國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

一個組合等式的對射證明
A Bijective Proof of a Combinatorial Identity

碩士班學生： 黃永昌 撰
指導教授：李陽明 博士

中華民國 107 年 07 月 10 日

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

誌　　謝

撰寫論文是研究生最大的難關，而我從高中開始，就對排列組合方面的內容很有興趣，在讀碩士班時，修完李陽明老師的組合學後，更加令我確信我論文想做與組合方面相關的研究，並且馬上就通過了組合學資格考，很幸運的，也很感謝李陽明老師，願意擔任我的指導教授。

然而我想要完成的事情太多，除了系上的課程，還修了教育學程，其中還有一個學期去當實習老師，導致我與李陽明老師討論的時間少很多，但李陽明老師還是孜孜不倦的教導，並在我實習結束後，花了很多額外的時間來指導我的論文，也常常講他以前讀博班時的故事，來激勵我們，因此我在這邊非常感謝我的指導教授—李陽明老師。

而在這邊也感謝研究室一起奮鬥的夥伴們，感謝珮瑄、大維和昱翔，我們同為一個指導教授，研究領域相同，比較能理解對方的問題所在，並互相幫忙思考該如何解決，因此在論文方面我受到你們很多的幫助。也感謝顗錞、泰霖和力夫等等研究室的同伴們，我們在課業方面互相教導、學習，這一路上的互相扶持、一起奮鬥，並一起通過實變及其他科目。另外也感謝應數系的各位教授的指導及鼓勵，讓我的數學知識成長許多。也感謝系辦助教們，常常有許多事情麻煩你們，而助教也都不厭其煩的幫助我們。

最後，要感謝我的家人，感謝你們的默默的支持及無微不至的照顧，因為有你們的陪伴與關懷，我才能一路上無所畏懼，即使失敗也能再次爬起來，最後，想必我沒有令你們失望，終於完成我的學業，謝謝你們。

黃永昌 謹誌於

政治大學理學院

中華民國107年7月

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

摘　要

研究組合數學的目的不僅是算出答案，而是要理解算出答案的過程。在本篇論文中，本研究嘗試用組合的方法證明以下等式：

$$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1} = nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$$

在解這個組合等式的時候，我們不使用一般的展開計算方式，而是先建構兩個集合，其個數分別為 $C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}$ 以及 $nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ ，並在兩個集合之間建構一個函數。此函數的特點是一對一且映成，也就是說此函數為對射函數(bijective function)，利用這個方法即可完成本篇的證明。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

Abstract

The purpose of studying combinatory mathematics is not only to calculate the answer, but to understand the process of calculating the answer. In this paper, this study attempts to use the combined method to prove the following equation:

$$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1} = nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$$

To solve this combination equation, instead of using the general expansion calculation method, two sets are constructed whose numbers of elements are, respectively,$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}$ and $nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$, then a function are constructed between two sets. This function is characterized by a one to one and onto, that is to say this function is a bijective function. We can use this method to complete the proof of this article.

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

目　錄

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

第一章　　緒論

1.1前言

高中數學在介紹排列組合的單元的時候，一開始簡單的題目，以及簡單的公式都還可以理解它的由來，而學到了公式之後，遇到較為複雜的題目或者組合等式，此時老師就會叫你代入公式(1.2)，或者使用窮舉法，然而我認為這樣僅僅得到答案，卻不知為何可以如此。

我的目標是成為高中數學老師，我希望我的學生在學習排列組合的時候，不是只知道怎麼做，而不知道怎麼來，因此遇到比較複雜的組合等式，可以先把他想成貼近生活的例子(2.1)，學生也比較容易接受與想像，雖然證明尚需大學數學能力，不過相信只要建立起對應關係，讓他們有想像空間，便能讓學生少背一些公式，多一些理解。

而在碩士班期間修習組合學的課程時，我們使用的是 Alan Tucker 的書，在排列的一般計數方法的章節裡面，$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ 便是其中的一道題目，看到這道題目便引起了我的興趣，因此希望從中找出它們之間的對應關係。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

