國立政治大學金融學系研究所

碩士學位論文

金融大數據之應用:
Hawkes 相互激勵模型於跨市場跳躍傳染現象之實證分析

Empirical Analysis on Financial Contagion using Hawkes Mutually Exciting Model

指導教授：林士貴博士

研究生：簡宇澤 撰

中華民國一百零六年六月

謝辭

兩年過去了，歷經兩學期的時間終於完成論文，在政大的碩士生涯也將畫下句點。本論文得以完成，首先必須感謝我的指導老師林士貴教授，從一開始的研究方向到最後的研究成果，一步一步地提供寶貴且專業的建議。同時，我很感謝趙世偉老師，多次犧牲假日陪同我和士貴老師一起討論論文，透過其專長分享想法並引導我思考。

還要感謝博士班的廖志偉學長和蔡佩玲學姐。本論文所使用的資料皆由學長辛苦蒐集，資料處理方法與構想和他的研究題目相關。學姐多次參與討論，也曾協助我整理資料。完成這篇論文，學長姐功不可沒。

感謝口試委員，政治大學統計系蔡紋琦教授、翁久幸教授、中央大學統計系傅承德教授、中山大學應用數學系郭美惠教授，從不同的角度看待我的研究題目，激發更多的思考空間，是非常寶貴的經驗，也使得論文更加完善。

兩年過去了，在政大的碩士生涯也將畫下句點。在學期間，不論在課業上或者實習經歷上都有豐富的收穫，見識太多身懷絕技的人們，更知道自身的不足，這或許是人生最後一個學歷文憑，但絕非學習的結束。我將離開校園並踏入職場，會更加努力，不讓身邊的人們失望！

國立政治大學 National Chengchi University

金融大數據之應用:

Hawkes 相互激勵模型於跨市場跳躍傳染現象之實證分析

學生:簡宇澤　　指導教授：林士貴 博士

國立政治大學金融系

摘要

本研究使用美國、德國、英國股票指數期貨之日內交易資料，從報酬率中分離出連續波動度與跳躍項，再以 MLE 法估計 Hawkes 相互激勵過程之參數，衡量跨市場跳躍傳染現象。擴展文獻中僅兩市場的分析至三市場模型，更能從整體的角度解釋市場間的關係及跳躍傳染途徑。實證結果顯示，美國能直接影響其他市場，而其他市場反過來不易干涉美國，呈現非對稱影響效果。歐洲兩國能互相傳染，英國對德國的影響較大，也更有能力影響美國，稱英國為歐洲的影響輸出國，德國為歐洲的影響輸入國。

國立政治大學 National Chengchi University

關鍵詞：跳躍風險、金融傳染、Hawkes 過程、自我激勵過程、相互激勵過程。

Empirical Analysis on Financial Contagion using Hawkes Mutually Exciting Model

Student: Yu-Tse Chien Advisor: Dr. Shih-Kuei Lin

Department of Money and Banking, National Chengchi University

Abstract

In this thesis, we separate the volatility of returns of S&P500, DAX, and FTSE index futures into continuous part and jump part. Estimating the parameters of Hawkes mutually-exciting by MLE method to measure the financial contagion effect between the markets. We expand the two-market bivariate model in recent study to three-market trivariate model, to explain the relationship and the route of contagion between the markets from an overall view of the world. The empirical results show that the US market can directly affect the others while reverse has nearly no effect. Two European countries can be influenced by each other, Britain has a greater impact on Germany and is more capable of affecting the US. We state that Britain is the influence-exporting country of Europe and Germany is the influence-importing country of Europe.

Keywords*：*Jump risk, Financial contagion, Hawkes process, Self-exciting process, Mutually-exciting process

國立政治大學 National Chengchi University

目錄

第一章　緒論 1
第二章　文獻回顧 3
2.1　相互激勵 Hawkes 過程 3
2.2　跳躍偵測 3
2.3　金融傳染 4
第三章　研究目的 5
第四章　研究方法 6
4.1　衡量連續波動與偵測跳躍項 6
4.2　相互激勵過程 9
4.3　最大概似估計 11
第五章　實證分析 15
5.1　實證資料 15
5.2　資料處理 15
5.3　敘述統計 15
5.4　參數估計結果 24
5.4.1 單變量模型 24
5.4.2 雙變量模型 26
5.4.3 三變量模型 ..... **錯誤! 尚未定義書籤。**
第六章　結論與建議 31
參考文獻 32

國立政治大學 National Chengchi University

表次

表 1：各市場於各抽樣頻率之敘述統計.....16
表 2：各市場於 1 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計.....19
表 3：各市場於 5 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計.....20
表 4：各市場於 10 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計.....21
表 5：單變量模型參數估計結果.....24
表 6：雙變量模型參數估計結果.....26
表 7：三變量模型參數估計結果.....28

圖次

圖 1：S&P500 之跳躍偵測.....22
圖 2：DAX 之跳躍偵測.....22
圖 3：FTSE 之跳躍偵測.....23
圖 4：單變量模型之跳躍強度.....25
圖 5：雙變量模型之跳躍強度.....28
圖 5：三變量模型之跳躍強度.....30

國立政治大學
National Chengchi University

第一章 緒論

從上個世紀末的亞洲金融風暴，到近年來因美國爆發次級房貸風暴而接著發生的金融海嘯，還有歐洲主權債務危機。觀察到現今的金融危機的名字常常被冠上一個大範圍的地區，可見在一個高度全球化、高度整合的世界，當金融危機發生時，其影響會波及週遭其他國家的市場，更可能傳染擴散到全世界形成一場災難。

金融市場上大幅度的波動往往會導致市場投資人產生鉅額的收益或虧損，由於多數投資人具有風險趨避的特性，因此釐清一場危機或者大幅度波動之傳遞機制顯得有其價值與必要。

如何建構一個能描述金融商品報酬間相互影響的財務模型是進行相關研究的關鍵。Ait-Sahalia et al. (2015) 提出在包含隨機波動度的資產報酬動態模型中加入跳躍項，當其他市場之報酬率發生跳躍時，可能會增加本地市場發生跳躍的機率，當本地市場發生跳躍後也有機會使其他市場發生跳躍的機率上升。值得注意的是，其定義的金融傳染是資產報酬率的跳躍，或者說離散波動度在不同市場間相互影響的現象，又被稱作相互激勵。可以用地震來描述此模型欲刻畫的情境，金融市場的相互傳染就如同地震震波，當重大事件發生時，除了震央本身，往往還使得鄰近地區受到波及。

Ait-Sahalia之後續研究與相關文獻，往往僅探討兩個市場之間的相互傳染現象，然而本研究想了解重大金融事件在更大範圍的區域間的傳遞效果，因此必須對其跳躍項的部分進行擴充。

本文主要架構如下：第2章對相互激勵Hawkes過程、跳躍偵測、金融傳染做文獻回顧，第3章為研究目的，第4章詳細敘述跳躍偵測的理論與方法，定義自我激勵及相互激勵Hawkes過程，並呈現其概似函數的形式，第5章以三個不同國家

的股價指數期貨價格為例，進行跳躍測以及相互激勵模型之參數估計，並對統計結果進行分析討論，第5章為本文結論。

國立政治大學
National Chengchi University

第二章 文獻回顧

本章第一部分回顧相互激勵 Hawkes 模型的發展歷史，第二部分探索從高頻率的資產價格資料中分離出跳躍項的相關文獻，第三部分討論近年來將 Hawkes 過程加入資產報酬動態過程以描述金融傳染現象的財務領域相關研究。

2.1 相互激勵 Hawkes 過程

Hawkes (1971b)建構自我激勵(Self-exciting)與相互激勵(Mutually-exciting)過程，用以描述一個隨機過程中發生特殊事件的強度(Intensity)會受到此過程或其他過程於過去發生的事件影響，往後研究者稱呼此隨機過程為 Hawkes 過程。過去的事件對當前強度的影響可以有非常多種方式，Hawkes (1971b)除了推導廣義形式模型的數學性質以外，也提出指數衰退形式的函數作為例子，而此例子更成為往後許多研究者採用的應用模型。Vere-Jones (1970)在研究地震發生的隨機過程亦獲得相似結果。

Ozaki (1979)推導出 Hawkes (1971b)隨機過程的對數概似函數之形式與求取其極大值的方法用於參數估計。同時，為了驗證其提出的最大概似估計法之正確性，Ozaki (1979)也提及 Hawkes 過程的模擬方法。

2.2 跳躍偵測

Brandorff-Nielsen and Shephard (2004)證明在隨機波動度模型下，以已實現雙冪次變異(Realized bipower variation, BV)估計積分變異(Integrated variance)比已實現變異數(Realized variance, RV)更加穩健。意味著若在隨機波動度模型中加入跳躍項，則RV與BV之差值可用來衡量跳躍項的二項變異(Quadratic variation)。

國立政治大學 National Chengchi University

Huang and Tauchen(2005)沿用 Andersen, Bollerslev, and Diebold (2004)的看法，於實證上許多金融商品的高頻資料在使用 Brandorff-Nielsen and Shephard (2004)的方法會分離出過多的跳躍。因此先衡量跳躍項佔實質波動度之比例，再對此比例進行統計檢定以篩選出顯著的跳躍。Huang and Tauchen (2005)列舉許多不同形式的檢定統計量，在大樣本下皆有相同的漸進分配。

