國立政治大學金融學系研究所

碩士學位論文

零息可贖回債券商品定價:
三元樹與最小平方蒙地卡羅方法之比較

Pricing Zero Callable Bonds：the Comparison between Trinomial Tree and the Least-Squares Monte-Carlo Method

國立政治大學
National Chengchi University

指導教授：林士貴 博士

莊明哲 博士

研究生：林妍如 撰

中 華 民 國 一 百 零 七 年 六 月

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

零息可贖回債券商品定價:三元樹與最小平方蒙地卡羅方法之比較

學生：林妍如　　指導教授：林士貴　博士

莊明哲　博士

國立政治大學金融學系

摘要

為了提供債券交易實務之需求，一方面，給予債券交易者債券之公平價格作為與對手交易之參考；二方面，滿足 2018 年正式適用於台灣的會計準則 IFRS 9 之要求，其對於金融資產公允價格之需求。因此，本篇論文參考 Longstaff and Schwartz（2001）所提出的最小平方蒙地卡羅法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method）、Cox, Ross and Rubinstein（1979）提出的二元樹模型（Binomial Model）和 Hull and White（1994a）提出的 Hull and White（1990） model 下之利率三元樹展開方法，所建置的最小平方蒙地卡羅法與三元樹兩種零息可贖回債券評價方法。而於實證分析的部分，除了將估計結果進行敏感度分析外，更進一步與台灣證券櫃檯買賣中心所公告的美元計價零息可贖回債券的理論價作比較，比較結果，最小平方蒙地卡羅法與其之估計差小於 2%，而三元樹法與其之估計差則小於 4%，而就模型比較之角度，最小平方蒙地卡羅法在評價外幣計價的零息可贖回債券的延伸性與擴充性較佳，且更貼近台灣的會計實務需求。

關鍵詞：零息可贖回債券、最小平方蒙地卡羅法、三元樹、Hull and White model

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

Pricing Zero Callable Bonds：the Comparison between Trinomial Tree and the Least-Squares Monte-Carlo Method

Student: Yen-Ju Lin Advisor: Dr. Shih-Kuei Lin
Dr. Ming-Che Chuang
Submitted to Department of Money and Banking
Collage of Commerce National Chengchi University

Abstract

For the bonds' traders, they don't have the reasonable right price to refer when they want to make a deal with their counterparts. Also to provide fair price of the company's holding financial assets to let them follow the accounting criterions in IFRS 9 . So to fulfill all the requirements, this thesis builds two pricing models of zero callable bonds, according to three references, including the way called Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method which is published by Longstaff and Schwartz（2001）, the Binomial Model which is published by Cox, Ross and Rubinstein（1979）, and the construction method of trinomial tree which is published by Hull and White（1994a）. And in empirical analysis, I not only discuss about the sensitivity of some parameters, but also compare the gap between the results that get from different methods and add the theoretical price that is offered on the website of Taipei Exchange to be the other comparison. In conclusion, the gaps between Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method and the theoretical price are smaller than 2%. And the gaps between the second method and theoretical price are smaller than 4%. But in the aspect of the expandability of pricing method, the Least-Squares Monte-Carlo pricing method that I derived will be more flexible model for pricing the zero callable bonds.

Keywords：Zero Callable Bonds；Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method；Trinomial Tree；Hull and White Model.

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

目次

第一章　緒論 1

第二章　文獻回顧 4

第一節　可贖回債券評價 4
第二節　最小平方蒙地卡羅法 5
第三節　三元樹 6
第四節　其他 7

第三章　理論說明 9

第一節　模型假設 9
一、國外利率 9
二、違約強度 13
第二節　最小平方蒙地卡羅法 13
第三節　三元樹 16

第四章　實證分析 21

第一節　參數估計 21
第二節　資料說明 22
第三節　實證結果與敏感度分析 23
一、最小平方蒙地卡羅法 23
二、三元樹 29
第四節　實證結果比較 34

第五章　結論與未來研究 36

第一節　結論 36
第二節　未來研究 38

參考文獻 39

中文文獻 39
英文文獻 39

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

表次

表 4-1：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10-2018/04 的實證結果.....23

表 4-2：三元樹於評價日 2016/10-2018/04 的實證結果.....29

表 4-3：評價日 2016/10-2018/04 不同方法之債券價格比較.....34

圖次

圖 1-1：台灣國際債券發行淨額占比.....1

圖 1-2：台灣國際債券發行狀況.....2

圖 1-3：2018/06/14 國際債券專業版商品類別發行狀況.....3

圖 4-1：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之路徑模擬數的敏感度分析.....23

圖 4-2：三個月期的公債殖利率於 2009/01-2018/04 的月資料折線圖.....25

圖 4-3：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之即期利率曲線的敏感度分析.....26

圖 4-4：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之復歸速度的敏感度分析.....26

圖 4-5：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之波動度的敏感度分析.....27

圖 4-6：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之本金回復率的敏感度分析.....28

圖 4-7：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之信用利差的敏感度分析.....28.