1.2一般方法

我們可以藉由組合展開式來檢驗此組合等式的兩邊是否相等：

$$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$$

$$左式=C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot(n-r)\cdot\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

$$=\frac{(n+r-1)!\,n}{r!\,r!\,(n-r-1)!}$$

$$右式=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}=n\frac{(n+1-r)!}{(2r)!\,(n-r-1)!}\cdot\frac{(2r)!}{r!\,r!}$$

$$=\frac{(n+r-1)!\,n}{r!\,r!\,(n-r-1)!}$$

因此左式等於右式。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

第二章　　組合論證法

2.1 簡介

我們可以將此題目 $C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ 改寫成下列問題：

某班有 $(n+r)$ 位同學，由於要參加運動會，因此必須選出1位隊長以及 r 位正取隊員及 r 位備取隊員，共 $(2r+1)$ 人組成班隊，而隊長須從座號1號至 n 號中選出，請問共有幾種方法？

令隊長為 C ，正取隊員為＋，備取隊員為－，而隊員為□，含正取及備取，剩下的則稱為落選人員為×，共有 $(n-r-1)$ 位落選人員。

2.2 左式論證法

左式：我們採取先排位置，再排座號的方法。

先排前n個位置，隊長、備取隊員、落選人員加起來共 n 個，因此將他們排在前 n 個位置裡，而正取隊員則排在最後，如圖(一)。

座號

$$\text{位置}\quad \underbrace{\bigcirc\ \ \bigcirc\ \ \cdots\ \ \bigcirc}_{n\text{個}}\ \Big|\ \underbrace{+\ \ \cdots\ \ +}_{r\text{個}}$$

圖(一)

我們以 $n=7$，$r=2$ 為例，班上共9位同學，因此需選出1位隊長，2位正取隊員以及2位備取隊員。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

(1) 將隊長、備取隊員、落選人員共7位同學放在前7個位置，並在前7個位置中，並先排2位備取隊員，假設放在第2及第6個位置，如圖(二)。

座號							
位置	○	−	○	○	○	−	○

圖(二)

因此有 $C_r^n = C_2^7$ 種方法數。

(2) 前7個位置裡面，剩下的 $(n-r) = 5$個位置再排一個隊長，假設放在第4個位置，如圖(三)。

座號							
位置	○	−	○	C	○	−	○

圖(三)

因此有 $(n-r) = 5$種方法數。

此時前7個位置剩下的則為落選人員，而正取隊員則排在最後2個位置，如圖(四)。

座號									
位置	×	−	×	C	×	−	×	+	+

圖(四)

(3) 此時定義若隊長在第 i 個位置，則給予隊長座號為 i ，此時隊長在第4個位置，因此給予隊長4號，如圖(五)。

座號				4					
位置	×	−	×	C	×	−	×	+	+

圖(五)

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

並讓正取隊員在剩下的座號裡挑2個號碼，假設正取隊員選擇3號及6號，如圖(六)。

座號				4				3	6
位置	×	−	×	C	×	−	×	+	+

圖(六)

因此有 $C_r^{n+r-1} = C_2^8$ 種方法數。

由於已經排好了位置，則剩下的座號(1、2、5、7、8、9)則由自然數大小排列順序排給備取隊員以及落選人員，如圖(七)。

座號	1	2	5	4	7	8	9	3	6
位置	×	−	×	C	×	−	×	+	+

圖(七)

因此

(1) 在前 n 個位置先排 r 個備取隊員，共有 C_r^n 種方法數。

(2) 前 n 個位置裡面，剩下的 $(n-r)$ 個位置再排一個隊長，共有 $(n-r)$ 種方法數，此時前 n 個位置剩下的則為落選人員，而正取隊員則排在最後 r 個位置。

(3) 此時定義若隊長在第 i 個位置，則給予隊長座號為 i ，並讓正取隊員在剩下的座號裡挑 r 個號碼，共有 C_r^{n+r-1} 種方法數，由於已經排好了位置，則剩下的座號則由自然數大小排列順序排給備取隊員以及落選人員。

因此利用此方法選出隊員的方法數為 $C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}$ 種。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

2.3 右式論證法

右式：我們改為先排座號，再排位置的方法。

同樣以 $n=7$，$r=2$ 為例，班上共 $n+r=9$ 位同學，因此需選出1位隊長，2位正取隊員以及2位備取隊員。

(1) 從1號至7號中選一個隊長，假設選擇隊長為4號，如圖(八)。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置				C					