2.3 金融傳染

Ait-Sahalia et al. (2015)以包含趨勢項、隨機波動度以及跳躍項的資產報酬動態過程，其中跳躍的部分滿足 Hawkes (1971b)的相互激勵模型，刻畫金融傳染(Financial contagion)現象。Ait-Sahalia et al. (2015)實證分析中使用 5 個不同國家的近 30 年股票市場指數價格日資料。以 GMM 進行單一市場的自我激勵股價模型與兩兩市場間的相互激勵股價模型之參數估計。估計結果顯示，市場上顯著存在自我激勵和相互激勵效果，而且此模型顯著優於 Poisson jump-diffusion 模型。同時發現市場間的影響是非對稱的，美國市場對其他市場皆有顯著影響，但其他市場對美國市場的影響則不顯著。

Ait-Sahalia et al. (2014)引入 Ait-Sahalia et al. (2015)的動態過程於探討歐洲主權債務危機期間 CDS 市場的傳染現象。同樣發現了顯著的自我激勵效果與跨市場間非對稱的相互激勵效果，估計結果顯示希臘爆發危機後，相較於德國和法國，愛爾蘭、西班牙、葡萄牙與義大利為主要的「重災區」。Ait-Sahalia et al. (2014)獲得的結果可用於分析一國政策對其他地區的影響。

國立政治大學 National Chengchi University

第三章 研究目的

目前研究金融傳染的文獻多以日資料進行兩個市場間相互激勵效果之驗證。本研究的主要目的有兩大部分：第一，本研究使用高頻資料透過Brandorff-Nielsen and Shephard (2004)以及Huang and Tauchen (2005)的方法分離出資產報酬動態過程中的跳躍項，畢竟文獻中的方法依賴漸進性質，使用更高頻率的資料應更能獲得理論上較合理的結果。第二，本研究沿用Ait-Sahalia et al.(2015)之模型架構，並進一步將兩個市場的二維模型擴充為三個市場的三維模型。文獻認為多市場的高維模型難以對估計結果進行解釋、容易產生混亂，然而本研究認為三維模型仍在可以解釋的合理範圍，並且能提供有用的資訊，畢竟若要了解三個市場之間的關係，由三維模型的估計結果進行分析，其合理性應優於把三個市場一次取兩個市場分成三組進行估計，再將各組估計值組合起來分析。

期望藉由本研究，提供投資人在面臨重大金融事件時，作為其投資決策與風險管理之參考依據。

國立政治大學 National Chengchi University

第四章 研究方法

本章先定義商品報酬動態過程，並介紹Brandorff-Nielsen and Shephard (2004b)發展出衡量連續波動與偵測跳躍項的實證方法，以及Huang and Tauchen (2005)提出的改良方法。接著定義自我激勵及相互激勵Hawkes過程，並對其數學與直觀意涵進行說明。最後整理任意維度相互激勵Hawkes過程之對數概似函數，作為實證分析中參數估計之用。

4.1 衡量連續波動與偵測跳躍項

在時間t下，$P(t)$為商品價格，則取對數後$p(t) \coloneqq lnP(t)$即為商品對數報酬，假設$p(t)$的動態過程為：

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t) + \kappa(t)dN(t)，0 \leq t \leq T$$

其中，$\mu(t)$為飄移項(Drift Term)，$\sigma(t)$為連續之波動度，$w(t)$為標準布朗運動，$\kappa(t)$為跳躍幅度(Jump Size)，而$N(t)$為計數過程(Counting Process)，在t時間下，若發生跳躍則$dN(t)$為1，否則為0。$p(t)$之二項變異(Quadrate Variation)為：

$$[p,p](t) = \int_0^t \sigma^2(s)ds + \sum_{0<s\leq t} \kappa^2(s) 。$$

在取得研究資料時，以抽樣頻率δ將一天分為γ等份，δ與γ的關係為$\gamma = 1/\delta$。定義日內抽樣報酬率為：

$$r_{t+\frac{j}{\gamma}} = p_{t+\frac{j}{\gamma}} - p_{t+\frac{j-1}{\gamma}}，$$

日報酬即為當日所有日內報酬之總和：

$$r_{t+1} = \sum_{j=1}^{\gamma} r_{t+\frac{j}{\gamma}} 。$$

根據日內報酬率可進一步定義當日已實現波動度(Realized Variation, RV) ：

$$RV_{t+1}(\delta) = \sum_{j=1}^{\gamma} r_{t+\frac{j}{\gamma}}^2 \text{ ，}$$

也就是所有日內報酬率之平方和，以及雙冪次變異(Bipower Variation, BV)：

$$BV_{t+1}(\delta) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\sum_{j=2}^{\gamma}\left|r_{t+((j-1)/\gamma)}\right|\left|r_{t+(j/\gamma)}\right| \text{ 。}$$

將兩時間相鄰的日內報酬率取絕對值後相乘再加總，在乘上合適的係數。當$\gamma \to \infty$，或者$\delta \to 0^+$時，可得RV與BV的極限值：

$$RV_{t+1}(\delta) \to \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds + \sum_{t\le s\le t+1} \kappa^2(s) \tag{1}$$

$$BV_{t+1}(\delta) \to \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds \text{ 。} \tag{2}$$

(1)式可由二項變異理解。(2)式直觀上是因為當時間間隔很小$\delta \to 0^+$，兩個相鄰時間點以內出現跳躍的機率為0，因此BV的極限值不包含跳躍項。

可由(1)、(2)兩式，拆解出跳躍項：

$$J_{t+1} \coloneqq RV_{t+1} - BV_{t+1} = \sum_{t\le s\le t+1} \kappa^2(s) \text{ ，}$$

然而在實證資料中，可能計算出大量數值微小的J_{t+1}，不宜全部皆直接認定為跳躍項。因此Huang and Tauchen (2005)及Bollerslev et al. (2008)提出先衡量跳躍項佔已實現波動度之比例或者貢獻程度：

$$\frac{J_{t+1}}{RV_{t+1}} = \frac{RV_{t+1} - BV_{t+1}}{RV_{t+1}} \text{ ，}$$

再以其漸近分配檢定是否存在顯著跳躍。

檢定統計量形式如下：

$$Z_{1,t+1} = \frac{(RV_{t+1} - BV_{t+1})/RV_{t+1}}{\sqrt{(\upsilon_{bb} - \upsilon_{pp})\frac{1}{\gamma} max\left(1, \frac{TP_{t+1}}{BV_{t+1}^2}\right)}},$$

其中

$$TP_{t+1} = \gamma\mu_{4/3}^{-3}\left(\frac{\gamma}{\gamma-2}\right)\sum_{j=3}^{\gamma}\left|r_{t+((\gamma-2)/j)}\right|^{4/3}\left|r_{t+((\gamma-1)/j)}\right|^{4/3}\left|r_{t+(\gamma/j)}\right|^{4/3},$$

$$\mu_{4/3} = 2^{2/3}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \approx 0.8309,$$

$$\upsilon_{pp} = 2, \upsilon_{bb} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi - 3。$$

當$\gamma \to \infty$時，亦即當時間細分為無窮小、樣本數趨近無限大時，$Z_{1,t+1} \to N(0,1)$。

有了以上結果，可以對資料中計算出的跳躍項進行檢定，提取在顯著水準α下，顯著大於0的跳躍項J_{t+1}，定義為實質跳躍項(Realized Jump, RJ)：

$$RJ_{t+1}(Z) \coloneqq I_{\{Z_{1,t+1} > \Phi_{1-\alpha}\}} \cdot (RV_{t+1} - BV_{t+1})$$

$$= I_{\{Z_{1,t+1} > \Phi_{1-\alpha}\}} \cdot J_{t+1},$$

其中I為指示函數(indicator function)，$\Phi_{1-\alpha}$為標準常態分配之左尾機率累積至$1-\alpha$時對應到的z分數值。當檢定統計量$Z_{1,t+1}$大於$\Phi_{1-\alpha}$時，也就是J_{t+1}顯著大於0時，I值為1，否則為0。由於此處進行的是單尾檢定，即使在處理實際資料時可能出現RV小於BV，也能夠將負的跳躍項篩除。本研究採用$\alpha = 0.1\%$之水準。

依據本節內容，我們應盡可能取得高交易頻率的資料，對歷史價格取對數後計算報酬率。如此可得RV與BV，並且相減得到J_{t+1}。接著對J_{t+1}進行假說檢定，將顯著大於0的記錄為RJ_{t+1}。經過以上步驟，我們便能完成商品歷史報酬率的跳躍偵測，跳躍幅度和連續波動度的值亦一併完成估計。

4.2 相互激勵過程

考慮計數過程$\{N(t): t \geq 0\}$，其對應的$\sigma - field$為$\{F_t^N: t \geq 0\}$。$N(t)$紀錄時間t以前累積的總跳躍次數，F_t^N可視為時間t以前所有$N(t)$值的歷史資訊。

定義強度(Intensity)為：

$$\lambda(t) \coloneqq \frac{E[dN(t)]}{dt} ,$$

或嚴謹表示：

$$\lambda(t|F_t^N) \coloneqq \lim_{h \to 0^+} E\left(\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \middle| F_t^N\right) ,$$

由於$N(t)$為遞增函數，所以又等價於：

$$\lambda(t|F_t^N) \coloneqq \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} P(N(t+h) - N(t) > 0|F_t^N) 。$$

與 Poisson 過程相似，Hawkes (1971b)也是透過強度建構隨機過程。若$N(t)$滿足：

$$P(N(t+h) - N(t) = l|F_t^N) = \begin{cases} \lambda(t)h + o(h), & l = 1 \\ 1 - \lambda(t)h + o(h), & l = 0 \\ o(h), & l > 1 \end{cases} ,$$

並假設強度函數：

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_{-\infty}^{t} g(t-s) dN(s) ,$$

