快速找尋停車格問題分析
以「雙排單向道」停車為例

劉繕榜[1,2], 林謙[1], 黃柏虔[1], 胡裕仁[3,4*]，張宜武[2]
[1]台北市立大直高級中學, [2]國立政治大學應用數學系, [3]國立中興大學應用數學系, [4]國立中科實驗高中
*huyujen@gmail.com

摘要

本研究以「雙排單向道」停車為研究基礎，並針對兩種不同停車路線進行比較。分別是「只直走」及「只轉彎」。試著找出遞迴式來表達這兩種不同的停車路線，藉由遞迴式得出各狀況下的通式。最後再對「雙排停車道」中兩種停車路線進行比較，找出最佳組合的停車方式及那一種方式能較快完成停車格找尋路線。

關鍵字：排列組合、停車函數

1 前言

在停車場中尋找車位是件十分麻煩的事，尤其像是美國各種大型盛會，例如 MLB（美國職棒大聯盟），駕駛們常在目的地附近徘迴，只為了尋找一個位子，雖然停車場車位很多，但還是浪費了大量時間在尋找停車位，甚至錯過了精采的球賽，但這是否和停車場動線設計的好壞有關？由文獻[3]中發現了一個有趣的數學問題，文章中所提到的問題和駕駛們所面臨的停車問題十分類似，因此衍生出一系列的類似問題來探討。

研究目的：

以數學模型表示「雙排單向」停車之二種規則並比較兩種「雙排單向」停車之成功停車數列多寡。

研究方法：

遞迴法：觀察一停車規則的規律，並找出遞迴式及證明一般式，最後以程式模擬驗證。

名詞解釋：

停車數列

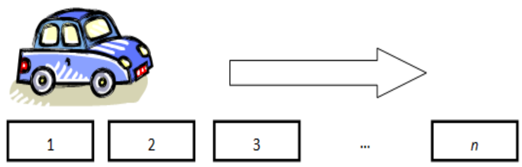
若一數列表示司機想停的車位則稱之。停車數列以 (W_1,W_2,W_3,W_4,W_5) 表示之，若第一位司機想停的車位編號為 3，則 $W_1=3$，也就是說，w_i 表示第 i 位司機想停的車位編號。

成功停車數列與失敗停車數列

若所有的司機皆停入此停車場，則此停車數列為一成功停車數列，反之則為一失敗停車數列。

「單排單向」停車道

「單排單向」停車規則係停車函數在基本定義中假設的停車狀況。在一條道路的一側有停車位，司機只能一路往前開，不能回頭(單向道)，若到最後一個車位之後，還是停不到車位，就只能離開，如圖一。



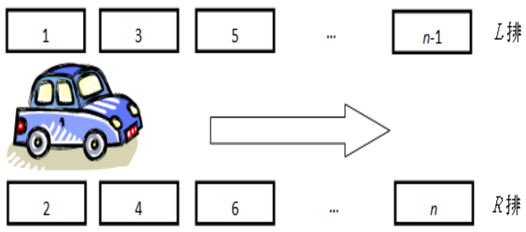
圖一：單排單向停車道

若單行道中有 n 個車位，並有 n 位司機想將他們的車子停入此巷中。車位編號依序由小到大依序編上 1 到 n。如果某位司機想停的車位被停走，他將往前尋找最近的空車位並停入。若一位司機到最後仍無法找到車位，則被迫離開單行道。例如：假設 $n=5$，假設現有兩數列 $(1,5,1,3,2)$、$(1,5,4,4,3)$ 為司機的喜好，第一個數列的所有司機都可以停得到車位；而第二

個數列的第 4 位司機將停不到車位。

「雙排單向」停車道

雙排單向停車道係根據文獻[3][4][5]，並參考現實世界所設計。即一單行道兩側皆有車位，司機能選擇其中一排之車位並停入，如圖二。



圖二：雙排單向停車道

停車順序

1.有 n 位司機以停車數列之順序進入有 n 個車位的單向道。

2.一停車數列 $(W_1, W_2, W_3, W_4, \cdots, W_n)$，第 i 位司機停編號為 W_i 的車位。

3.若 W_i 車位是空的則停入；若 W_i 車位被占據了，則依照此規則繼續尋找車位。

4.若到單向道最後仍無法找到車位，則離開此停車道。

停車規則

「只直走」規則

1.若欲停車位為空格即停入。

2.若欲停車位遭佔據則繼續**向前**尋找最近空車位。

3.若皆無法找停到停車位即離開此停車道。

4.舉例：$n=7$，一個數列 $(3,2,4,3,7,1,4)$，第 1、2、3 位司機皆停到想停的車位，第 4 位司機在此狀況下前進到 5 號車位，第 5、6 位司機也停入想停的車位，第 7 位司機在此狀況下停到 6 號車位。

