國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

碩 士 學 位 論 文

有限離散條件機率分布不相容測度之探討

A study on the incompatibility of finite discrete conditional distributions

碩士班學生：涂沁如　撰

指導教授：宋傳欽　博士

姜志銘　博士

中 華 民 國 107 年 7 月 10 日

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

致謝

終於到了打致謝的時候，回想這一條漫長的道路終於走到最後這幾步，不禁讓人潸然淚下。首先最要感謝的就是指導教授，姜老師及宋老師了，感謝老師們在這一年來每周辛苦的與我們開會，幫助我們論文上遇到的問題以及不辭辛勞的將論文一字一句都檢查過，讓我受益良多。

接下來要感謝當初幫助過我的人，泰哥、乙醇、澤佑學長還有陳天進老師；感謝泰哥在我遇到不管各式各樣大大小小的問題都能想辦法幫我解決，我在你這邊也學到了很多；感謝乙醇在我人生中各種問題都能聽我抱怨跟訴苦，也幫我很多課業上的疑難雜症；感謝澤佑學長幫助我的程式，讓我後續論文寫得很順利，當初在修實變時也在考試前幫我們考前惡補，教我們很多不會的題目及釐清一些觀念；感謝陳老師幫我一起思考論文解不出來的地方，每次跟你吃飯都很歡樂，有問題時你都會盡力回答我們，由衷感謝不已；當然還有感謝力夫帶給我們歡樂、小黑教我們實變、張群一起共同打拼，以及數不清曾經幫助過我的人，在此由衷的表示我的感激。

最後謝謝我的家人，不管是我要念書還是想要休學都支持我的決定，讓我任性的做我想做的任何事，包容的我的壞脾氣；也感謝那位重要的人，在我忙論文的期間對我的照顧及關心，讓我無後顧之憂的好好完成論文，包容我各種情緒也支持我的任何事。還有許多感謝不完的人，所以也只好謝天了，讓我能在求學的路上不斷遇到各種貴人的幫助，幫助我排解任何困難，保佑我平安健康。碩士生涯到這裡，也算是圓滿落幕，願大家未來都能有更好的發展，也祝福每個人都能身體健康、一切順利。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

中文摘要

實務上，我們常需要建構母體的機率模型，然而當母體所涉及的隨機變數愈多，亦即維度愈高時，直接建構高維度之聯合分配的難度就越高，故我們可試著透過一組維度較低的條件分配來獲得聯合分配，而是否存在聯合分配滿足這一組條件分配，即為所謂的相容性問題。

本文首先將二維條件分配的相容性問題跟馬可夫鏈的對應關係做詳細比較。我們發現，由於二維條件分配所對應的馬可夫鏈是非週期性的，因此，Arnold and Press (1989) 利用馬可夫鏈的理論，提出聯合分配唯一存在的充要條件，可做進一步化簡。

給定二維條件分配，若不能找到共同的聯合分配則稱他們是不相容的；不相容的程度有各種衡量指標，而這些指標之間的關係也是值得我們研究的課題。在條件分配不相容情況下，我們先透過模擬數據的方式，對 Arnold, Castillo, Sarabia (2002) 及顧仲航 (2011) 所提出的四種不相容測度值進行觀察，試圖進一步獲得有關他們之間關係的資訊。接著，在 2×2 的條件機率矩陣下，我們推導出四種不相容測度 ϵ_1、ϵ_2、ϵ_3、ϵ_4 以及對偶測度 ϵ_3^* 的計算公式，而且獲得 $2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3^* = \epsilon_4$ 的結果。最後，在 $2 \times J$ 的條件機率矩陣下，$J \geq 2$，我們推導出 ϵ_2 與 ϵ_3 的計算公式，並且證明出 $\epsilon_2 = \epsilon_3$ 的關係；同時也在 $I \times 2$ 的條件機率矩陣下，$I \geq 2$，推出 $\epsilon_2 = \epsilon_3^*$。

關鍵字：條件機率矩陣、相容性、馬可夫鏈、不可約化、不相容

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

Abstract

In practice, we may need to construct a joint distribution for a population. However, when the dimension of the random variables corresponding to the population is higher, it is often more difficult to find such a high dimensional joint distribution. Hence, we can obtain a set of lower dimensional conditional distributions first, and then use them to find their corresponding joint distribution. If there is a joint distribution matching this set of conditional distributions, we say this set of conditional distributions is compatible.

First, we study the relationship between the compatibility and Markov chain. Since the Markov chain corresponding to two dimensional conditional distributions is aperiodic, we can further simplfy the necessary and sufficient condition of uniquness of a joint distribution given by Arnold and Press (1989) .

The two dimensional conditional distributions are called incompatible if there is no common joint distribution for them. There are a few measures of degree of incompatibility in literature. Our aim is to study, through the simulations first, the relation among the four measures of degree of incompatibility given by Arnold, Castillo, Sarabia (2002) and Ku (2010). We derive the computational formulas for these four measures of degree of incompatibility ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4 and the duality measure ϵ_3^* under 2×2 conditional probability matrices and prove that $2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3^* = \epsilon_4$. In addition, we derive the computational formulas for ϵ_2 and ϵ_3 and prove that $\epsilon_2 = \epsilon_3$ under $2 \times J$ conditional probability matrices, where

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

$J \geq 2$. Finally, we also show that $\epsilon_2 = \epsilon_3^*$ under $I \times 2$ conditional probability matrices, where $I \geq 2$.

Keywords：conditional probability matrix, compatibility, Markov chain, irreducible, incompatibility

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

目錄

致謝 i
中文摘要 ii
Abstract iii
目錄 v
表目錄 vii
圖目錄 viii
第一章 緒論 1
第一節 研究動機與目的 1
第二節 論文架構 2
第二章 文獻探討 3
第一節 條件分配相容性問題之回顧 3
第二節 條件分配不相容程度之測量 7
第三章 馬可夫鏈在條件分配相容性問題上之應用 10
第一節 馬可夫鏈簡介 10
第二節 馬可夫鏈與相容性問題之對應關係 12
第四章 2×2 條件機率矩陣不相容測度之推導 15
第一節 不相容測度 ϵ_3 與 ϵ_3^* 之推導 16
第二節 不相容測度 ϵ_4 之推導 21
第三節 不相容測度 ϵ_2 之推導 23
第四節 不相容測度 ϵ_1 之推導 25
第五章 條件機率矩陣不相容測度之進一步探討 27
第一節 四種不相容測度之關係-實例觀察 27
第二節 2×3 條件機率矩陣不相容測度之計算-實例說明 29

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第三節　2×3 條件機率矩陣不相容測度 ϵ_2 與 ϵ_3 之推導 33
第六章 結論 38
參考文獻 39

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

表目錄

4.1 2×2 條件機率矩陣下各測度值的相關結果 15

5.1 3×3 條件機率矩陣下各測度的相關結果 28

5.2 2×3 條件機率矩陣下測度二、三的相關結果 29

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

圖目錄

4.1 2×2 條件機率矩陣下 ϵ_3 之圖解法 17

5.1 2×3 條件機率矩陣下 ϵ_3 之圖解法 31

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第一章

緒論

第一節　研究動機與目的

在一般的抽樣調查下，不同的研究者對同一事件進行資料收集時，因研究目的的不同，可能會得到不同條件分配的資料，但不易確認這些條件分配的資料是否來自同一母體，因此我們希望找到他們的聯合分配，去證實這些資料出自於同一母體。

我們將相容性定義為已知的條件分配有共同的聯合分配；反之，為不相容。但在母體條件分配相容下，實務上因為樣本僅為母體的部分集合，因此由樣本所求得的條件分配，可能跟母體條件分配不同，導致樣本條件分配產生誤差，使得我們無法找到共同的聯合分配，在這種情況下，我們稱已知的樣本條件分配為不相容，因此，低度不相容的樣本條件分配可能來自於相容的母體條件分配，所以探討不相容測度的問題有其必要性。

給定一組條件分配，我們該如何判斷他們是否相容？若相容時，要如何找出他們的聯合分配；若不相容時，要如何測量不相容的程度？目前已有許多文獻提出判斷相容性與找出共同聯合分配的方法，但在探討不相容測度上之研究卻寥寥可數。

Arnold and Press (1989) 利用馬可夫鏈的結果，為給定的二維條件分配提出聯合分配唯一存在的充要條件。本研究內容首先探討二維條件分配相容性問題與馬可夫鏈理論的關聯，接著研究Arnold et al. (2002) 與顧仲航 (2011) 所提出的四種不相容測度方式，在大小不同的條件機率矩陣下，是否存在著某種特殊關係。我們利用數學軟體 GAMS 設計各種不相容測度之計算程式，甚至透過模擬數據觀察這些不相容測度值間的關係，並試圖從中尋找規則性，及證明它們的數學關係。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第二節　論文架構

本文共分六個章節。第一章緒論：包含研究動機與目的及論文架構。第二章文獻探討：先介紹條件機率矩陣相容性，內容包含定義、定理及名詞介紹，接著再介紹如何測量不相容程度。第三章馬可夫鏈在條件分配相容性上問題之應用：首先介紹馬可夫鏈的定理與名詞解釋，再將馬可夫鏈相關理論與定理應用於相容性的問題上。第四章 2×2 條件機率矩陣不相容測度之推導：將 2×2 條件機率矩陣不相容測度以數學式表示，並推導出四種不相容測度間的關係。第五章條件機率矩陣不相容測度之進一步探討：以實際例子詳細介紹四種不相容測度之間的關係，並將 2×3 條件機率矩陣以計算方式找出 ϵ_2 與 ϵ_3 的測量值及它們之間的關係。第六章做出結論。