其中$\lambda_0 > 0$且$g: (0, \infty) \to [0, \infty]$，則稱$N(t)$為 Hawkes 過程。

在此解釋 Hawkes 過程的直觀意涵。當時間間隔極短時，$h \to 0^+$，$o(h) \to 0$，發生1次跳躍的機率為$\lambda(t)h$，沒發生跳躍的機率為$1 - \lambda(t)h$，在極短的時間間格內亦不能發生2次以上的跳躍。

強度函數$\lambda(t)$由基本強度(base intensity) λ_0與積分式：

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-s) dN(s)$$

相加而成。假設在時間t以前，發生跳躍的時間點為$\{t_k: k = 1,2 \cdots\}$，亦即$dN(t_k) = 1$，$k = 1,2 \cdots$。則

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-s)dN(s) = \sum_{t_k<t} g(t-t_k)$$

可視為時間t以前所有發生過的跳躍，個別對當下$\lambda(t)$的影響之加總。不同時點發生的跳躍，距離時間t的長度也會不同，將時間長度分別代入函數g後亦可能得到不同的值，也就是不同時點發生的跳躍對$\lambda(t)$可能有不同程度的正向影響，函數g又稱作激勵函數(Excitation Function)。在$g \equiv 0$的情況下，$\lambda(t) = \lambda_0$，Hawkes 過程將退化成 Poisson 過程。

Hawkes (1971b)提出一個函數g的範例，A-Sahalia et al. (2015)亦採用此形式，假設：

$$g(t-s) = \beta e^{-\alpha(t-s)},$$

其中$s < t$。代入$\lambda(t)$後其形式為：

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_{-\infty}^{t} \beta e^{-\alpha(t-s)} dN(s) = \lambda_0 + \sum_{t_k<t} \beta e^{-\alpha(t-t_k)},$$

可以證明上式滿足

$$d\lambda(t) = \alpha\big(\lambda_0 - \lambda(t)\big)dt + \beta dN(t)$$

的解。在此模型設定下有兩個固定參數$\alpha, \beta > 0$。直觀上，當跳躍發生時，$\lambda(t)$將瞬時(Instantaneously)增加β，而隨著時間推進，此跳躍對$\lambda(t)$的影響將以α速率衰退。

目前設定的$\lambda(t)$僅受到自身過去發生的跳躍影響，稱其為自我激勵 Hawkes 過程(Self-exciting Hawkes Process)。可將$\lambda(t)$擴展成，一計數過程除了受自身過去的跳躍影響以外，也同時受其他計數過程所發生的跳躍影響，另一方面，此計數過程發生的跳躍也會影響其他計數過程。據此概念，可以建構相互激勵 Hawkes 過程(Mutually-exciting Hawkes Process)。

國立政治大學 National Chengchi University

若現在有m個計數過程$\{N_1(\cdot), N_2(\cdot), \cdots, N_m(\cdot)\}$，而$\{T_{i,k}: k \in \mathbb{N}, i = 1,2, \cdots, m\}$為$i$市場第$k$個跳躍的時間之隨機變數，其實現值為$t_{i,k}$，則$N_i(\cdot)$對應的強度函數為：

$$\lambda_i(t) = \lambda_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} \beta_{i,j} e^{-\alpha_i (t-s)} \, dN_j(s)$$

$$= \lambda_{i,0} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{t_{j,k}<t} \beta_{i,j} e^{-\alpha_i (t-t_{j,k})} \ ,$$

其中$s < t$，$i = 1,2, \cdots, m$，$\alpha_i, \beta_{i,j} > 0$。根據此模型，當第$j$個計數過程發生跳躍時，$\lambda_i(t)$將瞬時增加$\beta_{i,j}$，所以$\beta_{i,j}$可視為記數過程$j$對記數過程$i$之影響程度，而隨著時間推進，跳躍對$\lambda_i(t)$的影響將以$\alpha_i$速率衰退。

4.3 最大概似估計

由 Daley and Vere-Jones (2003)知，令$N(\cdot)$為定義在有限時間$[0, T]$上記數過程，$t_1, t_2, \cdots t_n$為發生跳躍之時間實現值，則$N(\cdot)$的概似函數L為：

$$\mathrm{L} = \left(\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \lambda(\mathrm{t_k}) \right) \exp\left(-\int_0^{\mathrm{T}} \lambda(\mathrm{s}) \mathrm{ds} \right),$$

對數概似函數為：

$$\ln\mathrm{L} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \ln\lambda(\mathrm{t_k}) - \int_0^{\mathrm{T}} \lambda(\mathrm{s}) \mathrm{ds} \ 。 \tag{3}$$

將自我激勵或相互激勵 Hawkes 過程的強度函數$\lambda(t)$代入(3)式即可得到對應的對數概似函數。在給定樣本資料下，使得此函數值為最大的一組參數即為此方法的參數估計值。往後稱包含自我激勵 Hawkes 過程的模型為單變量模型、包含兩個市場或計數過程的模型為雙變量模型、包含三個的是三變量模型。本節整理出各個模型以及包括任意 m 個計數過程的多變量模型之對數概似函數。

設$t_1, t_2, \cdots t_n$為自我激勵 Hawkes 過程在有限時間$[0, T]$內實現的n次跳躍時間點，單變量模型之對數最大概似函數形式如下：

$$lnL(\lambda_0, \alpha, \beta) = -\lambda_0 T - \frac{\beta}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - e^{-\alpha(T-t_k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} ln[\lambda_0 + \beta R(k)]$$

$$\mathrm{R(k)} = \mathrm{e}^{-\alpha(\mathrm{t_k}-\mathrm{t_{k-1}})}\left(1 + \mathrm{R(k-1)}\right),$$

其中$k = 2,3, \cdots, n$且$R(1) = 0$。

考慮$m = 2$的相互激勵 Hawkes 過程，在有限時間$[0, T]$下，兩記數過程的實現時間點分別為$t_{1,1}, t_{1,2}, \cdots t_{1,n_1}$及$t_{2,1}, t_{2,2}, \cdots t_{2,n_2}$。已知雙變量模型的對數最大概似函數可拆解成：

$$lnL(\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$$
$$= lnL^{(1)}(\lambda_{1,0}, \alpha_1, \beta_{12}, \beta_{11}) + lnL^{(2)}(\lambda_{2,0}, \alpha_2, \beta_{21}, \beta_{22}),$$

其中$lnL^{(1)}$的參數$\lambda_{1,0}, \alpha_1, \beta_{12}, \beta_{11}$即為$\lambda_1(t)$的所有固定參數。同樣地，$lnL^{(2)}$的參數為$\lambda_2(t)$的所有固定參數。可以得到：

$$lnL^{(1)}(\lambda_{1,0}, \alpha_1, \beta_{12}, \beta_{11})$$
$$= -\lambda_{1,0}T - \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\beta_{1,j}}{\alpha_1}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1 - e^{-\alpha_1(T-t_{j,k})}\right)\right] + \sum_{k=2}^{n_1}\left(\lambda_{1,0} + \sum_{j=1}^{2}\beta_{1,j}R_{1,j}(k)\right),$$

其中，$R_{11}(1) = R_{12}(1) = 0$，當$k = 2,3, \cdots, n_1$時：

$$R_{11}(k) = e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{1,k-1})}[1 + R_{11}(k-1)]$$
$$R_{12}(k) = e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{1,k-1})}R_{12}(k-1) + \sum_{t_{1,k-1} \le t_{2,j} < t_{1,k}} e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{2,j})}。$$

同理：

$$lnL^{(2)}(\lambda_{2,0}, \alpha_2, \beta_{21}, \beta_{22})$$
$$= -\lambda_{2,0}T - \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\beta_{2,j}}{\alpha_2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1 - e^{-\alpha_2(T-t_{j,k})}\right)\right] + \sum_{k=2}^{n_2}\left(\lambda_{2,0} + \sum_{j=1}^{2}\beta_{2,j}R_{2,j}(k)\right),$$

其中，$R_{22}(1) = R_{21}(1) = 0$，當$k = 2,3, \cdots, n_2$時：

$$R_{22}(k) = e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{2,k-1})}[1 + R_{22}(k-1)]$$

$$R_{21}(k)=e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{2,k-1})}R_{21}(k-1)+\sum_{t_{2,k-1}\le t_{1,k}<t_{2,k}} e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{1,k})} \text{ 。}$$

考慮$m=3$的相互激勵 Hawkes 過程，在有限時間$[0,T]$下，三個記數過程的實現時間點分別為$t_{1,1},t_{1,2},\cdots t_{1,n_1}$、$t_{2,1},t_{2,2},\cdots t_{2,n_2}$及$t_{3,1},t_{3,2},\cdots t_{3,n_3}$。三變量模型的對數最大概似函數同樣可拆解成：

$$\begin{aligned}&lnL(\lambda_{1,0},\lambda_{2,0},\lambda_{3,0},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_{11},\beta_{12},\beta_{13},\beta_{21},\ \beta_{22},\beta_{23},\beta_{31},\ \beta_{32},\beta_{33})\\&\quad=lnL^{(1)}(\lambda_{1,0},\ \alpha_1,\ \beta_{12},\beta_{13},\beta_{11})+lnL^{(2)}(\lambda_{2,0},\ \alpha_2,\ \beta_{21},\beta_{23},\beta_{22})\\&\qquad+lnL^{(3)}(\lambda_{3,0},\ \alpha_3,\ \beta_{31},\ \beta_{32},\beta_{33}) \text{ 。}\end{aligned}$$

