 (1.31E-03)
σ_j		4.10E-03 (1.72E-03)	5.49E-03 (8.58E-04)		6.45E-03 (8.61E-04)	9.38E-03 (1.02E-03)
$\bar{\lambda}$		1.32E-03 (7.98E-04)	1.27E-02 (1.28E-02)		1.29E-02 (2.55E-03)	8.63E-04 (3.26E-02)
Panel C : Hawkes Process Parameters						
α			1.86E-01 (2.00E-02)			1.79E-01 (4.16E-02)
β			1.01E-03 (2.29E-02)			1.65E-02 (3.88E-02)
$\ln(L)$	11366.10	14162.95	14813.5	3208.3	3220.65	3284.25
AIC	-22722.2	-28309.9	-29607	-6410.6	-6429.3	-6552.5
BIC	-22697.63	-28270.58	-29557.85	-6395.86	-6399.81	-6513.18