圖(八)

因此有 $n=7$ 種方法數。

(2)再從剩下的 $n+r-1=8$ 人中選出 $2r=4$ 位隊員，含正取及備取，假設為2、3、6、8號同學，如圖(九)。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置		□	□	C		□		□	

圖(九)

剩下未被選出的人員自然形成落選人員，共有 $n-r-1=4$ 位，如圖(十)。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置	×	□	□	C	×	□	×	□	×

圖(十)

因此有 $C_{2r}^{n+r-1}=C_4^8$ 種方法數。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

(3)最後則是從4位隊員中選出2位正取及2位備取，假設正取隊員為3、6號同學，如圖(十一)。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置	×	□	+	C	×	+	×	□	×

圖(十一)

而2、8號同學自然為備取隊員，如圖(十二)。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
位置	×	−	+	C	×	+	×	−	×

圖(十二)

因此有 $C_r^{2r} = C_2^4$ 種方法數。

因此共有 $nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r} = 7 \cdot C_4^8 \cdot C_2^4$ 種方法數。

因此

(1) 座號由1至$(n+r)$由小到大排列，並從1號至 n 號中選一個隊長，共有 n 種方法數。

(2)再從剩下的人中選出正取及備取共 $2r$ 位隊員，共有 C_{2r}^{n+r-1} 種方法數。

(3)最後則是從 $2r$ 位隊員中選出 r 位正取及 r 位備取，共有 C_r^{2r} 種方法數。

因此利用此方法選出隊員的方法數為 $nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ 種。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

2.4 小結論

比較左式論證法及右式論證法，以2.2及2.3的例子為例，兩者選取皆是以4號為隊長，3、6號為正取隊員，2、8號為備取隊員，而1、5、7、9則為落選人員。

左式論證法只有備取隊員及落選人員依照自然數大小排列順序。而右式論證法則是依照自然數大小排列。兩種排列下來，移動的只有隊長及正取隊員的位置，意思是說，若去除掉隊長及正取隊員，剩下的人員可看作是不移動的，這對於我們後面的證明很重要。如圖(十三)及圖(十四)，圖(十三)為左式論證法範例選取結果，圖(十四)為右式論證法範例選取結果。

$$\begin{matrix}\text{座號}\\\text{位置}\end{matrix}\quad\begin{matrix}1\\\times\end{matrix}\quad\begin{matrix}2\\-\end{matrix}\quad\begin{matrix}5\\\times\end{matrix}\begin{pmatrix}4\\C\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\\times\end{matrix}\quad\begin{matrix}8\\-\end{matrix}\quad\begin{matrix}9\\\times\end{matrix}\begin{pmatrix}3\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\+\end{pmatrix}$$

圖(十三)

$$\begin{matrix}\text{座號}\\\text{位置}\end{matrix}\quad\begin{matrix}1\\\times\end{matrix}\quad\begin{matrix}2\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}3\\+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\C\end{pmatrix}\begin{matrix}5\\\times\end{matrix}\begin{pmatrix}6\\+\end{pmatrix}\begin{matrix}7\\\times\end{matrix}\quad\begin{matrix}8\\-\end{matrix}\quad\begin{matrix}9\\\times\end{matrix}$$

圖(十四)

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

第三章　　實證

3.1 定義

定義1：

2.2的左式論證法中：

(1) 在前 n 個位置先排 r 個備取隊員

(2) 前 n 個位置裡面，剩下的 $(n-r)$ 個位置再排一個隊長，此時前 n 個位置剩下的則為落選人員，而正取隊員則排在最後 r 個位置。

(3) 此時定義若隊長在第 i 個位置，則給予隊長座號為 i ，並讓正取隊員在剩下的座號裡挑 r 個號碼，則剩下的座號則由自然數大小排列順序排給備取隊員以及落選人員。

根據以上三點的順序所選取的所有組合方式，我們稱為集合 A 。而集合 A 的個數 $|\mathrm{A}| = C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}$ 。

若 $p \in \mathrm{A}$ ，則定義

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+r} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix}$$