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第二章

文獻探討

本章依序介紹 Arnold and Press (1989) 所提出的比值矩陣法，Song et al. (2010) 的 IBD 矩陣法， 顧仲航 (2011) 提出的特徵向量法及Arnold et al. (2002) 與顧仲航 (2011) 分別定義的幾種不相容測度。

第一節　條件分配相容性問題之回顧

首先定義條件分配相容性之內涵：

定義 2.1. X,Y 為有限離散型隨機變數，值域分別為 $x_1, x_2, \ldots, x_I$ 及 $y_1, y_2, \ldots, y_J$，則對應條件分配 $X|Y$ 和 $Y|X$ 之條件機率矩陣為 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，其中

$$a_{ij} = P_r(X = x_i \,\big|\, Y = y_j), \quad b_{ij} = P_r(Y = y_j | X = x_i)$$

給定兩矩陣 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，若 $a_{ij} \geq 0$ 和 $b_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{I} a_{ij} = 1, \forall j, \sum_{j=1}^{J} b_{ij} = 1, \forall i$，則稱 A 和 B 為條件機率矩陣。

定義 2.2. 給定兩個條件機率矩陣 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$。若存在一個機率矩陣 $P = (p_{ij})$，$p_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ 滿足

$$a_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ b_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ i = 1, 2, \ldots, I, j = 1, 2, \ldots, J$$

其中

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij},\ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

則稱 A 和 B 相容 (*compatible*)。

令

$$N^A = \{(i,j) \,\big|\, a_{ij} > 0\},\ N^B = \{(i,j) | b_{ij} > 0\}$$

當 A 與 B 相容時，則 $N^A = N^B (= N)$。故在討論條件機率矩陣 A 與 B 是否相容時，$N^A = N^B$ 是先決條件。

Arnold and Press (1989) 以比值矩陣的觀念提出離散型條件分配相容的充要條件。

定義 2.3. 給定 $I \times J$ 的條件機率矩陣 $A = (a_{ij})$ 與 $B = (b_{ij})$，令

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{b_{ij}}, \text{若 } (i,j) \in N \\ *, \text{其他} \end{cases}$$

未定義值以 $*$ 表示，則矩陣 $C = (c_{ij})$ 稱為 A 對 B 的比值矩陣。若所有 c_{ij} 為正數，則稱 C 是完整矩陣 (*complete matrix*)；否則稱 C 是不完整矩陣 (*incomplete matrix*)。

Arnold and Press (1989) 提出相容性的充要條件敘述如下：

定理 2.4. A 和 B 相容的充要條件為

1. $N^A = N^B = N$
2. $\forall (i_1, i_2, j_1, j_2)$ 恆有 $c_{i1,j1} c_{i2,j2} = c_{i1,j2} c_{i2,j1}$，其中 $(i_1, j_1) \in N$，$(i_1, j_2) \in N$，$(i_2, j_1) \in N$，$(i_2, j_2) \in N$。

Song et al. (2010) 提出滿足定理 2.4 充要條件之不相容例子，並以下述 ROPE 矩陣及其相關理論加以修正。

定義 2.5. 給定條件機率矩陣 A 和 B，令 C 為 A 對 B 的比值矩陣，若存在矩陣 $\overline{C}$，其元素都是正數，且對於所有 $(i,j) \in N$ 恆有 $\overline{c}_{ij} = c_{ij}$，則稱矩陣 $\overline{C}$ 是 C 的正擴張矩陣 (positive extension matrix)。若 $rank(\overline{C}) = 1$，則稱 C 的秩為 1 且 $\overline{C}$ 是 C 的秩 1 正擴張矩陣 (rank one positive extension matrix)，並簡記為 ROPE 矩陣。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

定理 2.6. 令 C 為不完整的比值矩陣，則 C 的秩為 1 的充要條件為存在正向量 u 和 v 使得 C 的 ROPE 矩陣 $\overline{C} = uv'$。

定理 2.7. 令 C 為 A 對 B 的比值矩陣，則 A 和 B 相容的充要條件為 C 存有秩 1 正擴張矩陣 $\overline{C}$。

當 I 及 J 值都很大，或比值矩陣中，未定義值個數較多時，較不易判斷 C 是否有秩 1 的正擴張矩陣，因此 Song et al. (2010) 提出 IBD 矩陣法以解決相容性問題。

定義 2.8. 若比值矩陣 C 經過行或列互換後，可轉換成：

$$\left(\begin{array}{c|c} T_1 & * \\ \hline * & T_2 \end{array}\right)$$

其中對角塊狀矩陣 T_1 和 T_2 外的元素皆為 $*$，則稱比值矩陣 C 為可約化 (reducible)；否則稱 C 為不可約化 (irreducible)。

定理 2.9. 給定任一比值矩陣 C，則經過列或行互換後，可轉換成如下的不可約化對角塊狀矩陣 (簡記為 IBD 矩陣)：

$$\begin{pmatrix} T_1 & * & \cdots & * \\ * & T_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & T_M \end{pmatrix}$$

其中對角塊狀矩陣 $T_1, \ldots, T_M (M \leq 1)$ 為不可約化且以外的元素皆為 $*$。當 $M = 1$，則 C 為不可約化。為了方便，我們將 C 的 IBD 矩陣記為 $T(C) = Diag(T_1, \ldots, T_M)$。

引理 2.10. 比值矩陣 C 的秩是 1 的充要條件為 C 的 IBD 矩陣 $T(C) = Diag(T_1, \ldots, T_M)$ 中每個 $T_m (1 \leq m \leq M)$ 的秩皆是 1。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

條件機率分配的相容性和唯一性可以用 IBD 矩陣來檢驗，方法如下：

定理 2.11. 設 C 為 A 對 B 的比值矩陣，且 $T(C) = Diag(T_1, \ldots, T_M)$ 為 C 的 IBD 矩陣，則 A 和 B 相容的充要條件為每個 $T_m (1 \leq m \leq M)$ 的秩皆是 1。

定理 2.12. 若 A 和 B 相容且 C 為 A 對 B 的比值矩陣，則以下敘述為等價：

1. 對於所有 C 的 IBD 矩陣 $T(C) = Diag(T_1, \ldots, T_M)$，恆有 $M = 1$
2. C 為不可約化
3. C 有唯一的 ROPE 矩陣
4. 有唯一的聯合分配以 C 為比值矩陣

當給定的條件機率矩陣相容時，他們的聯合分配可能不只一個，找出所有聯合分配之詳細過程可參照Song et al. (2010) 。

接著我們介紹 顧仲航 (2011) 所提出的特徵向量法用以檢驗條件機率矩陣 A 和 B 是否相容。
若 A 和 B 相容，則邊際分配 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 滿足

$$diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) \tag{2.1}$$

，其中 $diag(\boldsymbol{\tau})$ 和 $diag(\boldsymbol{\eta})$ 分別為以 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的元素為對角線元素的對角矩陣，且聯合分配 $P = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B$。因此在檢驗 A 和 B 是否相容時，只要檢驗是否有邊際分配 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$ 滿足 (2.1) 式。若滿足 (2.1) 式的邊際分配 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 是唯一，即可得唯一的聯合分配。

定理 2.13. 設條機率矩陣 A 和 B 相容。若 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 為滿足 (2.1) 式的邊際分配，則

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau} \\ B'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{2.2}$$

根據定理2.13，可得以下推論：

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

推論 2.14. 設條件機率矩陣 A 和 B 相容。若 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 為滿足 (2.1) 式的邊際分配，則

$$\begin{cases} AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \\ B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{2.3}$$

定理 2.15. 設 A 和 B 為條件機率矩陣，則 A 和 B 相容的充要條件為 AB' 和 $B'A$ 存在對應特徵值為 1 且長度為 1 的正特徵向量 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 滿足 (2.1) 式。

定理 2.16. 設 A 和 B 為條件機率矩陣。令 A 和 B 的 IBD 矩陣分別為 $T(A) = Diag(A_1, \cdots, A_M)$，$T(B) = Diag(B_1, \cdots, B_M)$，則 A 和 B 相容的充要條件為 A_m 和 B_m 相容，$1 \leq m \leq M$。

定理 2.17. 若 A 和 B 為不可約化的條件機率矩陣，則 AB' 和 $B'A$ 對應特徵值 1 且長度為 1 的正特徵向量只有一組，假設為 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$。當 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$ 滿足 (2.1) 式，則 A 和 B 相容。

對可約化的條件機率矩陣 A 和 B，可根據定理 2.17，檢驗定理 2.16 中的每一組 A_m 和 B_m 是否相容，以判斷 A 和 B 是否相容。

透過特徵向量法，我們大幅縮減了所要檢驗邊際分配的可能範圍。有關特徵向量法更詳細的內容請參考顧仲航 (2011)。

第二節　條件分配不相容程度之測量

當條件機率矩陣 A 和 B 不相容時，我們希望能測量出他們不相容的程度。本文主要以 Arnold et al. (2002) 提出的 ϵ 一相容性 (ϵ-compatability) 以及 顧仲航 (2011) 的特徵向量法所衍伸出測量不相容程度之方法，作為探討兩個條件機率矩陣不相容程度的測量。

首先介紹 Arnold et al. (2002) 提出的 ϵ 一相容性：

在考慮下列不相容程度的測度時，我們以權重矩陣 $W = (w_{ij}), w_{ij} \geq 0$，來表示各位置 p_{ij} 準確度的相對重要性：

測度 (一) 求矩陣 $P = (p_{ij})$，其中 $p_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in N, \sum_{(i,j)\in N} p_{ij} = 1$，使得

$$|p_{ij} - a_{ij}p_{.j}| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

$$|p_{ij} - b_{ij}p_{i.}| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

其中

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij},\ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}$$