每一個部份之具體形式為：

$$\begin{aligned}&lnL^{(1)}(\lambda_{1,0},\ \alpha_1,\ \beta_{12},\beta_{13},\beta_{11})\\&=-\lambda_{1,0}T-\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\beta_{1,j}}{\alpha_1}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1-e^{-\alpha_1(T-t_{j,k})}\right)\right]+\sum_{k=2}^{n_1}ln\left(\lambda_{1,0}+\sum_{j=1}^{3}\beta_{1,j}R_{1,j}(k)\right) \text{ ，}\end{aligned}$$

其中，

$$R_{11}(k)=e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{1,k-1})}[1+R_{11}(k-1)]$$

$$R_{12}(k)=e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{1,k-1})}R_{12}(k-1)+\sum_{t_{1,k-1}\le t_{2,j}<t_{1,k}} e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{2,j})}$$

$$R_{13}(k)=e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{1,k-1})}R_{13}(k-1)+\sum_{t_{1,k-1}\le t_{3,j}<t_{1,k}} e^{-\alpha_1(t_{1,k}-t_{3,j})} \text{ 。}$$

同樣地：

$$\begin{aligned}&\mathrm{lnL}^{(2)}(\lambda_{2,0},\ \alpha_2,\ \beta_{21},\beta_{23},\beta_{22})\\&=-\lambda_{2,0}T-\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\beta_{2,j}}{\alpha_2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1-e^{-\alpha_2(T-t_{j,k})}\right)\right]+\sum_{k=2}^{n_2}ln\left(\lambda_{2,0}+\sum_{j=1}^{3}\beta_{2,j}R_{2,j}(k)\right)\end{aligned}$$

其中，

$$R_{22}(k)=e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{2,k-1})}[1+R_{22}(k-1)]$$

$$R_{21}(k)=e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{2,k-1})}R_{21}(k-1)+\sum_{t_{2,k-1}\le t_{1,j}<t_{2,k}} e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{1,j})}$$

$$R_{23}(k)=e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{2,k-1})}R_{23}(k-1)+\sum_{t_{2,k-1}\le t_{3,j}<t_{2,k}} e^{-\alpha_2(t_{2,k}-t_{3,j})} \text{ 。}$$

國立政治大學 National Chengchi University

最後：

$$lnL^{(3)}(\lambda_{3,0},\ \alpha_3,\ \beta_{31},\ \beta_{32},\beta_{33})$$

$$= -\lambda_{3,0}T - \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\beta_{3,j}}{\alpha_3}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1-e^{-\alpha_3(T-t_{j,k})}\right)\right] + \sum_{k=2}^{n_3} ln\left(\lambda_{3,0} + \sum_{j=1}^{3}\beta_{3,j}R_{3,j}(k)\right),$$

其中，

$$\mathrm{R}_{33}(\mathrm{k}) = \mathrm{e}^{-\alpha_3(\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}-\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}-1})}[1+\mathrm{R}_{33}(\mathrm{k}-1)]$$

$$\mathrm{R}_{31}(\mathrm{k}) = \mathrm{e}^{-\alpha_3(\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}-\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}-1})}\mathrm{R}_{31}(\mathrm{k}-1) + \sum_{\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}-1}\le \mathrm{t}_{1,\mathrm{j}}<\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}} \mathrm{e}^{-\alpha_3(\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}-\mathrm{t}_{1,\mathrm{j}})}$$

$$\mathrm{R}_{32}(\mathrm{k}) = \mathrm{e}^{-\alpha_3(\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}-\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}-1})}\mathrm{R}_{32}(\mathrm{k}-1) + \sum_{\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}-1}\le \mathrm{t}_{2,\mathrm{j}}<\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}} \mathrm{e}^{-\alpha_3(\mathrm{t}_{3,\mathrm{k}}-\mathrm{t}_{2,\mathrm{j}})}\ 。$$

給定任意 m 數，一般而言多變量模型之對數概似函數具有以下數學性質：

$$lnL(\lambda_{i,0},\cdots,\ \lambda_{m,0},\alpha_i,,\cdots,\alpha_m,\ \beta_{11},\cdots,\beta_{1,m},\beta_{21},\cdots,\beta_{2,m},\cdots,\beta_{m1},\cdots,\beta_{m,m})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} lnL^{(i)}\left(\lambda_{i,0},\ \alpha_i,\ \beta_{i,1},\cdots,\beta_{i,m},\beta_{i,i}\right),$$

也就是可以將參數分類成所有會對第 i 個過程造成影響的參數為一組，總共分 m 組，再將每組參數構成的函數線性相加，等同於包含所有參數的對數概似函數。而每組參數構成的函數之形式為：

$$lnL^{(i)}(\lambda_{i,0},\ \alpha_i,\ \beta_{i,1},\cdots,\beta_{i,m},\beta_{i,i})$$

$$= -\lambda_{i,0}T - \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\beta_{i,j}}{\alpha_i}\sum_{k=1}^{n_j}\left(1-e^{-\alpha_i(T-t_{j,k})}\right)\right] + \sum_{k=2}^{n_i} ln\left(\lambda_{i,0} + \sum_{j=1}^{m}\beta_{i,j}R_{i,j}(k)\right),$$

其中，

$$R_{i,i}(k) = e^{-\alpha_i(t_{i,k}-t_{i,k-1})}\left[1+R_{i,i}(k-1)\right]$$

$$R_{i,j}(k) = e^{-\alpha_i(t_{i,k}-t_{i,k-1})}R_{i,j}(k-1) + \sum_{t_{i,k-1}\le t_{j,k}<t_{i,k}} e^{-\alpha_i(t_{i,k}-t_{j,k})}\ ,i\neq j\ 。$$

第五章 實證分析

5.1 實證資料

本研究採用美國S&P500、德國DAX、英國FTSE之股價指數期貨，以1分鐘為單位的高頻日內交易資料。

5.2 資料處理

由於不同商品之間所蒐集到的歷史價格資訊期間不同，因此選擇 2003 年 1 月 2 日至 2014 年 5 月 3 日作為之後實證分析的樣本期間，此期間內包含了 2008 年的金融海嘯以及往後的歐債危機。同時，若其中一個商品於某日因假日休市或者其他原因而有資料空缺，其他商品於該日的資料應予以刪除，以求商品間日期的統一。此外，各商品之交易時間不盡相同，故只取每日 8 點整至 17 點整之間的資料進行分析。

完成以上步驟後，每項商品皆有完全相同的日期、每日 8 點整至 17 點整之間以 1 分鐘為單位的歷史價格資訊。可以將這些資料進一步轉換成以 5 分鐘、10 分鐘或者其他抽樣頻率為單位的日內價格資訊。

5.3 敘述統計

表 1 為 3 個商品分別在 1 分鐘、5 分鐘、10 分鐘的抽樣頻率下，其 r、RV、BV、RJ 之基本敘述統計量。觀察相同的商品，當抽樣頻率的時間越長，兩間隔資料之間的價差可能越大，而使得報酬率的最小值更小、最大值更大、標準差也較大。根據偏態係數，報酬率的分配皆呈現右偏，僅 DAX 在 5 分鐘、10 分鐘的抽樣頻率下出現左偏，但同時其報酬率平均數為負，所以未必表示有較高的機率獲得高額正報酬。

國立政治大學 National Chengchi University

表 1:各市場於各抽樣頻率之敘述統計

		S&P500				DAX				FTSE			
		r	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**
1 min	Minimum	-2.0540	0.0153	0.0118	0.0000	-1.9665	0.0795	0.0613	0.0000	-1.3885	0.0602	0.0562	0.0000
	Maximum	1.8275	85.7015	84.9746	2.6967	2.9553	39.0394	40.6486	8.5024	2.7534	38.9443	34.6578	4.9036
	Average	0.0000	1.2112	1.1479	0.0428	0.0000	1.4189	1.3204	0.0585	0.0000	1.0381	0.9794	0.0288
	SD.	0.0507	2.8697	2.8932	0.1047	0.0523	2.3203	2.2052	0.2144	0.0440	1.8768	1.7700	0.1356
	Skews	0.0401	13.3648	13.2214	11.6682	0.0671	7.2128	7.0965	24.5671	0.3343	9.5026	8.9694	23.0030
	Kurtosis	36.3359	303.5148	290.4602	223.1737	36.1702	82.0588	80.4580	896.8011	44.5241	142.6412	127.1190	724.5866
		r	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**
5 min	Minimum	-3.0064	0.0073	0.0071	0.0000	-2.1743	0.0400	0.0467	0.0000	-1.9973	0.0483	0.0401	0.0000
	Maximum	3.8674	66.4951	53.2730	2.1857	3.6005	38.8077	37.2033	8.5008	3.3360	40.0828	34.0092	8.6980
	Average	0.0000	1.0837	1.0317	0.0088	-0.0002	1.3466	1.2627	0.0432	-0.0002	1.0025	0.9579	0.0243
	SD.	0.1069	2.6784	2.5790	0.0778	0.1143	2.3127	2.2315	0.2398	0.0969	1.9005	1.7904	0.2493
	Skews	0.2347	10.7203	9.5184	16.7043	-0.0443	7.3719	7.1397	20.0007	0.1864	9.2089	8.1709	25.9940
	Kurtosis	39.0254	177.3662	125.2807	359.7584	19.7845	83.0202	76.4189	605.2359	24.1470	131.0132	99.7062	806.9508
		r	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**	**r**	**RV**	**BV**	**RJ**
10 min	Minimum	-4.9049	0.0038	0.0038	0.0000	-2.5199	0.0393	0.0233	0.0000	-3.3221	0.0371	0.0331	0.0000
	Maximum	3.7041	60.6245	64.2831	4.1886	3.0157	40.7317	43.9211	7.0220	2.4755	41.4986	37.1816	8.7864
	Average	-0.0001	1.0544	1.0136	0.0160	-0.0005	1.3258	1.2369	0.0385	-0.0003	0.9821	0.9358	0.0223
	SD.	0.1494	2.6664	2.6142	0.1207	0.1611	2.3109	2.2688	0.2267	0.1360	1.8942	1.8223	0.2150
	Skews	0.1241	10.2925	10.7266	19.8216	-0.1323	7.3374	8.1441	16.4328	0.0598	9.6878	9.4025	28.5130
	Kurtosis	35.7962	153.6961	175.0224	570.1605	14.9460	84.9213	106.1445	402.2574	17.1427	150.7375	140.5654	1052.8552