$a_i \neq a_j$, $\forall\, i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n+r\}$, $a_i \in \{1,2,\ldots,n+r\}$，$a_i$ 表示座號，b_i表示 a_i 所對應的職務。

為了方便起見以下的 $\binom{a}{b}$ 表示為元素中座號 a 所對應的職位 b 。

因此p也可以表示成 $\binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\cdots\binom{a_{n+r}}{b_{n+r}}$。

$$\text{若}\begin{cases} p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+r} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix} = \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\cdots\binom{a_{n+r}}{b_{n+r}} \\ \\ p' = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_{n+r} \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b'_{n+r} \end{pmatrix} = \binom{a'_1}{b'_1}\binom{a'_2}{b'_2}\cdots\binom{a'_{n+r}}{b'_{n+r}} \end{cases}$$

如果 $p, p' \in \mathrm{A}$，且 $\forall a_i = a'_j \Rightarrow b_i = b'_j$, $\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n+r\}$，

則我們說 $p = p'$ 。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

定義2：

2.3的右式論證法中：

(1)座號由1至$(n+r)$由小到大排列，並從1號至 n 號中選一個隊長。

(2)再從剩下的人中選出正取及備取共 $2r$ 位隊員。

(3)最後則是從 $2r$ 位隊員中選出 r 位正取及 r 位備取。

根據以上三點的順序所選取的所有組合方式，我們稱為集合 B 。而集合 B 的個數 $|\mathrm{B}| = nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ 。

若 $q \in \mathrm{B}$ ，則定義

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n+r} \end{pmatrix}$$

i 表示座號， d_i 則表示號碼 i 所對應的職務。而 q 也可以表示成 $d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n+r}$ 。

$$若\begin{cases} q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n+r} \end{pmatrix} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n+r} \\ \\ q' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+r \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 & \cdots & d'_{n+r} \end{pmatrix} = d'_1 d'_2 d'_3 \cdots d'_{n+r} \end{cases}$$

如果 $q, q' \in \mathrm{B}$，且 $d_i = d'_i,\ \forall i \in \{1,2,\dots,n+r\}$，

則我們說 $q = q'$。

定義3：對射函數

$$f：\mathrm{X} \to \mathrm{Y} \text{ 且 } f(a) = b,\ \forall a \in \mathrm{X},\ b \in \mathrm{Y}$$

如果(1)一對一： $f(a) = f(a') = b,\ \forall a, a' \in \mathrm{X} \Rightarrow a = a'$

(2)映成： $\forall b \in \mathrm{Y},\ \exists a \in \mathrm{X}$ 使得 $f(a) = b$

則 f 被稱為對射函數，因此 X 與 Y 兩集合的個數(cardinality)是相等的。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

由集合 B 的定義中，座號是由小到大排列，因此若去除隊長及正取隊員，剩下的備取隊員及落選人員的座號依然是依照自然數大小排列順序。

而集合 A 的定義的選取方式的(3)可知，當隊長及正取隊員選取完號碼後，剩下的座號則由自然數大小排列順序排給備取隊員以及落選人員。

因此很顯然的，若在集合 A 與集合 B 中，同一種選取方式，去除隊長及正取隊員，剩下的備取隊員及落選人員的座號則是依照自然數大小排列順序，而由於是同一種選取方式，所以備取隊員及落選人員的排列方式也是相同的。

接下來我們定義一個函數：

$$f：\mathrm{A} \to \mathrm{B},\ p \in \mathrm{A},\ q \in \mathrm{B}$$

p 中座號 k 的職位，則是對應到 q 中座號 k 的職位，而若 p 中座號 k 的職位所對應到q 中座號 k 的職位是相同的，$\forall k \in \{1,2,\dots,n+r\}$，則我們說

$$f(p) = q$$

而為了方便起見，我們後面的證明需要將職位拆開來看，因此若將元素 p 中的部分座號及其所對應的職位放入函數 f 中，所得到的也會是元素 q 中的那些座號及其所對應的職位。

若 $p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+r} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix}$，$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n+r} \end{pmatrix}$