滿足上面條件的最小 ϵ 值，以 ϵ_1 表示。

測度 (二) 求兩向量 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_j) \geq 0$ 和 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_i) \geq 0, \sum_j \eta_j = 1, \sum_i \tau_i = 1$ 使得

$$|a_{ij}\eta_j - b_{ij}\tau_i| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

滿足上面條件的最小 ϵ 值，以 ϵ_2 表示。

測度 (三) 求邊際機率向量 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_i) \geq 0, \sum_i \tau_i = 1$ 使得

$$|a_{ij} \sum_{k=1}^{I} b_{kj}\tau_k - b_{ij}\tau_i| \leq \epsilon w_{ij}; \forall (i,j) \in N$$

滿足上面條件的最小 ϵ 值，以 ϵ_3 表示。

在各位置 p_{ij} 重要性相等下，即對於所有 (i,j)，$w_{ij} = 1$，以上測度可以距離概念表示。

設 A 和 B 為條件機率矩陣，令

$$\mathbb{P} = \{P = (p_{ij}) | \sum_i \sum_j p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0, \forall i,j\}$$

$$\mathbb{P}_A = \{P = (p_{ij}) | p_{ij} = a_{ij}\eta_j, \sum_j \eta_j = 1, \eta_j \geq 0\}$$

$$\mathbb{P}_B = \{P = (p_{ij}) | p_{ij} = b_{ij}\tau_i, \sum_i \tau_i = 1, \tau_i \geq 0\}$$

$$\mathbb{P}_A^* = \{P = (p_{ij}) | p_{ij} = a_{ij}\eta_j, B'A\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}, \sum_j \eta_j = 1, \eta_j \geq 0\}$$

$$\mathbb{P}_B^* = \{P = (p_{ij}) | p_{ij} = b_{ij}\tau_i, AB'\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}, \sum_i \tau_i = 1, \tau_i \geq 0\}$$

特徵向量法將 P_A 和 P_B 縮小，排除掉不是特徵向量生成的部分，以 P_A^* 及 P_B^* 表示，因此，原本 A 和 B 相容的充要條件為 P_A 及 P_B 有交集，可進一步簡化為 A 和 B 相容的

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

充要條件為 P_A^* 及 P_B^* 有交集。

我們定義距離函數 $d:\mathbb{P}\times\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ 為 $\forall P^{(1)}=(p_{ij}^{(1)}), P^{(2)}=(p_{ij}^{(2)})\in\mathbb{P}$,

$$d(P^{(1)},P^{(2)})=\sup_{(i,j)}|p_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(2)}|$$

定理 2.18.

1. $(\mathbb{P},d)$ 為一度量空間 (metric space)。

2. $\mathbb{P}_A,\mathbb{P}_B$ 皆為度量空間 $(\mathbb{P},d)$ 中的凸集合及閉集合。

3. $\mathbb{P}_A$ 與 $\mathbb{P}_B$ 有最短距離。

由以上定理可得知，我們可在 $\mathbb{P}_A,\mathbb{P}_B$ 中各找到一點，使得這兩點的距離為 $\mathbb{P}_A,\mathbb{P}_B$ 的最短距離。

令 $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}_A$ 定義為 $f(P)=A\cdot diag(\boldsymbol{\eta})$，其中 $\eta_j=\sum_i p_{ij}$，$g:\mathbb{P}\to\mathbb{P}_B$ 定義為 $g(P)=diag(\boldsymbol{\tau})\cdot B$，其中 $\tau_i=\sum_j p_{ij}$ ，則 Arnold et al. (2002) 的各種不相容測度值可用距離函數 d 表示：

$$\epsilon_1=\inf_{P\in\mathbb{P}}\sup\{d(P,f(P)),d(P,g(P))\}$$

$$\epsilon_2=\inf_{P_A\in\mathbb{P}_A P_B\in\mathbb{P}_B}\{d(P_A,P_B)\}$$

$$\epsilon_3=\inf_{P\in\mathbb{P}_B}d(P,f(P))$$

顧仲航 (2011) 將特徵向量法的不相容測度定義為 $\epsilon_4=\inf_{P\in\mathbb{P}_B^*}d(P,f(P))$，並證明出以上四種測度值之間的大小關係為：

$$\epsilon_1\geq\frac{1}{2}\epsilon_2,\ \epsilon_2\leq\epsilon_3\leq\epsilon_4$$

且

$$\inf_{P\in\mathbb{P}_B^*}d(P,f(P))=\inf_{P\in\mathbb{P}_A^*}d(P,g(P))$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第三章

馬可夫鏈在條件分配相容性問題上之應用

此章節內容參考 黃文璋 (1995) 及Yates and Goodman (2005) ，首先介紹一些馬可夫鏈的基本概念與定理，再將馬可夫鏈性質應用於條件分配相容性問題上，本章所定義之馬可夫鏈皆為有限狀態。

第一節　馬可夫鏈簡介

考慮離散時間、有限個值之隨機過程 $\{X_n|n \geq 0\}$。對時間 n，可將 $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ 視為過去狀態，X_n 視為目前狀態，$X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ 視為未來狀態。要描述隨機過程的進行法則，常是在給定此過程目前及過去的狀態之下，以未來狀態之條件分配表示。

定義 3.1. 設隨機過程 $\{X_n|n \geq 0\}$ 的狀態空間為 S，在給定 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ 時，X_{n+1} 之條件分配與只給定 X_n 時之條件分配相同，則稱此過程具有馬可夫 (Markov) 性質，亦即

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j|X_n = i] = P_{ij}$$

其中 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in S$

定義 3.2. 給定矩陣 $\mathbf{P} = (p_{ij})$，其中 $i, j \in S$，而 S 為有限狀態空間。若 p_{ij} 滿足

$$p_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S$$

，則稱 **P** 為轉移機率矩陣 (transition probabilities matrix)。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

定義 3.2 中之 p_{ij} 又稱一步 (one-step) 轉移機率。反之，對一馬可夫鏈，其對應的 $\{p_{ij}\}$ 所構成的矩陣 $\mathbf{P}$，必為轉移矩陣。

定義 3.3. 給定一馬可夫鏈，n 步轉移矩陣 $\mathbf{P}(n) = (P_{ij}(n))$，其中

$$P_{ij}(n) = P[X_{n+m} = j | X_m = i]$$

定義 3.4. 若向量 $\mathbf{p} = [p_0 \dots p_k]'$ 滿足 $\sum_{j=0}^{K} p_j = 1$ 且 $p_j \geq 0, \forall j$，則稱 $\mathbf{p}$ 為狀態機率向量 (state probability vector)。

定義 3.5. 假設馬可夫鏈的初始狀態機率向量為 $\mathbf{p}(0)$，若 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \boldsymbol{\pi}$ 存在，則稱 $\boldsymbol{\pi}$ 為極限狀態機率向量 (limiting state probability vector)，其中 $\mathbf{p}'(n) = \mathbf{p}'(0)\mathbf{P}(n)$。

定義 3.6. 設馬可夫鏈之轉移矩陣為 $\mathbf{P}$。若狀態機率向量 $\boldsymbol{\pi}$ 滿足 $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}$，則稱 $\boldsymbol{\pi}$ 為穩定 (stationary) 狀態。

以下介紹馬可夫鏈狀態的分類：

定義 3.7. 若存在整數 $n \geq 1$ 使得 $P_{ij}(n) > 0$，則稱狀態 i 可達到 (accessible) 狀態 j，記為 $i \to j$。

定義 3.8. 若 $i \to j$ 且 $j \to i$，則狀態 i 與 j 稱為可連通 (communicate)，記為 $i \leftrightarrow j$。

定義 3.9. 設 C 為一非空之狀態子集，若狀態 $i \in C$，且狀態 j 與狀態 i 連通時，恆有 $j \in C$，則稱 C 為連通族 (communicating class)。

定義 3.10. 若 d 為最大正整數滿足 d 不整除 n 時，恆有 $P_{ii}(n) = 0$，則稱 d 是 i 的週期；若 $d = 1$ 時，則稱狀態 i 為非週期。

定義 3.11. 若存在狀態 j 使得 $i \to j$ 但 $j \nrightarrow i$，則狀態 i 稱為瞬間 (transient) 狀態；反之，若不存在如此狀態 j，則稱 i 為重返 (recurrent) 狀態。

定理 3.12. 有限狀態之馬可夫鏈必定有重返的連通族。

定義 3.13. 若馬可夫鏈只有一個連通族，則稱其為不可約化的 (irreducible) 馬可夫鏈。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

定理 3.14. 對不可約化、非週期、有限狀態 $\{0, 1, \ldots, K\}$ 的馬可夫鏈，n 步轉移矩陣 $\mathbf{P}$ 之極限為

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_K \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_0 & \cdots & \pi_K \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{1}$ 為行向量 $[1 \ldots 1]'$，且 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0 \ldots \pi_K]'$ 為唯一向量滿足

$$\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\pi}'\mathbf{1} = 1$$

定理 3.15. 對初始狀態機率向量為 $\mathbf{p}(0)$ 之不可約化、非週期有限馬可夫鏈，恆有 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \boldsymbol{\pi}$。

第二節　馬可夫鏈與相容性問題之對應關係

此章節我們將上一節介紹的馬可夫鏈理論應用於條件分配相容性問題上。

首先由定義3.6與推論2.14，我們有下列結果。

定理 3.16.