國立政治大學 National Chengchi University

觀察不同商品，由 r的標準差，或者RV、BV之平均數來看，不論抽樣頻率 FTSE 波動度皆為最小，而 DAX 最大。RJ的值和跳躍的次數或跳躍的幅度正向相，不論任何抽樣頻率，DAX 之RJ平均數皆為最大。

綜合以上觀察，可以大略的說，在樣本期間內，FTSE 的波動程度相對最小。但是 S&P500 與 DAX 的波動度相對大小則難有定論， 比較兩者BV的最小值、最大值、標準差、偏態與峰態，可推論 S&P500 的BV之分配較廣。若比較RJ則相反。可見 S&P500 的波動多來自連續波動，而 DAX 有較多來自離散波動。

表 2 為 3 個商品分別在 1 分鐘的抽樣頻率下，依年份分別計算RV、BV、J、J/RJ、RJ 之平均數、交易天數與跳躍次數。各年度皆有約 240 個交易日，由於資料已經過處理。

觀察BV，亦即實現的連續波動度。各商品於 2003 年期間可能是受到日本經濟泡沫或者美國衰退的影響，使該年度的BV平均值較往後幾年的數值還大。從 2007 年底至 2009 年中為環球金融危機期間，2008 年的BV平均值更是達到空前高點。緊接著歐債危機爆發，使得高BV平均值的現象持續到 2011 年。RV的現象與BV相似。

J/RV代表跳躍佔已實現波動度的比例。從表中看到，在金融危機期間J/RV通常較小，這表示危機期間的劇烈波動多由BV補捉，反而是沒有危機的年份J/RV的平均值較大。此現象造成了 2003、2008、2009、2011 年的跳躍次數相對較少。即使危機年度的跳躍次數較少，但RJ的平均值通常大於其他年度，這表示有比較大的跳躍幅度。

再比較 S&P500 與 DAX 的RJ平均數與跳躍次數。在 1 分鐘的抽樣頻率下，DAX 有超過一半的年份的RJ平均數較 S&P500 的大，但多數年份 S&P500 的跳躍次數較多，再回顧表 1，在整個樣本期間內 DAX 的RJ平均數為最大，可見是其跳躍幅度造成的。

比較表 2、表 3 與表 4，不同抽樣頻率資料的敘述統計量在跳躍次數以外沒有明顯的不同。但不論何種商品，5 分鐘資料的跳躍次數相較於 1 分鐘資料劇烈

減少，而 5 分鐘與 10 分鐘資料的跳躍次數差異不大。由於跳躍偵測的方法是依據大樣本漸進性質，要求時間間隔應細分至無窮小，因此相信以 1 分鐘作為抽樣頻率進行往後的分析是較為合理的。

分別將 S&P500、DAX 及 FTSE 於 1 分鐘抽樣頻率下，計算出的報酬率、BV、J/RV還有RJ繪製成圖 1、圖 2 和圖 3。

國立政治大學
National Chengchi University

表 2:各市場於 1 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計

		1 min											
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
S&P500	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	1.1171	0.5382	0.4422	0.4268	0.7847	4.8301	2.1712	1.0413	1.3284	0.5046	0.3794	0.4061
	BV	1.0326	0.4797	0.3917	0.3800	0.7250	4.7585	2.0314	0.9872	1.2642	0.4553	0.3485	0.3875
	J	0.0846	0.0585	0.0505	0.0467	0.0597	0.0716	0.1399	0.0541	0.0642	0.0493	0.0309	0.0186
	J/RV	0.0919	0.1184	0.1227	0.1191	0.0949	0.0561	0.0825	0.0903	0.0815	0.1092	0.0983	0.0570
	RJ	0.0506	0.0423	0.0377	0.0340	0.0389	0.0576	0.0730	0.0465	0.0461	0.0333	0.0211	0.0090
	# of jumps	95	142	149	149	104	52	80	111	95	114	113	18
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
DAX	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	2.5386	0.6124	0.3555	0.5733	0.6399	3.5825	2.2674	1.0287	2.5880	1.0372	0.5796	0.6878
	BV	2.3904	0.5567	0.3209	0.5215	0.5951	3.3451	2.1039	0.9472	2.4494	0.9527	0.5238	0.6382
	J	0.1482	0.0557	0.0346	0.0518	0.0448	0.2374	0.1636	0.0815	0.1386	0.0846	0.0558	0.0496
	J/RV	0.0770	0.0994	0.1072	0.0984	0.0806	0.0808	0.0758	0.0850	0.0726	0.0848	0.0921	0.0761
	RJ	0.0800	0.0351	0.0212	0.0335	0.0245	0.1495	0.0940	0.0516	0.0687	0.0582	0.0356	0.0270
	# of jumps	77	98	108	102	73	87	74	82	71	106	91	24
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
FTSE	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	1.0609	0.3162	0.2197	0.4274	0.7270	3.5414	1.9379	0.9650	1.4157	0.5801	0.4127	0.3572
	BV	1.0068	0.2886	0.1999	0.3994	0.6872	3.3458	1.8300	0.9172	1.3483	0.5415	0.3847	0.3313
	J	0.0541	0.0276	0.0197	0.0280	0.0398	0.1956	0.1078	0.0479	0.0674	0.0386	0.0281	0.0259
	J/RV	0.0647	0.0881	0.1045	0.0803	0.0647	0.0624	0.0597	0.0565	0.0503	0.0702	0.0692	0.0628
	RJ	0.0190	0.0176	0.0150	0.0174	0.0213	0.0925	0.0503	0.0211	0.0313	0.0197	0.0165	0.0139
	# of jumps	52	100	129	88	66	60	48	49	42	76	69	12

國立政治大學 National Chengchi University

表 3:各市場於 5 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計

5 min

		2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014H1
S&P500	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	0.9344	0.4389	0.3596	0.3426	0.7102	4.5233	1.9307	0.9257	1.2099	0.4316	0.3322	0.3478
	BV	0.8601	0.4036	0.3323	0.3185	0.6754	4.3923	1.7957	0.8688	1.1870	0.4096	0.3117	0.3344
	J	0.0743	0.0352	0.0273	0.0241	0.0348	0.1310	0.1350	0.0568	0.0229	0.0220	0.0204	0.0134
	J/RV	0.0815	0.0773	0.0752	0.0760	0.0569	0.0511	0.0772	0.0570	0.0439	0.0570	0.0677	0.0504
	RJ	0.0148	0.0065	0.0056	0.0048	0.0147	0.0088	0.0158	0.0100	0.0087	0.0068	0.0032	0.0009
	# of jumps	13	8	14	10	9	5	8	8	4	9	7	1
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
DAX	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	2.4166	0.5826	0.3370	0.5304	0.5841	3.4794	2.0687	0.9619	2.4953	0.9796	0.5552	0.6787
	BV	2.3248	0.5302	0.2951	0.4792	0.5363	3.2671	1.9413	0.8951	2.4002	0.8913	0.4981	0.6261
	J	0.0917	0.0524	0.0419	0.0512	0.0479	0.2122	0.1274	0.0668	0.0951	0.0883	0.0571	0.0527
	J/RV	0.0602	0.0887	0.1015	0.0971	0.0886	0.0767	0.0654	0.0736	0.0555	0.0759	0.0955	0.0753
	RJ	0.0554	0.0200	0.0221	0.0256	0.0217	0.1168	0.0587	0.0289	0.0585	0.0381	0.0328	0.0287
	# of jumps	28	29	35	40	33	38	25	31	27	33	45	10
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
FTSE	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	1.0298	0.3052	0.2228	0.4002	0.7345	3.4909	1.8004	0.9157	1.3578	0.5476	0.4039	0.3453
	BV	1.0052	0.2863	0.2068	0.3742	0.6984	3.3358	1.7270	0.8694	1.3138	0.5222	0.3739	0.3212
	J	0.0246	0.0189	0.0160	0.0260	0.0361	0.1551	0.0733	0.0464	0.0440	0.0254	0.0300	0.0241
	J/RV	0.0407	0.0618	0.0648	0.0655	0.0462	0.0388	0.0477	0.0485	0.0342	0.0442	0.0674	0.0593
	RJ	0.0083	0.0069	0.0033	0.0099	0.0252	0.1135	0.0362	0.0152	0.0242	0.0131	0.0137	0.0167
	# of jumps	12	23	17	26	22	14	22	18	11	19	27	8