且$f(p) = q$

若$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$為 p 中的其中 m 個座號，在 p 中所對應的職位分別為 $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}$，而經過 f 函數所得到的座號為$k_1, k_2, \dots, k_m$，職位為 $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_m}$，則我們說

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_m} \\ b_{i_1} & b_{i_1} & \cdots & b_{i_m} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_m} \end{pmatrix}$$

而 p、q 雖然不是一個集合，但為了方便起見，我們在這邊仍會以 $\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_m} \\ b_{i_1} & b_{i_1} & \cdots & b_{i_m} \end{pmatrix} \in p$以及$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_m} \end{pmatrix} \in q$ 來表示

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

舉例說明：

班上同學5人，選1個隊長(3號)、1個正取隊員(2號)、1個備取隊員(1號)及2個落選人員(4號及5號)。

若 $p=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 5 & 2\\ - & \times & C & \times & +\end{pmatrix}\in A$，$q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ - & + & C & \times & \times\end{pmatrix}\Rightarrow f(p)=q$

而若只取2號跟3號，則 $\begin{pmatrix}3 & 2\\ C & +\end{pmatrix}\in p$，$\begin{pmatrix}2 & 3\\ + & C\end{pmatrix}\in q$，

$$f\left(\begin{pmatrix}3 & 2\\ C & +\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ + & C\end{pmatrix}$$

我們想證明 $C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$ 即為證明 A 與 B 兩個集合個數(cardinality)是相等的，因此我們只要證明 f 為對射函數即可。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

3.2 證明

3.2.1 一對一

令

$$\begin{cases} p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+r} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{n+r} \\ b_{n+r} \end{pmatrix} \\ p' = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_{n+r} \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b'_{n+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a'_{n+r} \\ b'_{n+r} \end{pmatrix} \end{cases}，p , p' \in \mathrm{A}$$

且 $f(p) = q = f(p')$

欲證明：$p = p'$

因為 $f(p) = q$，所以 $\forall \begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix} \in q$，$\exists \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in p$ 使得 $f\left(\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix}$

且 $f(p') = q$，所以對這個 $\begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix} \in q$，$\exists \begin{pmatrix} a'_j \\ b'_j \end{pmatrix} \in p'$ 使得 $f\left(\begin{pmatrix} a'_j \\ b'_j \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix}$

當 $i, j, m \in \{1,2,\ldots,n+r\}$。

首先，我們看 $f\left(\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_i = m \\ b_i = d_m \end{cases}$

同理，$f\left(\begin{pmatrix} a'_j \\ b'_j \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m \\ d_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a'_j = m \\ b'_j = d_m \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_i = m = a'_j \\ b_i = d_m = b'_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = a'_j \\ b_i = b'_j \end{cases}$，$\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n+r\}$

$\Rightarrow p = p'$

因此，f 為一對一函數。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

3.2.2映成

(1)隊長(C)

令

$$q=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n+r\\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n+r}\end{pmatrix}$$

假設隊長所對應的座號是 m，$m\in\{1,2,\dots,n\}$，意思是在 $\binom{m}{d_m}$ 中，d_m 為隊長。

欲證明： $\exists\binom{a_i}{b_i}\in p$, $i\in\{1,2,\dots,n+r\}$ 使得 $f\left(\binom{a_i}{b_i}\right)=\binom{m}{d_m}$ 當 $b_i=d_m$，即 b_i 為隊長。

此集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 是 $\{a_i\}$ 的所有可能的組合方式，且 A 集合的選取方式在2.2中我們得知，若隊長在第 i 個位置，則給予隊長座號為 i，因此這之中必定存在一種組合使得隊長在第 m 個位置，即隊長為 b_m，使得 $f\left(\binom{a_m}{b_m}\right)=\binom{m}{d_m}$。

因此，$\exists\binom{a_i}{b_i}=\binom{a_m}{b_m}\in p$ 使得 $f\left(\binom{a_i}{b_i}\right)=\binom{m}{d_m}$。

(2)正取隊員

令 $q=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n+r\\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n+r}\end{pmatrix}$ 且其中 d_m 為隊長，

假設 $\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_r}\end{pmatrix}\in q$ 當 $d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_r}$ 都是正取隊員