1. BA' 為狀態空間 $\{x_1, x_2, \ldots, x_I\}$ 的轉移矩陣，且 $A'B$ 為狀態空間 $\{y_1, y_2, \ldots, y_J\}$ 的轉移矩陣。

2. AB' 與 $B'A$ 對應於特徵值 1 且長度為 1 的非負特徵向量，可視為穩定機率向量。

Song et al. (2010) 提出了 BA' 所對應的馬可夫鏈為不可約化的充要條件，如下：

定理 3.17. 給定條件機率矩陣 A 和 B，則轉移矩陣 BA' 所對應的馬可夫鏈為不可約化的充要條件為 A 和 B 皆不可約化。

現以例子來說明不可約化之條件機率矩陣所對應馬可夫鏈的特性。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

例 3.18. 考慮不可約化之條件機率矩陣 A 和 B：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

，則

$$BA' = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{21}{30} & \frac{2}{15} \\ \frac{5}{36} & \frac{2}{15} & \frac{131}{180} \end{pmatrix}, \ A'B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{17}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因為 $P_{ii}(n) > 0, \forall n \geq 1$，亦即不論幾步後，$BA'$、$A'B$ 之元素皆大於 0，因此轉移矩陣 BA'、$A'B$ 之週期皆為 1，故 BA'、$A'B$ 為非週期性；同時所有狀態皆為重返狀態，而且只有一個連通族。

根據定理 2.17，當 A、B 為不可約化的條件機率矩陣時，則 AB'、$B'A$ 對應於特徵值 1 之機率向量 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$ 為唯一的，因此藉由定理3.14我們可得到以下推論：

推論 3.19. 設 A、B 為不可約化的條件機率矩陣，且 AB'、$B'A$ 對應特徵值 1 之機率向量分別為 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$，則轉移機率矩陣 BA'、$A'B$ n 步之極限為

$$\lim_{n\to\infty} (BA')^n = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\tau}', \ \lim_{n\to\infty} (A'B)^n = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\eta}'$$

其中 $\mathbf{1}$ 為大小符合對應的轉移矩陣之行向量 $[1 \ldots 1]'$。

接下來我們觀察可約化條件機率矩陣的情況。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

例 3.20. 在不失一般性下，考慮如下的對角塊狀條件機率矩陣：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$BA'=\begin{pmatrix}\frac{19}{36} & \frac{17}{36} & 0 & 0\\ \frac{17}{48} & \frac{31}{48} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & \frac{9}{20} & \frac{11}{20}\end{pmatrix},\ A'B=\begin{pmatrix}\frac{31}{48} & \frac{17}{48} & 0 & 0\\ \frac{17}{36} & \frac{19}{36} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{11}{40} & \frac{29}{40}\\ 0 & 0 & \frac{7}{20} & \frac{13}{20}\end{pmatrix}$$

在 A 和 B 矩陣中各有兩個塊狀矩陣，故 BA' 與 $A'B$ 有兩個塊狀矩陣，每一個塊狀矩陣為一個連通族，因此 BA' 與 $A'B$ 各有兩個連通族，每個連通族內皆為重返狀態且非週期的。

Arnold and Press (1989) 提出，在給定條件機率矩陣 A 和 B 相容下，他們的聯合機率分配唯一存在的充要條件為 BA' 對應的馬可夫鏈不可約化。並進一步指出，在一般情況下，BA' 對應的馬可夫鏈不可約化的充要條件為存在正整數 k 使得 $\sum_{l=1}^{I}(BA')^{k+l}>0$；但在非週期的情況下，不可約化之充要條件可簡化為存在某一正整數 k 使得 $(BA')^k>0$。在相容性問題裡，BA' 對角線上元素皆大於 0，對應的馬可夫鏈必定為非週期的，因此判斷 BA' 不可約化，只需證明存在正整數 k 使得 $(BA')^k>0$ 即可。故我們得到以下結果。

定理 3.21. 給定相容的條件機率矩陣 A 和 B。A 和 B 有唯一聯合分配的充要條件為，存在正整數 k 使得 $(BA')^k>0$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第四章

2×2 條件機率矩陣不相容測度之推導

首先以一個實際例子觀察四種不相容測度間的關係。

例 4.1. 考慮條件機率矩陣

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

利用 GAMS 及 MATLAB 求各測度有關的聯合分配與邊際分配，將結果彙整如下表。

表 4.1 2×2 條件機率矩陣下各測度值的相關結果

測度	ϵ	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\eta}$	P	P_A	P_B
(一)	$\frac{1}{32}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{7}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{9}{32} & \frac{11}{32} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$
(二)	$\frac{1}{16}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$
(三)	$\frac{1}{16}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$
(四)	$\frac{1}{16}$	—	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

由於 ϵ_3 是求邊際向量 $\boldsymbol{\tau}$ 使得 $\max\limits_{(i,j)} |a_{ij} \sum\limits_{k=1}^{I} b_{kj}\tau_k - b_{ij}\tau_i|$ 最小，即 $\epsilon_3 = \inf\limits_{P\in\mathbb{P}_B} d(P, f(P))$，但我們也可以思考求邊際機率向量 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_j) \geq 0, \sum\limits_j \eta_j = 1$ 使得 $\max\limits_{(i,j)} |a_{ij}\eta_j - b_{ij} \sum\limits_{k=1}^{J} a_{ik}\eta_k|$ 最小。假設此最小值為 ϵ_3^*，則 $\epsilon_3^* = \inf\limits_{P\in\mathbb{P}_A} d(P, g(P))$，本文將 ϵ_3^* 稱為 ϵ_3 之對偶測度。

以例 4.1 來看 $\epsilon_3^* = \dfrac{1}{16}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, P_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

且四種不相容測度間出現有趣的關係：$2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3^* = \epsilon_4$。在以下各節中，給定一般的 2×2 條件機率矩陣

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

，我們將分別推導出四種不相容測度的計算公式。

第一節　不相容測度 ϵ_3 與 ϵ_3^* 之推導

我們先計算 $\epsilon_3 = \inf\limits_{P\in\mathbb{P}_B} d(P, f(P))$

令

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

由邊際機率 $\boldsymbol{\tau}$ 生成的聯合分配

$$P_B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x & b_{12}x \\ b_{21}(1-x) & b_{22}(1-x) \end{pmatrix}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

接下來我們計算 Y 的邊際分配

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} b_{21} + (b_{11} - b_{21})x \\ \\ b_{22} + (b_{12} - b_{22})x \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

則

$$\begin{aligned} f(P_B) = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} + (b_{11} - b_{21})x & 0 \\ \\ 0 & b_{22} + (b_{12} - b_{22})x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{21} + a_{11}(b_{11} - b_{21})x & a_{12}b_{22} + a_{12}(b_{12} - b_{22})x \\ a_{21}b_{21} + a_{21}(b_{11} - b_{21})x & a_{22}b_{22} + a_{22}(b_{12} - b_{22})x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此

$$f(P_B) - P_B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{21}(1-x) - a_{21}b_{11}x & a_{12}b_{22}(1-x) - a_{22}b_{12}x \\ \\ -a_{11}b_{21}(1-x) + a_{21}b_{11}x & -a_{12}b_{22}(1-x) + a_{22}b_{12}x \end{pmatrix}$$

故

$$\epsilon_3 = \inf_x \sup\{|a_{11}b_{21}(1-x) - a_{21}b_{11}x|, |a_{12}b_{22}(1-x) - a_{22}b_{12}x|\}$$

令

$$f_1 = |a_{11}b_{21}(1-x) - a_{21}b_{11}x|, \ f_2 = |a_{12}b_{22}(1-x) - a_{22}b_{12}x|$$

則兩函數的圖形如下圖 (橫坐標為 x，縱座標為 f_1 及 f_2 之值) 所示：

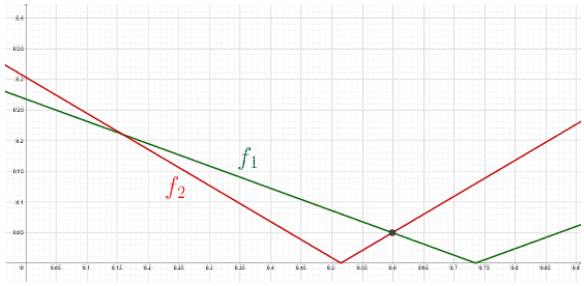

圖 4.1 2×2 條件機率矩陣下 ϵ_3 之圖解法

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

由圖形觀察可得知，x 的解發生在兩函數去掉絕對值後一正一負相交的地方，亦即：

$$a_{11}b_{21}(1-x)-a_{21}b_{11}x=-[a_{12}b_{22}(1-x)-a_{22}b_{12}x] \tag{4.2}$$

從 (4.2) 式可得

$$x=\frac{a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \tag{4.3}$$

代入得

$$\epsilon_3=\frac{|a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}|}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}}$$

我們也可以從另一種方式來解釋 (4.2) 式成立。

引理 4.2. 設 A、B 為 $2\times J$ 之條件機率矩陣，$\boldsymbol{\tau}:2\times 1$、$\boldsymbol{\eta}:J\times 1$ 為機率向量，$\delta>0$，則

$$\begin{aligned}&diag(\tau_1+\delta,\tau_2-\delta)\cdot B-f(diag(\tau_1+\delta,\tau_2-\delta)\cdot B)\\&=diag(\tau_1,\tau_2)\cdot B-f(diag(\tau_1,\tau_2)\cdot B)+\\&\begin{pmatrix}\delta(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{11}) & \delta(a_{22}b_{12}+a_{12}b_{22}) & \cdots & \delta(a_{2J}b_{1J}+a_{1J}b_{2J})\\ -\delta(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{11}) & -\delta(a_{22}b_{12}+a_{12}b_{22}) & \cdots & -\delta(a_{2J}b_{1J}+a_{1J}b_{2J})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

當 $\boldsymbol{\tau}$ 的第一個分量增加，第二個分量減少時，會使 $P_B-f(P_B)$ 的第一列各個元素值增加，但第二列各個元素值對稱地減少。