國立政治大學 National Chengchi University

表 4:各市場於 10 分鐘抽樣頻率之各年度敘述統計

10 min

		2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014H1
S&P500	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	0.8976	0.4141	0.3413	0.3250	0.6966	4.4730	1.8737	0.8903	1.1613	0.4152	0.3235	0.3396
	BV	0.8706	0.3906	0.3216	0.3034	0.6668	4.2999	1.8028	0.8918	1.1149	0.3878	0.3040	0.3222
	J	0.0270	0.0235	0.0196	0.0215	0.0298	0.1731	0.0709	-0.0016	0.0464	0.0273	0.0194	0.0174
	J/RV	0.0368	0.0573	0.0631	0.0682	0.0486	0.0324	0.0381	0.0410	0.0466	0.0630	0.0515	0.0546
	RJ	0.0075	0.0136	0.0078	0.0088	0.0180	0.0327	0.0296	0.0158	0.0201	0.0123	0.0109	0.0118
	# of jumps	8	20	16	17	16	8	9	15	17	26	19	8
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
DAX	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	2.3921	0.5599	0.3189	0.4981	0.5464	3.4802	2.0631	0.9612	2.4758	0.9265	0.5406	0.6508
	BV	2.2366	0.5114	0.2798	0.4435	0.5066	3.2912	1.9457	0.8857	2.3479	0.8465	0.4806	0.5973
	J	0.1555	0.0485	0.0391	0.0546	0.0399	0.1891	0.1174	0.0755	0.1278	0.0801	0.0600	0.0535
	J/RV	0.0661	0.0879	0.0928	0.1093	0.0760	0.0652	0.0620	0.0729	0.0543	0.0720	0.0977	0.0662
	RJ	0.0382	0.0311	0.0229	0.0292	0.0265	0.0894	0.0494	0.0284	0.0546	0.0261	0.0320	0.0255
	# of jumps	13	34	28	36	28	23	19	19	17	15	30	7
		2003	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014H1**
FTSE	Observed days	238	238	241	243	240	242	246	251	251	247	242	77
	RV	1.0112	0.2961	0.2156	0.3806	0.7137	3.4028	1.7600	0.9141	1.3615	0.5181	0.4013	0.3527
	BV	0.9639	0.2821	0.203	0.3626	0.6918	3.2193	1.6985	0.8650	1.3164	0.4815	0.3760	0.3273
	J	0.0472	0.0140	0.0126	0.0180	0.0219	0.1835	0.0615	0.0491	0.0451	0.0366	0.0253	0.0254
	J/RV	0.0533	0.0475	0.041	0.0630	0.0338	0.0521	0.0436	0.0497	0.0531	0.0663	0.0593	0.0647
	RJ	0.0151	0.0066	0.0029	0.0084	0.0178	0.0861	0.0360	0.0204	0.0345	0.0071	0.0122	0.0142
	# of jumps	14	14	11	14	17	13	17	14	20	13	20	7

國立政治大學 National Chengchi University

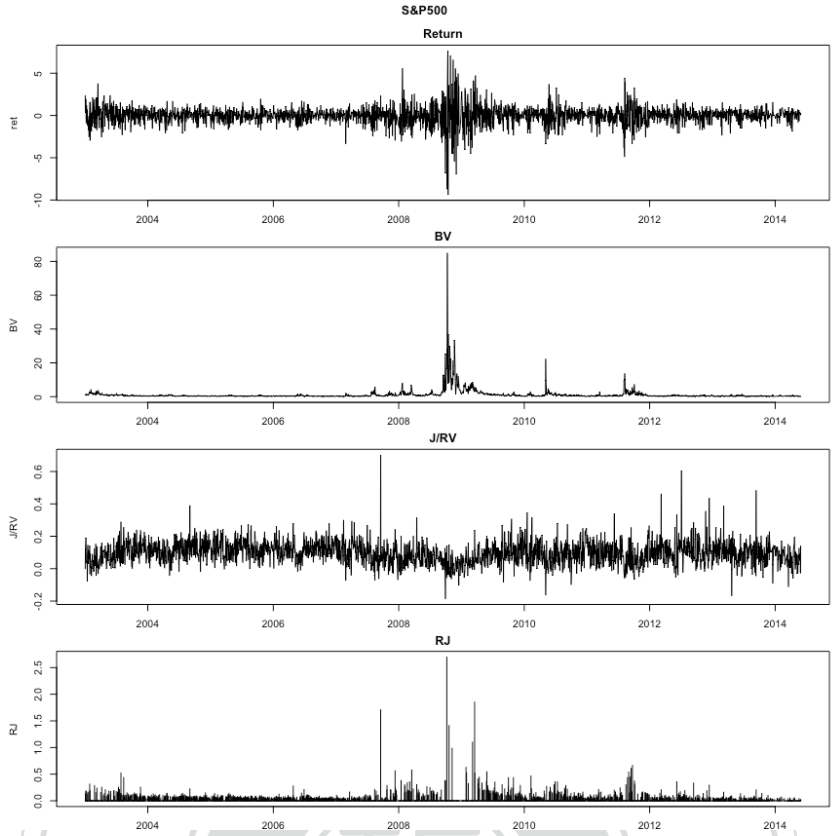

圖 2:S&P500 之跳躍偵測

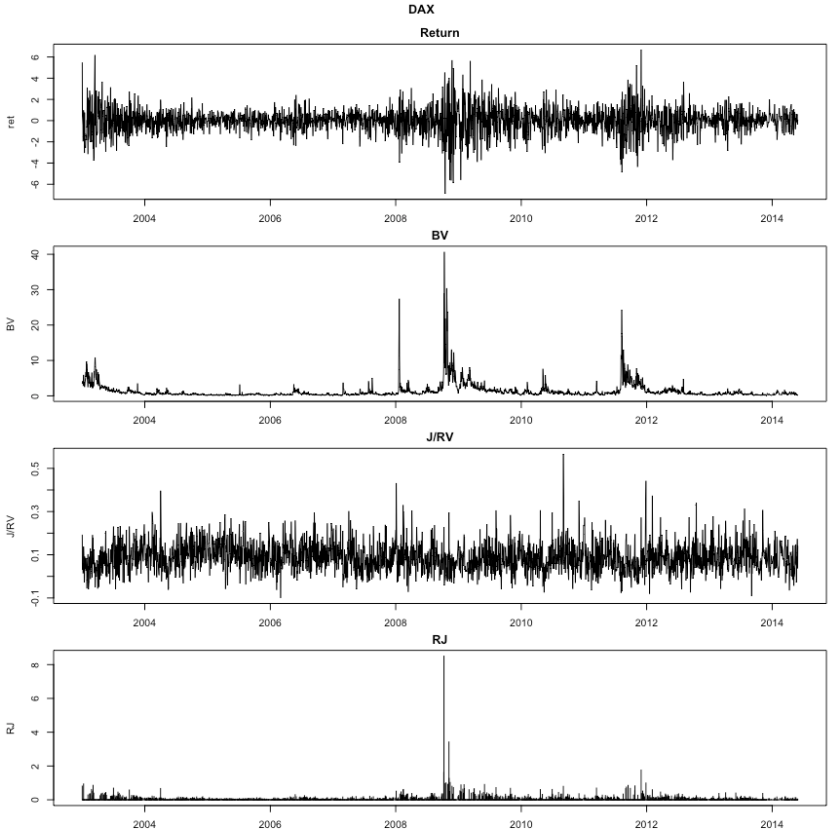

圖 2:DAX 之跳躍偵測

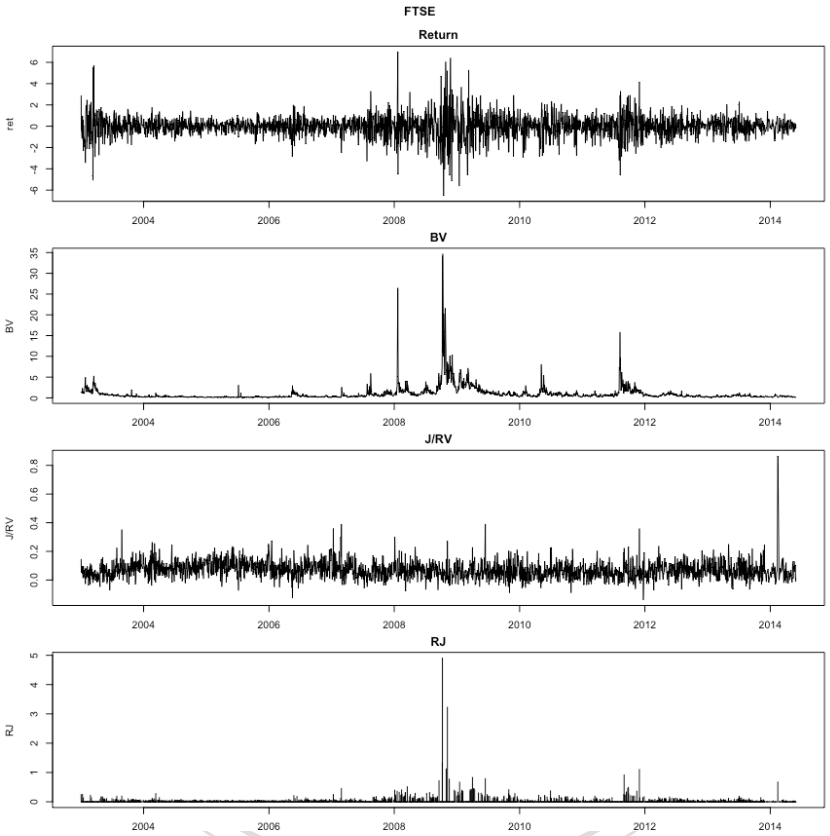

圖 3:FTSE 之跳躍偵測

5.4 參數估計結果

5.4.1 單變量模型

表 5 為單變量模型之參數估計結果。不論何種商品，$\boldsymbol{\alpha}$與$\boldsymbol{\beta}$的估計值皆顯著大於 0，驗證自我激勵效果的存在。