「只轉彎」規則

1.若欲停車位為空格即停入。

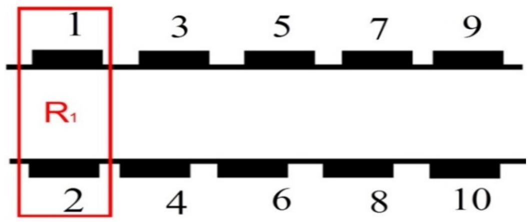
2.若欲停之車位遭佔據則**轉向另一車道**尋找最近空車位。

3.若轉向後若無法找到車位即離開此停車道。

4.舉例：$n=5$，一個數列 $(3,1,1,4,5)$，第 1、2 位司機停到自己想要的車位，第 3 位司機在此狀況下只能轉向到 2，其餘司機皆停到自己想停的車位。

符號定義

n：代表司機數，在本次研究中也代表車位數。當 $n=0$ 時，成功數列個數定義為 1。P_n：表示 n 個司機在單排停車狀況下的成功數列個數，公式為 $(n+1)^{n-1}$ [3]。r：表示 L 排的車位個數，即 $r=\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$。$R_k$：由 $\{2k-1, 2k\}$ 組成的集合，如下圖三。



圖三：1，2 屬於 R_1

R'：設一個停車數列為 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$，則 R' 數列為 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$，其中 $b_i=\left\lceil \frac{a_i+1}{2} \right\rceil$。$F_k$：$R'$ 數列中 k 的個數，且 $\sum_{k=1}^{r} F_k = n$。例如一 R' 數列為 $(1,2,2,2)$，則 $F_1=1, F_2=3$。舉例來說，$n=7$ 之停車數列：$(1,3,3,7,5,4,2)$，

1. $r=4$
2. $R'=(1,2,2,4,3,2,1)$
3. $F_1=2, F_2=3, F_3=1, F_4=1$

「只直走」規則分析

成功停車數列個數

命題 1：在「只直走」的情況下，成功停車數列個數為 $(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，其中 n 為司機數(停車位數)，$r=\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil$。

命題 1 論證

L 排和 R 排個別可視為一個「單排單向停車」，所以若任一排出現失敗的情況，在「只直走」停車規則必定失敗。由上述推論且此二數列互為獨立，所以依照乘法原理將其相乘，得 $(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\cdots$①設 L 排有 r 個車位，則 R 排有 $(n-r)$ 個車位。

若 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 為一成功數列，則必有 r 個 a_i 在 L 排，$(n-r)$ 個 a_i 在 R 排。其分配方法為 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\cdots$②。將①②相乘，可得成功停車數列的個數為 $(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$。由程式模擬結果，與「只直走」狀況一般式相同。

「只轉彎」規則分析

成功停車數列個數

命題 2：在「只轉彎」狀況下，成功停車數列個數等於 $n!2^{n-r}$，其中 n 為司機數(停車位數)。

命題 2 論證

我們將偶數情況和奇數情況分開討論：當 n 為偶數時：在此狀況下，我們發現到其中的遞迴關係式如下，其中 A_n 為 n 位司機在「只轉彎」狀況下成功的停車數列個數，於此定義 $A_0=1$。$A_{n+2}=A_n\times 2(n+1)(n+2)$。

遞迴式推導：

設一個成功停車數列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$，其 R' 數列經由小到大排序後得 $(1,1,2,2,3,3,\cdots,r-1,r-1,r,r)$。並於上 R' 數列中插入兩個 $(r+1)$，成為另一成功 $(n+2)$ 停車數列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n+2})$ 的新 R' 數列。

其中原 R' 數列每一個數字之間共有 $(n+1)$ 的間隔可以插入兩個 $(r+1)$，所以排列數為 $A_n\times C_2^{n+2}$，最後將 R' 數列轉成停車數列，即乘上 2^2，得

$$\begin{aligned}A_n\times C_2^{n+2}\times 2^2&=A_n\times\frac{(n+2)!}{2!n!}\times 2^2\\&=A_n\times 2(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