由以上引理，我們可推得下列結果。

定理 4.3. 給定 2×2 條件矩陣 A 和 B，若 $\epsilon_3=d(P_B,f(P_B)),P_B\in\mathbb{P}_B$，則 $P_B-f(P_B)$ 的形式必為下列之一：

$$\begin{pmatrix}\epsilon_3 & -\epsilon_3\\ -\epsilon_3 & \epsilon_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\epsilon_3 & \epsilon_3\\ \epsilon_3 & -\epsilon_3\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

根據定理 4.4 我們亦可以證明 (4.2) 式成立。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

接下來推導 ϵ_3 之對偶測度 ϵ_3^*：

令

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

，由邊際機率 $\boldsymbol{\eta}$ 生成的聯合分配

$$P_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y & a_{12}(1-y) \\ a_{21}y & a_{22}(1-y) \end{pmatrix}$$

則 X 的邊際分配

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} a_{12} + (a_{11} - a_{12})y \\ a_{22} + (a_{21} - a_{22})y \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} g(P_A) = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} + (a_{11} - a_{12})y & 0 \\ 0 & a_{22} + (a_{21} - a_{22})y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{12}b_{11} + b_{11}(a_{11} - a_{12})y & a_{12}b_{12} + b_{12}(a_{11} - a_{12})y \\ a_{22}b_{21} + b_{21}(a_{21} - a_{22})y & a_{22}b_{22} + b_{22}(a_{21} - a_{22})y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$g(P_A) - P_A = \begin{pmatrix} a_{12}b_{11}(1-y) - a_{11}b_{12}y & -a_{12}b_{11}(1-y) + a_{11}b_{12}y \\ a_{22}b_{21}(1-y) - a_{21}b_{22}y & -a_{22}b_{21}(1-y) + a_{21}b_{22}y \end{pmatrix}$$

可得

$$\epsilon_3^* = \inf_y \sup\{|a_{12}b_{11}(1-y) - a_{11}b_{12}y|, |a_{22}b_{21}(1-y) - a_{21}b_{22}y|\}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

由圖 (4.1)，可知

$$a_{12}b_{11}(1-y)-a_{11}b_{12}y=-[a_{22}b_{21}(1-y)-a_{21}b_{22}y] \tag{4.5}$$

從 (4.5) 式可得

$$y=\frac{a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}}{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}}$$

再將 y 代回 (4.5) 式，故

$$\epsilon_3^*=\frac{|a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}|}{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}}$$

我們亦可由另一方面說明 (4.5) 式的成立。

引理 4.4. 設 A、B 為 2×2 之條件機率矩陣，$\boldsymbol{\tau}:2\times 1$、$\boldsymbol{\eta}:2\times 1$ 為機率向量，$\delta>0$，則

$$A\cdot diag(\eta_1+\delta,\eta_2-\delta)-g(A\cdot diag(\eta_1+\delta,\eta_2-\delta))$$

$$=A\cdot diag(\boldsymbol{\eta})-diag(A\cdot diag(\boldsymbol{\eta}))\cdot B+\begin{pmatrix}\delta(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}) & -\delta(a_{12}b_{11}+a_{11}b_{12})\\ \delta(a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}) & -\delta(a_{22}b_{21}+a_{21}b_{22})\end{pmatrix}$$

將 $\boldsymbol{\eta}$ 的第一個分量增加，第二個分量減少時，$P_A-g(P_A)$ 第一行元素增加且第二行元素減少。但我們無法像引理4.2一般，將結果推廣到 $2\times J$ 的矩陣上，$J\geq 3$。

我們可由以上引理得到下面定理。

定理 4.5. 給定 2×2 條件機率矩陣 A 和 B，若 $\epsilon_3^*=d(P_A,g(P_A)),P_A\in\mathbb{P}_A$，則 $P_A-g(P_A)$ 的形式必為 (4.4) 式之一。

根據以上定理，我們亦可得 (4.5) 式。

要證明 $\epsilon_3=\epsilon_3^*$ 我們只要證明 ϵ_3 與 ϵ_3^* 的分母部分是相等的，即將分母相減後證明其值為 0：

$$\begin{aligned}&a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21})\\&=(b_{11}-b_{22})(a_{12}-a_{21})+(b_{12}-b_{21})(a_{11}-a_{22})\\&=(b_{11}+b_{21}-1)(a_{11}+a_{12}-1)-(b_{11}+b_{21}-1)(a_{11}+a_{12}-1)\\&=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

因此我們得知：

$$\epsilon_3 = \epsilon_3^* = \frac{|a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}|}{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{21}b_{22} + a_{22}b_{21}}$$

第二節　不相容測度 ϵ_4 之推導

第四種測度為：$\epsilon_4 = \inf\limits_{P \in \mathbb{P}_B^*} d(P, f(P))$

首先求 AB' 之特徵向量 $\boldsymbol{\tau}$，令 $\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$，且

$$AB'\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \boldsymbol{\tau}$$

因此我們可得到方程式：

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12})x + (a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22})(1-x) = x$$

故

$$x = \frac{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}$$

因此長度為 1 的正特徵向量為：

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}} \\ \dfrac{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}}{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}} \end{pmatrix}$$

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

此時

$$
\begin{aligned}
P_B^* &= diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} & \dfrac{a_{11}b_{12}b_{21}+a_{12}b_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \\ \dfrac{a_{21}b_{11}b_{21}+a_{22}b_{12}b_{21}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} & \dfrac{a_{21}b_{11}b_{22}+a_{22}b_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta} &= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}b_{22}+a_{21}b_{11}b_{21}+a_{22}b_{12}b_{21}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \\ \dfrac{a_{11}b_{12}b_{21}+a_{12}b_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}b_{22}+a_{22}b_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \\ \dfrac{a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

將 (4.3) 式代入 (4.1) 式可得計算 ϵ_3 之 $\boldsymbol{\eta}$：

$$
\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \\ \dfrac{a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}}{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}} \end{pmatrix}
$$

因計算 ϵ_4 與 ϵ_3 之 $\boldsymbol{\tau}$ 與 $\boldsymbol{\eta}$ 相同，故 $\epsilon_4 = \epsilon_3$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第三節　不相容測度 ϵ_2 之推導

第二種不相容測度為：$\epsilon_2 = \inf_{P_A \in \mathbb{P}_A, P_B \in \mathbb{P}_B} \{d(P_A, P_B)\}$
首先令

$$P_A = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1-a_{11} & 1-a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$$
$$P_B = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 1-b_{11} \\ b_{21} & 1-b_{21} \end{pmatrix}$$

則

$$P_A - P_B = \begin{pmatrix} a_{11}x - b_{11}y & a_{12}(1-x) - (1-b_{11})y \\ (1-a_{11})x - b_{21}(1-y) & (1-a_{21})(1-x) - (1-b_{21})(1-y) \end{pmatrix}$$

首先給一引理說明 $P_A - P_B$ 的形式。

引理 4.6. 設 A、B 為 $2 \times J$ 之條件機率矩陣，$\boldsymbol{\tau}: 2 \times 1$、$\boldsymbol{\eta}: J \times 1$ 為機率向量，$\delta_1, \delta_2 > 0$，則

$$A \cdot diag(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i + \delta_1, \cdots, \eta_j - \delta_1, \cdots, \eta_J) - diag(\tau_1 + \delta_2, \tau_2 - \delta_2) \cdot B$$
$$= A \cdot diag(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_J) - diag(\tau_1, \tau_2) \cdot B +$$
$$\begin{pmatrix} -b_{11}\delta_2 & -b_{12}\delta_2 & \cdots & a_{1i}\delta_1 - b_{1i}\delta_2 & \cdots & -a_{1j}\delta_1 - b_{1j}\delta_2 & \cdots & -b_{1J}\delta_2 \\ b_{21}\delta_2 & b_{22}\delta_2 & \cdots & a_{2i}\delta_1 + b_{2i}\delta_2 & \cdots & -a_{2j}\delta_1 + b_{2j}\delta_2 & \cdots & b_{2J}\delta_2 \end{pmatrix}$$

由引理 4.6 可看出，將 $\boldsymbol{\eta}$ 的第 i 個分量增加，第 j 個分量減少時，會造成 $P_A - P_B$ 的第 i 行元素值增加，第 j 行元素值減少；而增加 $\boldsymbol{\tau}$ 的第一個分量，減少第二個分量時，會使 $P_A - P_B$ 第一列各個元素值減少，第二列各個元素值增加。

由引理 4.6 可推得以下定理。

定理 4.7. 給定 2×2 條件機率矩陣 A 和 B，若 $\epsilon_2 = d(P_A, P_B), P_A \in \mathbb{P}_A, P_A \in \mathbb{P}_B$，則 $P_A - P_B$ 的形式必為 (4.4) 式之一。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

根據定理4.7我們可知 $P_A - P_B$ 之形式為 (4.4) 式之一，因此可得下列式子：

$$\begin{cases} a_{11}x - b_{11}y = -[(1-a_{11})x - b_{21}(1-y)] \\ a_{11}x - b_{11}y = -[a_{12}(1-x) - (1-b_{11})y] \end{cases}$$

可解出

$$\begin{aligned} x =& \frac{a_{12}b_{11} - a_{12}b_{21} + b_{21}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \\ =& \frac{a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \\ y =& \frac{a_{11}b_{21} - a_{12}b_{21} + a_{12}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \\ =& \frac{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \end{aligned}$$

且由 (4.6) 式

$$x = \frac{a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{11} + a_{21}b_{22} + a_{22}b_{21}}$$