DAX 的$\boldsymbol{\lambda_0}$值最大，表示發生離散波動的基本機率最大，與敘述統計中對RJ的觀察結論相同。S&P500 的$\boldsymbol{\lambda_0}$值雖然比 DAX 的小，可能是因為激勵效果係數$\boldsymbol{\beta}$相對較大，同時衰退速率$\boldsymbol{\alpha}$之估計值相近，使得在表 5 中，S&P500 的跳躍次數比 DAX 的還多。

表 5:單變量模型參數估計結果

	S&P500	DAX	FTSE
λ_0	303.2967***	521.3812***	215.9169***
	(88.18)	(122.3)	(62)
α	69.2819***	67.8185***	54.8363***
	(14.9)	(22.54)	(14.5)
β	52.5247***	32.6469***	40.3395***
	(11.97)	(11.22)	(10.73)

*,**,***分別代表 5%, 2.5%, 0.5%之顯著水準

利用估計結果可以計算每項商品於樣本期間內每日的$\boldsymbol{\lambda}$值，將結果繪製為圖 4。

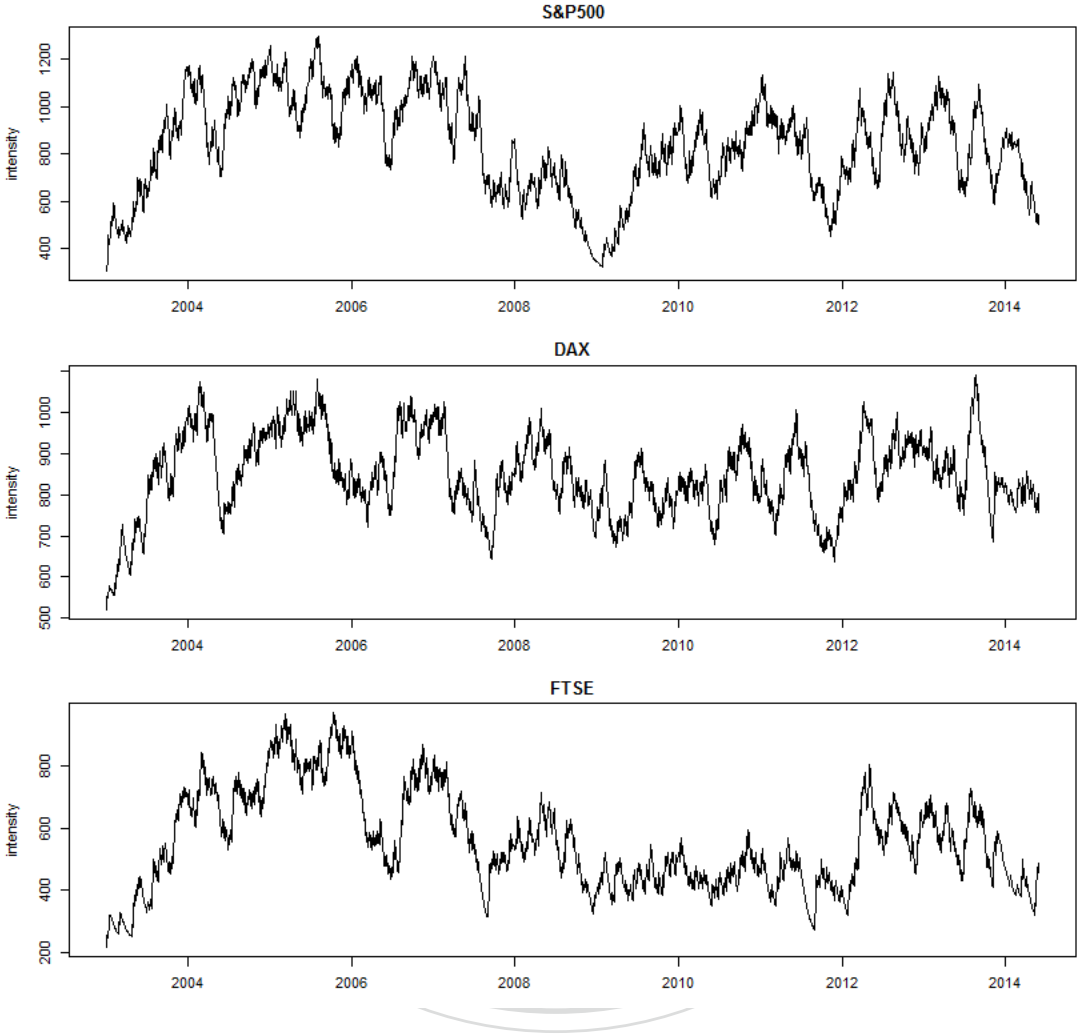

圖 4:單變量模型之跳躍強度

5.4.2 雙變量模型

表 6 為雙變量模型之參數估計結果。各商品的$\boldsymbol{\lambda_0}$估計結果與單因子模型相似，配對後依然是 DAX 最大、FTSE 最小。自我激勵係數$\boldsymbol{\beta}_{ii}$和衰退速率$\boldsymbol{\alpha_i}$的估計結果亦與單因子模型類似。

表 6:雙變量模型參數估計結果

1	S&P500	S&P500	DAX
2	DAX	FTSE	FTSE
λ_{10}	303.4507***	301.6245***	555.1828***
	(106.64)	(82)	(123.55)
α_1	69.5271***	69.3827***	80.8937***
	(15.44)	(15.56)	(30.77)
β_{11}	52.7076***	52.3546***	22.6856*
	(12.8)	(13.03)	(13.59)
β_{12}	0.0002	0.5279	16.7451
	(11.06)	(11.8)	(14.37)
λ_{20}	503.3656***	179.6197***	162.3377*
	(124.45)	(67.52)	(79.14)
α_2	71.6556***	56.3410***	55.9926***
	(26.55)	(15.38)	(13.86)
β_{22}	24.1644*	34.2777***	34.8312***
	(11.22)	(11.58)	(11.42)
β_{21}	9.4004	6.3172	8.1584
	(7.36)	(6.04)	(8.76)

*,**,***分別代表 5%, 2.5%, 0.5%之顯著水準

觀察前兩行 S&P500 配 DAX 以及 S&P500 配 FTSE5 之相互激勵係數$\beta_{ij}, i \neq j$發現，S&P500 對 DAX 之激勵係數為 9.4004，而 DAX 對 S&P500 之激勵係數為 0.0002，這表示 DAX 發生的跳躍對 S&P500 的影響甚微，反過來 S&P500 的跳躍對 DAX 卻有相當的影響。S&P500 對 FTSE 的激勵係數為 6.3172，FTSE 對

S&P500 的傳染係數為 0.5279。這和第 1 行的結果相似，只是 S&P500 對 FTSE 的影響相對弱一些，且 FTSE 也比 DAX 更有能力影響 S&P500。

從第三行的數據，FTSE 對 DAX 的激勵係數為 16.7451，DAX 對 FTSE 的激勵係數為 8.1584，可見彼此間有一定的影響力，其中又以 FTSE 對 DAX 的影響較大。

雖然相互激勵係數之估計結果未達到統計顯著性，但整體獲得的結論與 Ait-Sahalia et al.(2015)非常相似，同樣是美國市場能影響他國市場，而其他市場對美國的影響非常微小，並且推估在三變量模型下獲得的參數也不應違背此結論。

5.4.3 三變量模型

表 7 為三變量模型之參數估計結果。由於參數眾多，將估計結果以圖 4 呈現。各商品的λ_0估計結果與單變量、雙變量模型相似，DAX 最大、FTSE 最小。自我激勵係數β_{ii}和衰退速率α_i的估計結果與之前類似。

在相互激勵係數的部分，β_{12}與β_{13}分別為 DAX 與 FTSE 對 S&P500 的激勵係數。與雙變量模型的結果比較，DAX 對 S&P500 的影響不變，而 FTSE 的影響則有些許上升，從 0.5279 增加至 0.1067，兩者對 S&P500 的影響依然微小。

接著比較β_{21}與β_{31}，兩係數的意義分別是 S&P500 對 DAX 的傳染係數和 S&P500 對 FTSE 的傳染係數。兩者數值差異不大，表示 S&P500 對 DAX 的影響與對 FTSE 的影響接近。

β_{23}為 FTSE 對 DAX 的激勵係數，β_{32}則是 DAX 對 FTSE 的激勵係數。前者的值 12.7530 大於後者的 4.7325，表示 FTSE 對 DAX 的影響較大。

表 7:三變量模型參數估計結果

1	S&P500
2	DAX
3	FTSE
λ_{10}	299.8591***
	(82.48)
α_1	71.1935***
	(15.65)
β_{11}	54.0801***
	(12.95)
β_{12}	0.0002
	(0.12)
β_{13}	0.1067
	(11.79)
λ_{20}	538.5764***
	(127.46)
α_2	81.0765**
	(34.68)
β_{22}	20.4250
	(14.17)
β_{21}	5.5926
	(8.69)
β_{23}	12.7530
	(16.92)
λ_{30}	155.5642*
	(76.66)
α_3	56.9913***
	(14.09))
β_{33}	32.1610***
	(11.45)
β_{31}	5.3040
	(6.28)
β_{32}	4.7325
	(9.21)