因為 A 集合的選取方式在2.2中我們得知，正取隊員位於第 $n+1$ 至 $n+r$ 個位置

欲證明：$\exists\begin{pmatrix}a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r}\\ b_{n+1} & b_{n+2} & \cdots & b_{n+r}\end{pmatrix}\in p$

使得 $f\left(\begin{pmatrix}a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r}\\ b_{n+1} & b_{n+2} & \cdots & b_{n+r}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_r}\end{pmatrix}$

令 $b_{n+1},b_{n+2},\cdots,b_{n+r},d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_r}$ 都是正取隊員

集合 $\mathrm{D}=\{$從 $\{1,2,\dots,n+r\}\backslash\{m\}$ 中為 $b_{n+1},b_{n+2},\cdots,b_{n+r}$ 選取r個數字$\}$

這是 $\{a_j\}$ 的所有可能的組合方式，$j\in\{n+1,n+2,\dots,n+r\}$，而這些集合的個數 $|\mathrm{D}|$ 為 C_r^{n+r-1} 個。

這之中必定存在一種組合使得 $f\left(\begin{pmatrix}a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r}\\ b_{n+1} & b_{n+2} & \cdots & b_{n+r}\end{pmatrix}\right)=$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_r} \end{pmatrix}$

因此，$\exists \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r} \\ b_{n+1} & b_{n+2} & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix} \in p$ 使得

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r} \\ b_{n+1} & b_{n+2} & \cdots & b_{n+r} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_r} \end{pmatrix}$$

(3)備取隊員及落選人員

令 $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+r \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n+r} \end{pmatrix}$ 且其中 d_m 為隊長以及

$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ d_{i_1} & d_{i_2} & \cdots & d_{i_r} \end{pmatrix} \in q$ ，$d_{i_1}, d_{i_2}, \cdots, d_{i_r}$ 都是正取隊員。

由於備取隊員及落選人員共有 $n-1$ 個人

假設 $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \\ d_{k_1} & d_{k_2} & \cdots & d_{k_{n-1}} \end{pmatrix} \in q$ 且 $k_i < k_j$ 當 $i < j$ 時，$i, j \in \{1,2,\dots,n-1\}$

$d_{k_1}, d_{k_2}, \cdots, d_{k_{n-1}}$ 為備取隊員或落選人員，有 r 個備取隊員以及 $(n-r-1)$ 個落選人員

欲證明:$\exists \begin{pmatrix} a_{l_1} & a_{l_2} & \cdots & a_{l_{n-1}} \\ b_{l_1} & b_{l_2} & \cdots & b_{l_{n-1}} \end{pmatrix} \in p$

$$\text{使得 } f\left(\begin{pmatrix} a_{l_1} & a_{l_2} & \cdots & a_{l_{n-1}} \\ b_{l_1} & b_{l_2} & \cdots & b_{l_{n-1}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \\ d_{k_1} & d_{k_2} & \cdots & d_{k_{n-1}} \end{pmatrix}$$

由於 A 集合的選取方式在2.2中我們得知，除去隊長及正取隊員，剩餘的備取隊員及落選人員的座號是由剩下的座號依照自然數大小排列順序而成。

而 B 集合的選取方式本來就是依照座號的自然數排列方式，因此除去隊長及正式隊員，剩餘的備取隊員及落選人員的座號也是由剩下的號碼依照自然數大小排列順序而成。

因此可以得知 $a_{l_h} = k_h$, $\forall h \in \{1,2,\dots,n-1\}$

我們直接讓 A 集合與 B 集合的備取隊員及落選人員的排列方式是一樣的

即 $b_{l_h} = d_{k_h}$, $\forall h \in \{1,2,\dots,n-1\}$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

因此，$\exists \begin{pmatrix} a_{l_1} & a_{l_2} & \cdots & a_{l_{n-1}} \\ b_{l_1} & b_{l_2} & \cdots & b_{l_{n-1}} \end{pmatrix} \in p$ 使得

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{l_1} & a_{l_2} & \cdots & a_{l_{n-1}} \\ b_{l_1} & b_{l_2} & \cdots & b_{l_{n-1}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \\ d_{k_1} & d_{k_2} & \cdots & d_{k_{n-1}} \end{pmatrix}$$