接著我們將 x、y 代入 $|a_{11}x - b_{11}y|$ 求 ϵ_2：

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= |a_{11} \cdot \frac{a_{12}b_{11} - a_{12}b_{21} + b_{21}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} - b_{11} \cdot \frac{a_{11}b_{21} - a_{12}b_{21} + a_{12}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}}| \\ &= \frac{|a_{11}a_{12}b_{11} - a_{11}a_{12}b_{21} + a_{11}b_{21} - a_{11}b_{11}b_{21} + a_{12}b_{11}b_{21} - a_{12}b_{11} + a_{11}a_{12}b_{11}b_{21} - a_{11}a_{12}b_{11}b_{21}|}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \\ &= \frac{|a_{12}b_{11}(1-a_{11})(1-b_{21}) - a_{11}b_{21}(1-a_{12})(1-b_{11})|}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \\ &= \frac{|a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}|}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}} \end{aligned}$$

因此 $\epsilon_2 = \epsilon_3$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第四節　不相容測度 ϵ_1 之推導

第一種不相容測度為：$\epsilon_1 = \inf_{P\in\mathbb{P}} \sup\{d(P, f(P)), d(P, g(P))\}$。
由 ϵ_2 的證明過程，可得對應 ϵ_2 之 $\mathbb{P}_A$ 內的 P_A 及 $\mathbb{P}_B$ 內的 P_B 分別為

$$
\begin{aligned}
P_A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} & \dfrac{a_{12}(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} \\ \dfrac{a_{21}(a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} & \dfrac{a_{22}(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{11}+a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21}} \end{pmatrix} \\
P_B &= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{b_{11}(a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} & \dfrac{b_{12}(a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \\ \dfrac{b_{21}(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} & \dfrac{b_{22}(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12})}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \end{pmatrix} 。
\end{aligned}
$$

利用 f 和 g 的定義，可推得

$$
\begin{aligned}
f(P_B) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \end{pmatrix} \\
&= P_A \\
g(P_A) &= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}}{a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= P_B 。
\end{aligned}
$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

取 $P=\frac{1}{2}(P_A+P_B)$ 時，

$$\begin{aligned} f(P) =& \frac{1}{2}(f(P_A)+f(P_B)) = \frac{1}{2}(P_A+P_A) = P_A \\ g(P) =& \frac{1}{2}(g(P_A)+g(P_B)) = \frac{1}{2}(P_B+P_B) = P_B \end{aligned}$$

由於

$$\begin{aligned} d(P, f(P)) =& d(\frac{1}{2}(P_A+P_B), P_A) \\ =& \frac{1}{2}d(P_A, P_B) \\ =& \frac{1}{2}\epsilon_2 \end{aligned}$$

同理

$$d(P, g(P)) = \frac{1}{2}\epsilon_2$$

故 $\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}\epsilon_2$。但已知 $\epsilon_1 \geq \frac{1}{2}\epsilon_2$，所以 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_2$。

經由以上推導結果可知，$2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \dfrac{|a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}|}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}}$。當 A 和 B 相容時，根據比值矩陣法，比值矩陣

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{b_{11}} & \frac{a_{12}}{b_{12}} \\ \frac{a_{21}}{b_{21}} & \frac{a_{22}}{b_{22}} \end{pmatrix}$$

的秩為 1，故 $c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21}$，也就是說 $a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} = 0$，即各測量值為 0。反之；當各測量值為 0 時，則 A 與 B 相容。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第五章

條件機率矩陣不相容測度之進一步探討

第一節　四種不相容測度之關係-實例觀察

此章節將進一步探討四種不相容測度間的關係。顧仲航 (2011) 證明出：在一般 $I \times J$ 的條件機率矩陣下，$\epsilon_1 \geq \frac{1}{2}\epsilon_2,\ \epsilon_2 \leq \epsilon_3 \leq \epsilon_4$ 恆成立。第四章中，我們証得：在 2×2 條件機率矩陣下，$2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3^* = \epsilon_4$。對於非 2×2 的條件機率矩陣，四種不相容測度是否也存在著某種特殊關係?

首先我們觀察Arnold et al. (2002) 提供的例子：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{4}{10} \\ \frac{7}{10} & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{4} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{4} \\ \frac{15}{20} & 0 & \frac{2}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}$$

Arnold et al. (2002) 利用軟體計算後得：$\epsilon_1 = 0.021,\ \epsilon_2 = 0.041,\ \epsilon_3 = 0.042$，顧仲航 (2011) 利用軟體計算後得：$\epsilon_4 = 0.057$。本例中 ϵ_1 似乎是 ϵ_3 的一半；在一般情況下，這結果是否成立? 讓我們觀察下面的例子。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

例 5.1. 給定 3×3 條件機率矩陣：

$$A=\begin{pmatrix}0.125 & 0.4 & 0.4\\ 0.675 & 0.4 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0.225 & 0.35 & 0.425\\ 0.2 & 0.25 & 0.55\\ 0.8 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$$

由 GAMS 及 MATLAB 求各測度值有關的聯合分配與邊際分配，並將結果彙整如下表：

表 5.1 3×3 條件機率矩陣下各測度的相關結果

測度	ϵ	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\eta}$	P
(一)	0.0760	$\begin{pmatrix}0.3940\\0.3414\\0.2646\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2982\\0.3448\\0.3570\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.0372 & 0.2139 & 0.1428\\0.1253 & 0.1044 & 0.1117\\0.1357 & 0.0265 & 0.1025\end{pmatrix}$
(二)	0.1189	$\begin{pmatrix}0.5203\\0.2672\\0.2125\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.2554\\0.4643\\0.2803\end{pmatrix}$	—
(三)	0.1691	$\begin{pmatrix}0.3663\\0.3781\\0.2555\end{pmatrix}$	—	—
(三 *)	0.1761	—	$\begin{pmatrix}0.3762\\0.2433\\0.3805\end{pmatrix}$	—
(四)	0.1870	$\begin{pmatrix}0.2915\\0.3965\\0.3120\end{pmatrix}$	—	—

由以上例子可看出 $\epsilon_1 \gneq \frac{1}{2}\epsilon_2$，$\epsilon_3 \neq \epsilon_3^*$，且 $\epsilon_2 \lneq \epsilon_3$。

經由模擬數據我們也發現，在 2×3 條件機率矩陣下，$\epsilon_2=\epsilon_3$ 似乎成立，而這結果將在後面予以證明。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第二節　2×3 條件機率矩陣不相容測度之計算-實例說明

在本節先以實例具體說明如何找 2×3 條件機率矩陣之不相容測度值 ϵ_2 與 ϵ_3。

例 5.2. 我們給定兩條件機率矩陣

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

先以 GAMS 軟體計算出跟各個測度值有關的聯合分配與邊際分配，並彙整如下表 5.2，以便和計算出來的結果做比較。

表 5.2　2×3 條件機率矩陣下測度二、三的相關結果

測度	ϵ	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\eta}$	P	P_A	P_B
(二)	$\frac{58}{475}$	$\begin{pmatrix}\frac{7}{19}\\ \frac{12}{19}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{69}{190}\\ \frac{31}{95}\\ \frac{59}{190}\end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix}\frac{69}{380} & \frac{93}{475} & \frac{59}{950}\\ \frac{69}{380} & \frac{62}{475} & \frac{118}{475}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{21}{190} & \frac{7}{95} & \frac{7}{38}\\ \frac{24}{95} & \frac{24}{95} & \frac{12}{95}\end{pmatrix}$
(三)	$\frac{58}{475}$	$\begin{pmatrix}\frac{7}{19}\\ \frac{12}{19}\end{pmatrix}$	—	—	$\begin{pmatrix}\frac{69}{380} & \frac{93}{475} & \frac{59}{950}\\ \frac{69}{380} & \frac{62}{475} & \frac{118}{475}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{21}{190} & \frac{7}{95} & \frac{7}{38}\\ \frac{24}{95} & \frac{24}{95} & \frac{12}{95}\end{pmatrix}$

由表 5.2，可發現第二種及第三種不相容測度值 $\epsilon_2=\epsilon_3$，對應的 P_A 及 P_B 也相同，且

$$P_A-P_B=\begin{pmatrix}\frac{27}{380} & \frac{58}{475} & -\frac{58}{475}\\ -\frac{27}{380} & -\frac{58}{475} & \frac{58}{475}\end{pmatrix}$$

首先我們計算 ϵ_3，令

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}x\\ 1-x\end{pmatrix}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

因此

$$P_B = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10}x & \frac{1}{5}x & \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{5}(1-x) & \frac{2}{5}(1-x) & \frac{1}{5}(1-x) \end{pmatrix}$$

則

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{1}{10}x \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{10}x \end{pmatrix}$$

$$f(P_B) = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{1}{10}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} + \frac{3}{10}x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{1}{20}x & \frac{6}{25} - \frac{3}{50}x & \frac{3}{50}x + \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{20}x & \frac{4}{25} - \frac{2}{25}x & \frac{6}{25}x + \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

$$f(P_B) - P_B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{20}x + \frac{1}{5} & -\frac{8}{25}x + \frac{6}{25} & -\frac{11}{25}x + \frac{1}{25} \\ \frac{7}{20}x - \frac{1}{5} & \frac{8}{25}x - \frac{6}{25} & \frac{11}{25}x - \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

所以

$$\epsilon_3 = \inf_{0 \le x \le 1} \sup\{|\frac{7}{20}x - \frac{1}{5}|, |\frac{8}{25}x - \frac{6}{25}|, |\frac{11}{25}x - \frac{1}{25}|\}$$

圖5.1(橫坐標為 x，縱座標為函數值) 顯示出 ϵ_3 發生在 $\frac{8}{25}x - \frac{6}{25} = -(\frac{11}{25}x - \frac{1}{25})$ 的地