由遞迴式推導一般式：

$$A_2\times A_4\times A_6\times\cdots\times A_n=$$

$$A_0\times A_2\times A_4\times\cdots\times A_{n-2}\times 2^{\frac{n}{2}}\times n!$$

$$A_n=2^{\frac{n}{2}}\times n!$$

一般式證明：

當 $n=2$ 時，$A_2=2^{\frac{2}{2}}\times 2!=4$ 成立。$n=4$ 時，$A_4=2^{\frac{4}{2}}\times 4!=96$ 成立。$n=6$ 時，$A_2=2^{\frac{6}{2}}\times 6!=5760$ 成立。設當 $n=2k,k\in$ 時成立，即 $A_{2k}=2^{\frac{2k}{2}}\times(2k)!$ 成立，則當 $n=2(k+1),k\in$ 時，即：

$$A_{2(k+1)}=A_{2k}\times 2(2k+1)(2k+2)$$

$$=2^{\frac{2k}{2}}\times(2k)!\times 2(2k+1)(2k+2)$$

$=2^{\frac{2(k+1)}{2}}\times(2(k+1))!$ 亦成立。又當 n 為偶數時，$r=\dfrac{n}{2}=n-r$，得 $A_n=n!2^{n-r}$。

當 n 為奇數時：在此狀況下，我們發現到其中的遞迴關係式如下，其中 A_n 為 n 個司機在「只轉彎」狀況下成功的停車數列個數：$A_{n+2}=A_n\times 2(n+1)(n+2)$。

遞迴式推導：

設一成功停車數列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$，其 R' 數列經由小到大排序後得 $(1,1,2,2,3,3,\cdots,r-1,r-1,r)$。於上 R' 數列中插入 r 和 $(r+1)$ 各一個，成為另一成功 $(n+2)$ 停車數列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n+2})$ 的新 R' 數列。其中原 R' 數列每一個數字之間共有 $(n+1)$ 的間隔可以插入 r 和 $(r+1)$ 各一個，所以排列數為 $A_n\times C_2^{n+2}$，由於原 R' 數列中的 r 轉換成停車數列有兩種可能，乘上 2，最後 r 和 $(r+1)$ 可調換，乘上 $2!$，得 $A_n\times C_2^{n+2}\times 2^2=A_n\times\dfrac{(n+2)!}{2!n!}\times 2^2$
$=A_n\times 2(n+1)(n+2)$

由遞迴式推導一般式：

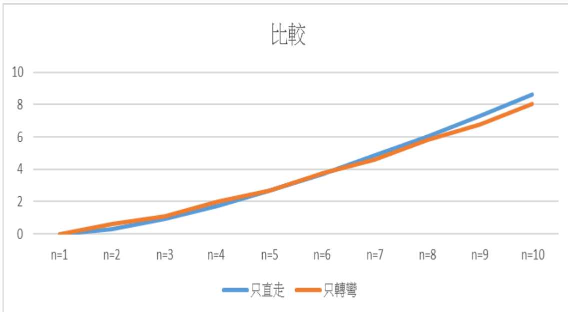
$A_3\times A_5\times A_7\times\cdots\times A_n=A_1\times A_3\times A_5\times\cdots\times A_{n-2}\times 2^{\frac{n-3}{2}+1}\times n!$ $A_n=2^{\frac{n-1}{2}}\times n!$

一般式證明：

當 $n=3$ 時，$A_3=2^{\frac{3-1}{2}}\times 3!=12$ 成立。$n=5$ 時，$A_5=2^{\frac{5-1}{2}}\times 5!=480$ 成立。$n=7$ 時，$A_7=2^{\frac{7-1}{2}}\times 7!=40320$ 成立。

設當 $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$ 時成立，即：$A_{2k+1}=2^{\frac{(2k+1)-1}{2}}\times(2k+1)!$ 成立，則當 $n=2k+3,\ k\in\mathbb{Z}$ 時，即：
$A_{2k+3}=A_{2k+1}\times 2[(2k+1)+1][(2k+1)+2]$
$=2^{\frac{(2k+1)-1}{2}}\times(2k+1)!\times 2(2k+2)(2k+3)$
$=2^{\frac{(2k+3)-1}{2}}\times(2k+3)!$ 亦成立。又當 n 為奇數時，$r=\dfrac{n+1}{2},n-r=\dfrac{n-1}{2}$，得 $A_n=n!2^{n-r}$。

依據程式模擬結果，與「只轉彎」狀況一般式相同。因此「只直走」規則與「只轉彎」規則比較，可由一般式的迭代圖表(如圖四)來比較。



圖四：「只直走」狀況與「只轉彎」狀況比較

在圖四中我們發現到當 n 越大時「只直走」規則與「只轉彎」規則的成功個數差距也越大，推斷直走較有可能停到車位，但離原本的目的地將可能差距更大。透過代數證明，可得出命題 3。

命題 3：若 n 為司機數(停車位數)，則當 $n>6$ 時，「只直走」狀況之成功個數恆大於「只轉彎」狀況之成功個數。亦即

$$(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\frac{n!}{r!(n-r)!}>n!2^{n-r},n>6 \quad \text{(E1)}$$