當 $a_{l_h} = k_h$ 且 $b_{l_h} = d_{k_h}$，$\forall h \in \{1,2,\dots,n-1\}$

結論：

$$\forall \mathrm{q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n+r} \end{pmatrix} \in B，$$

且 d_1 至 d_{n+r} 中有1個隊長、r 個正取隊員、r 個備取隊員及 $(n-r-1)$ 個落選人員，隊長為 m 號

$$存在唯一\ \mathrm{p} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{m-1} & m & a_m & \cdots & a_{n-1} & a_{k_1} & \cdots & a_{k_r} \\ b_1 & \cdots & b_{m-1} & C & b_m & \cdots & b_{n-1} & b_{k_1} & \cdots & b_{k_r} \end{pmatrix} \in \mathrm{A}$$

其中 m 號為隊長，b_{k_1} 至 b_{k_r} 為正取隊員，b_1 至 b_{n-1} 為備取隊員或落選人員，有 r 個備取隊員及 $(n-r-1)$ 個落選人員，且 $a_i < a_j$ 當 $i < j$,
$i,j \in \{1,2,\dots,n-1\}$，$a_{k_{i'}} < a_{k_{j'}}$ 當 $i' < j'$，$i',j' \in \{1,2,\dots,r\}$，
$a_i, a_j, a_{k_{i'}}, a_{k_{j'}} \in \{1,2,\dots,n+r\} \backslash \{m\}$，$a_i \neq a_{k_{i'}}$
使得

$$f(p) = q$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

3.3 實例

以 $n=7$，$r=2$ 為例，給定任意一個 q

$$\text{假設 } q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ + & \times & C & \times & - & \times & \times & - & + \end{pmatrix} \in \mathrm{B}$$

可知存在唯一的 $p \in \mathrm{A}$，使得 $f(p)=q$。

而我們將找出這個 p。

(1) 在2.4中，已知 p 與 q 的對應中，去除隊長及正取隊員的話，剩下的備取隊員以及落選人員的排列方式則是相同的。

q 的備取隊員及落選人員排列方式，如圖(十五)

座號	2	4	5	6	7	8
位置	×	×	−	×	×	−

圖(十五)

因此 p 的備取隊員及落選人員排列方式也是如圖(十五)。

(2) 而根據2.2左式論證法，可知隊長的座號即為位置，此例隊長的座號為3號，因此將隊長插入第三個位置，並將正式隊員依照順序放至最後兩個位置，如圖(十六)。

座號	2	4	3	5	6	7	8	1	9
位置	×	×	C	−	×	×	−	+	+

圖(十六)

因此可找到唯一的

$$p=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 9 \\ \times & \times & C & - & \times & \times & - & + & + \end{pmatrix} \in A$$

使得 $f(p)=q$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

第四章　　結論

在本篇論文中，我們用兩個不同的方法來證明這個組合等式

$$C_r^n(n-r)C_r^{n+r-1}=nC_{2r}^{n+r-1}C_r^{2r}$$

然而，第一個方法只是單純的利用公式展開，看起來比較簡單，也可以很快地達到我們想要的結果，但是卻無法理解此組合等式背後的對應關係，雖然展開可以相等，但腦中卻無法想像其相等的原理。

我們利用生活中的例子重新詮釋的此組合等式，並建立一個函數關係，而發現等式兩邊就只是排列的方式不同，卻可以得到相同的結果，利用對射函數的定義，來證明出此組合等式，雖然在論證過程比較繁雜，但是卻可以比較輕鬆的解釋為何相等，也比較容易被人所理解及接受。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01

參考文獻

［1］Alan Tucker, *Applied Combinatorics*,sixth edition, John Wiley & Sons,Inc., p.233,2012.

［2］劉麗珍，一個組合等式的一對一證明，政治大學應用數學碩士論文，1994。

［3］陳建霖，一個組合等式的證明，政治大學應用數學碩士論文，1996。

［4］韓淑惠，開票一路領先的對射證明，政治大學應用數學碩士論文，2011。

［5］薛麗姿，一個珠狀排列的公式，政治大學應用數學碩士論文，2013。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.001.2018.B01