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

方，因此我們可解出 $x = \dfrac{7}{19}$，故 $\epsilon_3 = \dfrac{58}{475}$。

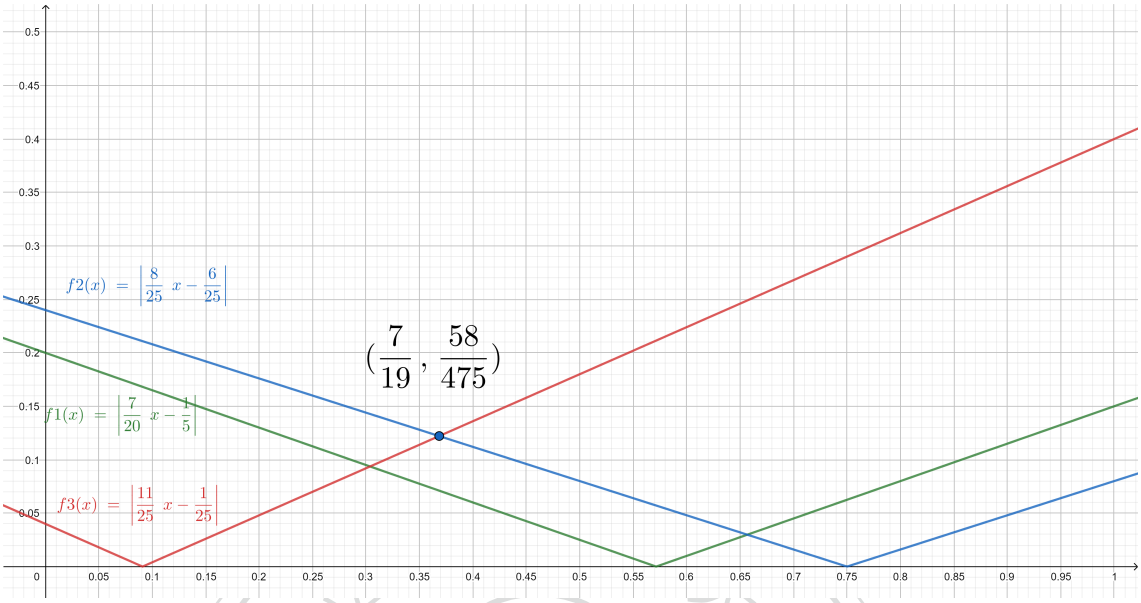

圖 5.1 2×3 條件機率矩陣下 ϵ_3 之圖解法

我們也可以從另外一個觀點來處理上面 x 求解的問題，由引理 4.2，可以推出下列結果：

定理 5.3. 給定 2×3 的條件機率矩陣 A 跟 B，若 $\epsilon_3 = d(P_B, f(P_B)), P_B \in \mathbb{P}_B$，則 $f(P_B) - P_B$ 為下列形式之一。

$$(i)\begin{pmatrix} \epsilon_3 & -\epsilon_3 & c \\ -\epsilon_3 & \epsilon_3 & -c \end{pmatrix}, (ii)\begin{pmatrix} \epsilon_3 & c & -\epsilon_3 \\ -\epsilon_3 & -c & \epsilon_3 \end{pmatrix}, (iii)\begin{pmatrix} c & \epsilon_3 & -\epsilon_3 \\ -c & -\epsilon_3 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, |c| \le \epsilon_3 \quad (5.1)$$

因此我們亦可由 (5.1) 式解 x。

形式 (i) 發生時：由

$$-\frac{7}{20}x + \frac{1}{5} = \frac{8}{25}x - \frac{6}{25}$$

解出 $x = \dfrac{49}{67}, \epsilon_3^{(1)} = \dfrac{15}{268}$。

形式 (ii) 發生時：由

$$-\frac{7}{20}x + \frac{1}{5} = \frac{11}{25}x - \frac{1}{25}$$

解出 $x = \dfrac{24}{79}, \epsilon_3^{(2)} = \dfrac{37}{395}$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

形式 (iii) 發生時：由

$$\frac{8}{25}x-\frac{6}{25}=-\frac{11}{25}x+\frac{1}{25}$$

解出 $x=\frac{7}{19},\epsilon_3^{(3)}=\frac{58}{475}$。

取 $\frac{15}{268}$、$\frac{37}{395}$ 跟 $\frac{58}{475}$ 之最大值即為 ϵ_3，故 $\epsilon_3=\frac{58}{475}$，此結果與前面圖解法的結果相同。

接下來我們計算 $\epsilon_2=\inf\limits_{P_A\in\mathbb{P}_A P_B\in\mathbb{P}_B}\{d(P_A,P_B)\}$：

令

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1-x_1-x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}y\\1-y\end{pmatrix}$$

$$P_A=A\cdot diag(\boldsymbol{\eta})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 & \frac{3}{5}x_2 & \frac{1}{5}(1-x_1-x_2)\\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{2}{5}x_2 & \frac{4}{5}(1-x_1-x_2)\end{pmatrix}$$

$$P_B=diag(\boldsymbol{\tau})\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}y & \frac{1}{5}y & \frac{1}{2}y\\ \frac{2}{5}(1-y) & \frac{2}{5}(1-y) & \frac{1}{5}(1-y)\end{pmatrix}$$

則

$$P_A-P_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{10}y & \frac{3}{5}x_2-\frac{1}{5}y & \frac{1}{5}(1-x_1-x_2)-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{2}{5}(1-y) & \frac{2}{5}x_2-\frac{2}{5}(1-y) & \frac{4}{5}(1-x_1-x_2)-\frac{1}{5}(1-y)\end{pmatrix}$$

由引理 4.6，我們可推導出以下結果。

定理 5.4. 給定 2×3 條件機率矩陣 A 與 B，若 $\epsilon_2=d(P_A,P_B),P_A\in\mathbb{P}_A,P_B\in\mathbb{P}_B$，則

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

$P_A - P_B$ 為下列形式之一：

$$(i)\begin{pmatrix} \epsilon_2 & -\epsilon_2 & c \\ -\epsilon_2 & \epsilon_2 & -c \end{pmatrix}, (ii)\begin{pmatrix} \epsilon_2 & c & -\epsilon_2 \\ -\epsilon_2 & -c & \epsilon_2 \end{pmatrix}, (iii)\begin{pmatrix} c & \epsilon_2 & -\epsilon_2 \\ -c & -\epsilon_2 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, |c| \leq \epsilon_2 \tag{5.2}$$

我們仿照 ϵ_3 的計算方式，對 (5.2) 式的三種情形求解，取最大的 ϵ_2 值，得知形式 (iii) 對應最大的 ϵ_2。由

$$\begin{aligned} -[\frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}y] &= \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}(1-y) \\ \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}y &= -[\frac{1}{5}(1-x_1-x_2) - \frac{1}{2}y] \\ \frac{1}{5}(1-x_1-x_2) - \frac{1}{2}y &= -[\frac{4}{5}(1-x_1-x_2) - \frac{1}{5}(1-y)] \end{aligned}$$

得 $x_1 = \frac{69}{190}$, $x_2 = \frac{31}{95}$, $y = \frac{7}{19}$ 以及 $\epsilon_2 = \frac{58}{475}$。此時，

$$P_A - P_B = \begin{pmatrix} \frac{27}{380} & \frac{58}{475} & -\frac{58}{475} \\ -\frac{27}{380} & -\frac{58}{475} & \frac{58}{475} \end{pmatrix}.$$

第三節　2×3 條件機率矩陣不相容測度 ϵ_2 與 ϵ_3 之推導

給定 2×3 的條件機率矩陣

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

，仿照上一節的方式，我們將導出不相容測度 ϵ_2 與 ϵ_3 的一般公式。

先推導出 ϵ_3。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

令

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$P_B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x & b_{12}x & b_{13}x \\ b_{21}(1-x) & b_{22}(1-x) & b_{23}(1-x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(P_B) =& A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) \\ =& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{21}(1-x) & 0 & 0 \\ 0 & b_{12}x + b_{22}(1-x) & 0 \\ 0 & 0 & b_{13}x + b_{23}(1-x) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21})x + a_{11}b_{21} & (a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22})x + a_{12}b_{22} & (a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23})x + a_{13}b_{23} \\ (a_{21}b_{11} - a_{21}b_{21})x + a_{21}b_{21} & (a_{22}b_{12} - a_{22}b_{22})x + a_{22}b_{22} & (a_{23}b_{13} - a_{23}b_{23})x + a_{23}b_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令

$$f(P_B) - P_B = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} U_{11} &= (a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21} - b_{11})x + a_{11}b_{21} = (a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21} - b_{11})x + a_{11}b_{21} \\ U_{12} &= (a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22} - b_{12})x + a_{12}b_{22} = (a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22} - b_{12})x + a_{12}b_{22} \\ U_{13} &= (a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23} - b_{13})x + a_{13}b_{23} = (a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23} - b_{13})x + a_{13}b_{23} \\ U_{21} &= (a_{21}b_{11} - a_{21}b_{21} - b_{21})x + a_{21}b_{21} - b_{21} = -U_{11} \\ U_{22} &= (a_{22}b_{12} - a_{22}b_{22} - b_{22})x + a_{22}b_{22} - b_{22} = -U_{12} \\ U_{23} &= (a_{23}b_{13} - a_{23}b_{23} - b_{23})x + a_{23}b_{23} - b_{23} = -U_{13} \end{aligned}$$

因此，$\epsilon_3 = \inf_x \sup\{|(a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21} - b_{11})x + a_{11}b_{21}|, |(a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22} - b_{12})x + a_{12}b_{22}|, |(a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23} - b_{13})x + a_{13}b_{23}|\}$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