命題 3 論證

將此分為兩個部分：

當 n 為偶數：令 $n=2k$ ，$k\in\mathbb{Z}$ ，若 $n>6$ ，則 $k>3$ ，則式(E1)即 $(k+1)^{k-1}\times(k+1)^{k-1}\times\frac{1}{(k!)^2}>2^k$ 根據文獻[2]補充題 2-(iii)：$n!<(\frac{n+1}{2})^n,\forall n\geq 2$，可得：$\frac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}}{(k!)^2}>$

$$\frac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{2k}}=\frac{2^{2k}(k+1)^{2k-2}}{(k+1)^{2k}}=\frac{2^{2k}}{(k+1)^2}$$

。由數學歸納法證明得知 $2^n>(n+1)^2,\ \forall n\geq 6$ ，上式可推得：

$$\frac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}}{(k!)^2}>\frac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{2k}}$$

$$=\frac{2^{2k}(k+1)^{2k-2}}{(k+1)^{2k}}=\frac{2^{2k}}{(k+1)^2}>\frac{2^k(k+1)^2}{(k+1)^2}=2^k$$

$k>3$，又 n 為偶數，k 帶入 4：

$\frac{(4+1)^{4-1}(4+1)^{4-1}}{(4!)^2}>2^4$ 得 $n\geq 8$ ($n=6$ 不合)。

當 n 為奇數：令 $a=\frac{n+1}{2},\ b=\frac{n-1}{2}=a+1$ ，$a+b=n$ 則式(E1) $(a+1)^{a-1}\times(b+1)^{b-1}\times\frac{1}{a!b!}>2^b$ 根據文獻[2]補題 2-(iii)：$n!<(\frac{n+1}{2})^n,\ \forall n\geq 2$ ，得：

$$(a+1)^{a-1}(b+1)^{b-1}\frac{1}{a!b!}$$

$$>(a+1)^{a-1}(b+1)^{b-1}\frac{1}{(\frac{a+1}{2})^a(\frac{b+1}{2})^b}$$

$$=\frac{2^a\times 2^b}{(a+1)(b+1)}=\frac{2^n}{(a+1)(b+1)}$$

欲證明 $\frac{2^n}{(a+1)(b+1)}>2^b$ 。

將上式整理：$\frac{2^n}{2^b}>(a+1)(b+1)\Leftrightarrow 2^a>a(a+1)$ 當 $a=5$ ($n=9$) 時成立，即 $2^5=32>5(5+1)=30$ 。

設 $a=k$ 時成立，即 $2^k>k(k+1)$ 成立則當 $a=k+1$ 時：$2^{k+1}-(k+1)(k+2)>2k(k+1)-(k+1)(k+2)\quad=k^2-k-2$
$=(k-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}>0(k\geq 5)\quad\therefore 2^{k+1}>(k+1)(k+2)$

亦成立。由數學歸納法知 $2^a>a(a+1),a\geq 5$ (即 $n\geq 9$)成立。

根據上論證得：$(a+1)^{a-1}(b+1)^{b-1}\frac{1}{a!b!}>$

$$(a+1)^{a-1}(b+1)^{b-1}\frac{1}{(\frac{a+1}{2})^a(\frac{b+1}{2})^b}$$

$$=\frac{2^a\times 2^b}{(a+1)(b+1)}=\frac{2^n}{(a+1)(b+1)}>2^b$$

n 為奇數：$n=7,a=4,b=3$ 代入：

$$(4+1)^{4-1}(3+1)^{3-1}\frac{7!}{4!3!}=70000>7!2^3=40320$$

亦成立，得 $n\geq 6$ ($n=5$ 不合)。由論證 1 及 2 得知：「當 $n>6$ 時，「只直走」狀況之成功個數恆大於「只轉彎」狀況之個數」為真。

結論

由**命題 1** 知，「只直走」規則成功停車數列之數量為 $(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 。

由**命題 2** 可知，「只轉彎」規則成功停車數列之數量為 $n!2^{n-r}$ 。

由**命題 3** 得知，當 $n>6$ 時，「只直走」規則之成功個數恆大於「只轉彎」狀況之個數。

綜合上述得知：將停車路線規劃為「只直走」規則較佳。

参考文獻

[1]許志農，高級中學數學課本第二冊，龍騰文化，2012。

[2]蔡聰明，談 Stirling 公式，數學傳播，VOL.17(2)，1983。

[3] Beck, M.，Parking Functions，Stanford Math Circle，2010.

[4] Ford, P.， Parking Sequences，Circles on the Road，2012.

[5] Shin, H.: Forests and Parking Functions. THE 61ST SÉMINAIRE LOTHARINGIEN DE COMBINATOIRE CURIA, PORTUGAL，2008.