*,**,***分別代表 5%, 2.5%, 0.5%之顯著水準

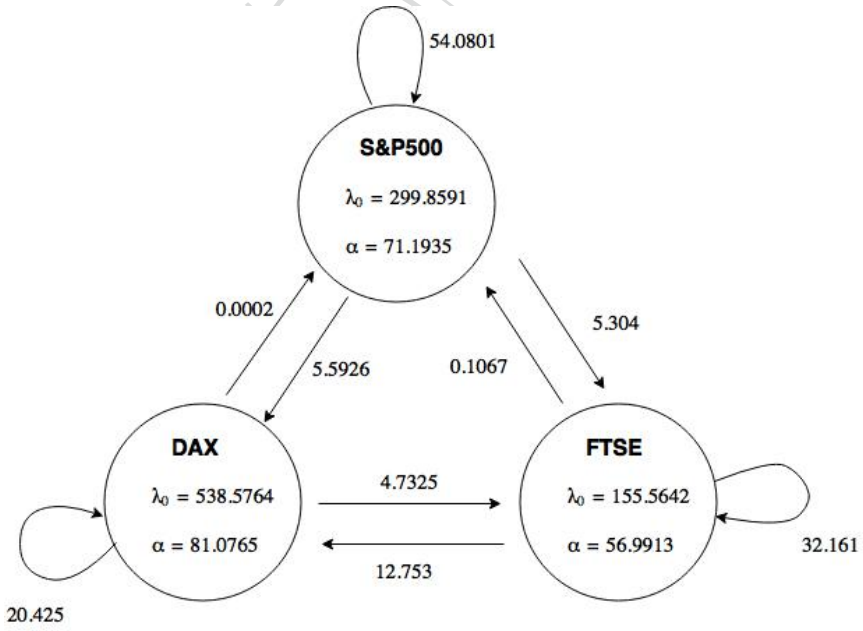

圖 5:三變量模型參數估計結果圖示

三變量模型的結果顯示，若賦予本研究中各國市場一個角色，美國為世界的影響輸出國，其市場內發生的跳躍能直接傳遞英國與德國，或者傳遞至英國再間接傳給德國，也可以先傳染德國後再間接影響英國。而英國的角色為歐洲的影響輸出國，對歐洲其他市場具有一定影響力，相對於德國更有能力將歐洲區域醞釀的跳躍強度傳染至美國，進一步影響全世界。最後，德國為歐洲的影響輸入國，其能夠接收美國釋放出的影響，卻幾乎無法直接牽動美國市場，此外對英國輸出的影響程度也小於受英國影響的程度，所以德國吸收了其他國家跳躍造成的影響，再藉由作為歐洲影響輸出國角色的英國，間接將跳躍強度傳染至世界各地。

最後，使用三變量模型之參數估計結果計算樣本期間每日的λ值，並將結果繪製為圖 5。相較於圖 3，圖 5 呈現的結果包含相互激勵的效果，計算出的λ值亦較高。由於 S&P500 幾乎不受其他市場影響，所以圖形上看不出差異。觀察圖 3，FTSE 的λ值在 2009 年至 2011 年沒有明顯趨勢，而另外兩個市場，尤其是 S&P500，在這段期間內有上升趨勢。在加入了相互激勵效果的圖 5 中可以看到，FTSE 的λ值在 2009 年至 2011 年期間出現了向上的趨勢。比較 DAX 與 FTSE 兩市場，相對於圖 3，考慮相互激勵效果的圖 5 中，雙方的λ值走勢變得更加一致。

國立政治大學 National Chengchi University

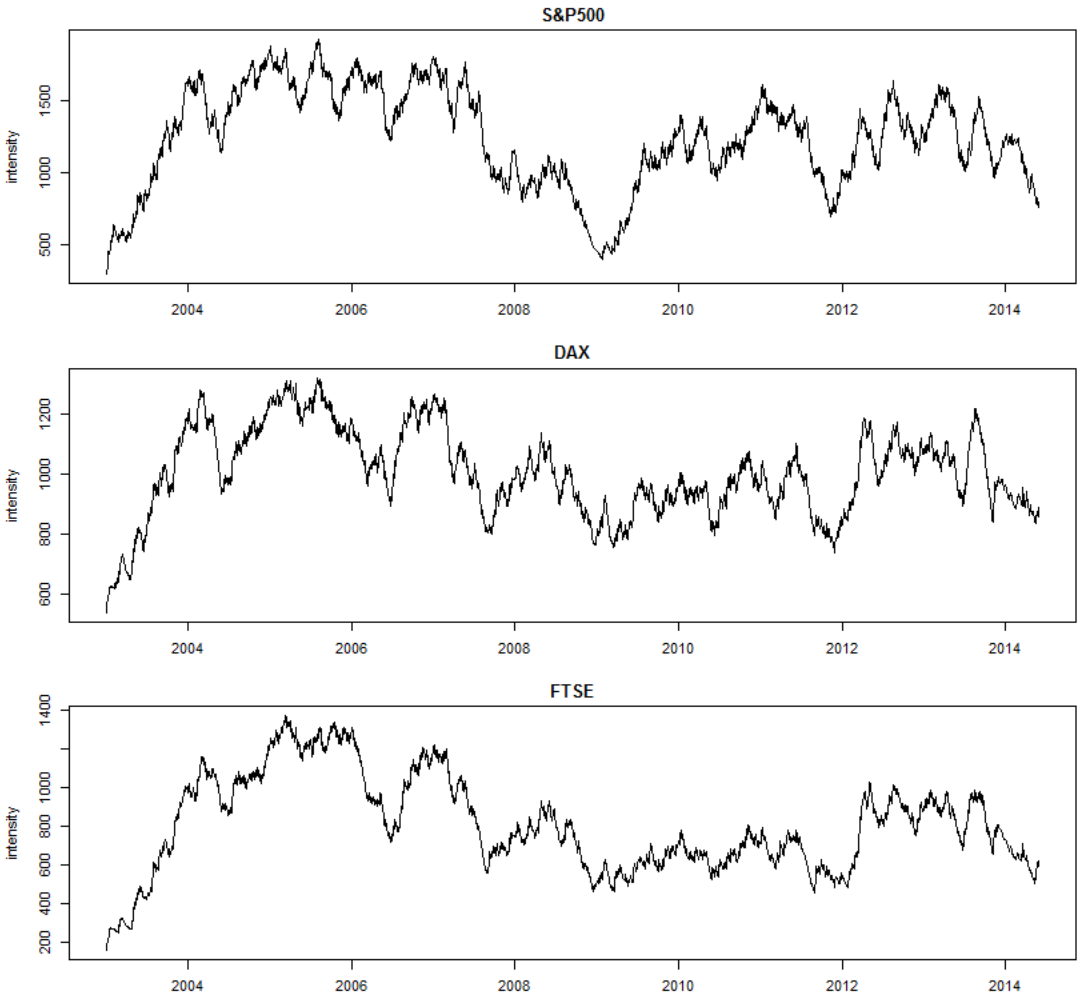

圖 6:三變量模型之跳躍強度

5.5 結論與建議

本研究以股價指數期貨為研究對象，探討美國 S&P500、德國 DAX 與英國 FTSE 市場之間的金融傳染現象。在跳躍偵測的部分，使用與 Ait-Sahalia et al.(2015)不同方法進行偵測，不同於文獻中在金融危機時期會偵測到較多的跳躍，本研究發現危機期間的劇烈波動多由BV補捉，反而跳躍次數相對較少，但是有較大的跳躍幅度。

採用最大概似估計法求取金融傳染模型中相互激勵Hawkes過程之參數，本研究將擴展文獻中多採用的雙變量模型至三變量模型，除了確認市場間相互影響的關係，還能夠避免高估市場間相互影響係數值的大小。對實證估計結果進行解釋，認為當美國市場發生重大事件而產生跳躍時，其影響可以直接傳遞至歐洲市場，進一步藉由歐洲市場間的相互激勵效果持續發酵擴散，並可能再傳回美國。當某歐洲國家發生重大事件而使市場產生跳躍時，會先在歐洲國家間相互傳染，再藉由英國市場影響美國。這樣的結果與市場間的地理位置、時區和區域政經關係相吻合。

對於後續研究者，可以參考本研究之架構，使用不同的檢定統計量或顯著水準、甚至用其他研究方法尋找歷史資料中發生跳躍的時間點，或者可依研究興趣找出資料中特定事件發生的時間點，再藉由本研究整理之高維度相互激勵Hawkes過程的對數概似函數之明確形式已進行參數估計工作。

國立政治大學 National Chengchi University

參考文獻

[1] Aït-Sahalia, Y., Cacho-Diaz, J., & Laeven, R. J. (2015). Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes. ***Journal of Financial Economics***, 117(3), 585-606.

[2] Aït-Sahalia, Y., Laeven, R. J., & Pelizzon, L. (2014). Mutual excitation in Eurozone sovereign CDS. ***Journal of Econometrics***, 183(2), 151-167.

[3] Andersena, T. G., Bollerslevb, T., & Dieboldc, F. X. (2005). Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Disentangling Continuous and Jump Components in Measuring.

[4] Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. ***Journal of Financial Econometrics***, 2(1), 1-37.

[5] Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2006). Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. ***Journal of Financial Econometrics***, 4(1), 1-30.

[6] Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. ***Biometrika***, 58(1), 83-90.

[7] Huang, X., & Tauchen, G. (2005). The relative contribution of jumps to total price variance. ***Journal of Financial Econometrics***, 3(4), 456-499.

[8] Ozaki, T. (1979). Maximum likelihood estimation of Hawkes' self-exciting point processes. ***Annals of the Institute of Statistical Mathematics***, 31(1), 145-155.

[9] Vere-Jones, D. (1970). Stochastic models for earthquake occurrence. ***Journal of the Royal Statistical Society***. Series B (Methodological), 1-62.

國立政治大學 National Chengchi University