由下列三個方程式之一，可求得 x 的真正解：

$$(a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21} - b_{11})x + a_{11}b_{21} = -\left[(a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22} - b_{12})x + a_{12}b_{22}\right] \tag{5.3}$$

$$(a_{12}b_{12} - a_{12}b_{22} - b_{12})x + a_{12}b_{22} = -\left[(a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23} - b_{13})x + a_{13}b_{23}\right] \tag{5.4}$$

$$(a_{11}b_{11} - a_{11}b_{21} - b_{11})x + a_{11}b_{21} = -\left[(a_{13}b_{13} - a_{13}b_{23} - b_{13})x + a_{13}b_{23}\right] \tag{5.5}$$

由 (5.3) 式可得：

$$x^{(1)} = \frac{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}},\ \epsilon_3^{(1)} = \frac{|a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22}|}{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}}$$

由 (5.4) 式可得：

$$x^{(2)} = \frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23}}{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}},\ \epsilon_3^{(2)} = \frac{|a_{11}a_{23}b_{13}b_{22} - a_{13}a_{22}b_{12}b_{23}|}{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}}$$

由 (5.5) 式可得：

$$x^{(3)} = \frac{a_{11}b_{21} + a_{13}b_{23}}{a_{11}b_{21} + a_{13}b_{23} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13}},\ \epsilon_3^{(3)} = \frac{|a_{11}a_{23}b_{13}b_{21} - a_{13}a_{21}b_{11}b_{23}|}{a_{11}b_{21} + a_{13}b_{23} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13}}$$

則真正的 $\epsilon_3 = \max\{\epsilon_3^{(1)}, \epsilon_3^{(2)}, \epsilon_3^{(3)}\}$。

接著推導 ϵ_2：

令

$$P_A = A \cdot diag(\boldsymbol{\eta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$P_B = diag(\boldsymbol{\tau}) \cdot B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

則

$$P_A - P_B = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 - b_{11}y & a_{12}x_2 - b_{12}y & a_{13}(1-x_1-x_2) - b_{13}y \\ a_{21}x_1 - b_{21}(1-y) & a_{22}x_2 - b_{22}(1-y) & a_{23}(1-x_1-x_2) - b_{23}(1-y) \end{pmatrix}$$

為了方便起見，令

$$P_A - P_B = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{pmatrix}$$

由定理5.4 可知，

發生形式 (i) 時：$f_1 = -f_4, -f_2 = f_5, f_1 = -f_2$

可得

$$x_1^{(1)} = \frac{b_{11}b_{21} + a_{12}b_{11}b_{22} + a_{22}b_{12}b_{21}}{a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} + a_{22}b_{12} + a_{12}b_{22}},\ x_2^{(1)} = \frac{b_{12}b_{22} + a_{11}b_{12}b_{21} + a_{21}b_{11}b_{22}}{a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} + a_{22}b_{12} + a_{12}b_{22}},$$

$$y^{(1)} = \frac{a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} + a_{22}b_{12} + a_{12}b_{22}},\ \epsilon_2^{(1)} = \frac{|a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22}|}{a_{21}b_{11} + a_{11}b_{21} + a_{22}b_{12} + a_{12}b_{22}}$$

發生形式 (ii) 時：$f_1 = -f_4, -f_3 = f_6, f_1 = -f_3$

可得

$$x_1^{(2)} = \frac{b_{11}b_{21} + a_{11}b_{13}b_{22} + a_{23}b_{13}b_{21}}{a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13} + a_{13}b_{23}},\ x_2^{(2)} = \frac{b_{13}b_{23} + a_{11}b_{13}b_{21} + a_{21}b_{11}b_{23}}{a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13} + a_{13}b_{23}}$$

$$y^{(2)} = \frac{a_{11}b_{21} + a_{13}b_{23}}{a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13} + a_{13}b_{23}},\ \epsilon_2^{(2)} = \frac{|a_{11}a_{23}b_{13}b_{22} - a_{13}a_{22}b_{12}b_{23}|}{a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{23}b_{13} + a_{13}b_{23}}$$

發生形式 (iii) 時：$f_2 = -f_3, f_2 = -f_5, f_6 = -f_3$

$$x_1^{(3)} = \frac{b_{13}b_{23} + a_{12}b_{13}b_{22} + a_{22}b_{12}b_{23}}{a_{11}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}},\ x_2^{(3)} = \frac{b_{12}b_{22} + a_{13}b_{12}b_{23} + a_{23}b_{13}b_{22}}{a_{11}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}}$$

$$y^{(3)} = \frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23}}{a_{11}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}},\ \epsilon_2^{(3)} = \frac{|a_{11}a_{23}b_{13}b_{21} - a_{13}a_{21}b_{11}b_{23}|}{a_{11}b_{22} + a_{13}b_{23} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}}$$

則真正的 $\epsilon_2 = \max\{\epsilon_2^{(1)}, \epsilon_2^{(2)}, \epsilon_2^{(3)}\}$。

根據以上的推導，我們有下面結果。

定理 5.5. 給定 2×3 的條件機率矩陣 A 和 B，恆有 $\epsilon_2 = \epsilon_3$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

當 A 和 B 相容時，根據比值矩陣法，比值矩陣

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{b_{11}} & \frac{a_{12}}{b_{12}} & \frac{a_{13}}{b_{13}} \\ \frac{a_{21}}{b_{21}} & \frac{a_{22}}{b_{22}} & \frac{a_{23}}{b_{23}} \end{pmatrix}$$

的秩為 1，故 $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} = c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21} = 0$，也就是 $a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} = a_{11}a_{23}b_{13}b_{22} - a_{13}a_{22}b_{12}b_{23} = a_{11}a_{23}b_{13}b_{21} - a_{13}a_{21}b_{11}b_{23} = 0$，即 $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$。反之；當 $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ 時，為方便說明起見，假定最大值發生在形式 (i) 時，則 $a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} = 0$，因而 $a_{11}a_{23}b_{13}b_{22} - a_{13}a_{22}b_{12}b_{23} = a_{11}a_{23}b_{13}b_{21} - a_{13}a_{21}b_{11}b_{23} = 0$，故 $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} = c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21} = 0$，也就是 $rank(C) = 1$，因此 A 與 B 相容。
故我們可得以下結果。

定理 5.6. 給定 2×3 的條件機率矩陣 A 和 B，A 和 B 相容的充要條件是 $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$。

我們可以將定理 5.5 與定理 5.6 結果推廣到 $2 \times J$ 的條件機率矩陣上 , $J \geq 2$。

推論 5.7. 給定 $2 \times J$ 的條件機率矩陣 A 和 B，$J \geq 2$，恆有 $\epsilon_2 = \epsilon_3$；且 A 和 B 相容的充要條件是 $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$。

同理，我們也可以將上述的結果推廣至 $I \times 2$ 的條件機率矩陣上，$I \geq 2$。

推論 5.8. 給定 $I \times 2$ 的條件機率矩陣 A 和 B，$I \geq 2$，恆有 $\epsilon_2 = \epsilon_3^*$；且 A 和 B 相容的充要條件是 $\epsilon_2 = \epsilon_3^* = 0$。

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

第六章

結論

綜合前面章節的結果，我們可以得到下列結論：

1. 二維條件分配相容性問題跟馬可夫鏈理論之間有對應的關係。

2. 給定條件機率矩陣 A 和 B，AB' 對應的馬可夫鏈為非週期性。

3. 條件機率矩陣的不可約化與馬可夫鏈之不可約化為等價關係。

4. 條件分配存在唯一聯合分配的充要條件是對應的馬可夫鏈為不可約化。

5. 對一般的 $I \times J$ 條件機率矩陣而言，顧仲航 (2011) 證明出 $\epsilon_1 \geq \frac{1}{2}\epsilon_2$ 且 $\epsilon_2 \leq \epsilon_3 \leq \epsilon_4$，但經由模擬數據我們進一步發現 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_2$、$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_3$、$\epsilon_2 = \epsilon_3$ 或 $\epsilon_3 = \epsilon_3^*$ 不一定成立。

6. 給定 2×2 的條件機率矩陣 A 和 B，我們推導出四種不相容測度 ϵ_1、ϵ_2、ϵ_3、ϵ_4 及 ϵ_3 之對偶測度 ϵ_3^* 的計算公式，並證明 $2\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_3^* = \epsilon_4$；同時證明了 A 和 B 相容的充要條件為不相容測度值之一為 0。

7. 給定 $2 \times J$ 的條件機率矩陣 A 和 B，$J \geq 2$，我們推導出 ϵ_2 與 ϵ_3 的計算公式，並證明 $\epsilon_2 = \epsilon_3$ 恆成立；同時證明了 A 和 B 相容的充要條件為 $\epsilon_2 = 0$ 或 $\epsilon_3 = 0$。

8. 給定 $I \times 2$ 的條件機率矩陣 A 和 B，$I \geq 2$，恆有 $\epsilon_2 = \epsilon_3^*$；且 A 和 B 相容的充要條件為 $\epsilon_2 = \epsilon_3^* = 0$。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01

參考文獻

Arnold, B. C., Castillo, E., and Sarabia, J. M. (2002). Exact and near compatibility of discrete conditional distributions. *Comput. Stat. Data Anal.*, 40(2):231–252.

Arnold, B. C. and Press, S. J. (1989). Compatible conditional distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405):152–156.

Song, C.-C., Li, L.-A., Chen, C.-H., Jiang, T. J., and Kuo, K.-L. (2010). Compatibility of finite discrete conditional distributions. *Statistica Sinica 20 (2010)*.

Yates, R. and Goodman, D. (2005). *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*. John Wiley & Sons, second edition.

黃文璋 (1995). *隨機過程*. 華泰文化事業股份有限公司.

顧仲航 (2011). 以特徵向量法解條件分配相容性問題. 國立政治大學應用數學系碩士論文.

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MATH.005.2018.B01