圖 4-8：三元樹評價日 2016/10 之期數間距的敏感度分析.....29

圖 4-9：三元樹評價日 2016/10 之即期利率曲線的敏感度分析.....31

圖 4-10：三元樹評價日 2016/10 之復歸速度的敏感度分析.....31

圖 4-11：三元樹評價日 2016/10 之短利波動度的敏感度分析.....32

圖 4-12：三元樹評價日 2016/10 之本金回復率的敏感度分析.....33

圖 4-13：三元樹評價日 2016/10 之與信用利差的敏感度分析.....33

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第一章　緒論

根據金融監督管理委員會證券期貨局所公布的債券發行概況資訊，其中記錄了政府債券、金融債券、受益證券、公司債、外國債券與國際債券的發行數與淨額之月資料，由於國際債券的淨額是使用美元為計價單位來呈現，因此，利用中央銀行所公告的新台幣對美元銀行間成交之收盤匯率的資料，將其轉換為新台幣計價單位，便可繪製出圖 1-1，由於目前資料僅提供至 2018 年 4 月，因此，2018 年的國際債券占固定收益商品發行淨額統計，圖 1-1 以 2018 年 4 月的資料作代表。

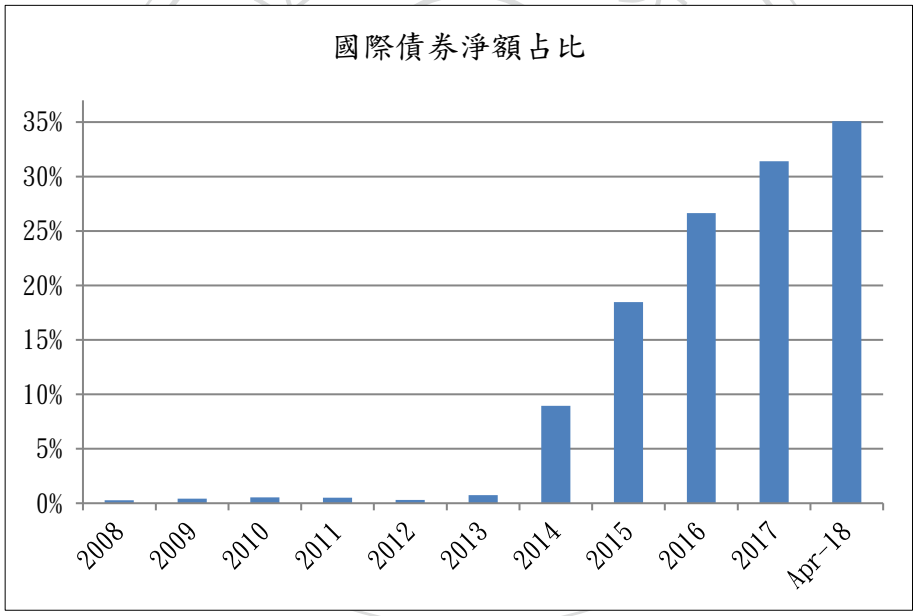

圖 1-1：台灣國際債券發行淨額占比

從圖 1-1，可觀察到國際債券在固定收益商品發行淨額統計的占比在 2014 年劇增，從 2013 年的 8.93%突增至 2014 年的 18.47%，主因為 2014 年於保險法第 146 條之 4 條文增列「保險業投資於國內證券市場上市或上櫃買賣之外幣計價股權或債權憑證之投資金額，不計入其國外投資限額」，法令的修改，為了增加保險業資金運用的彈性度，並考量提升台灣市場的投資效率與國內資本市場發展，使得國際債券發行量大幅增加。不過在那之前，於 2013 年，國際債券

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

的發行量已有小幅度的提升，從 2012 年的 0.75%占比增至 2013 年的 8.93%占比，而從圖 1-2 中，也可清楚地觀察到國際債券發行的檔數從 3 檔增加到 15 檔，淨額也從 8 億美元增至 20 億美元，淨值近乎翻至 2.5 倍，其原因有二，第一，債券投資人分級管理並簡化發行流程；第二，則為開放陸資來台發行寶島債。

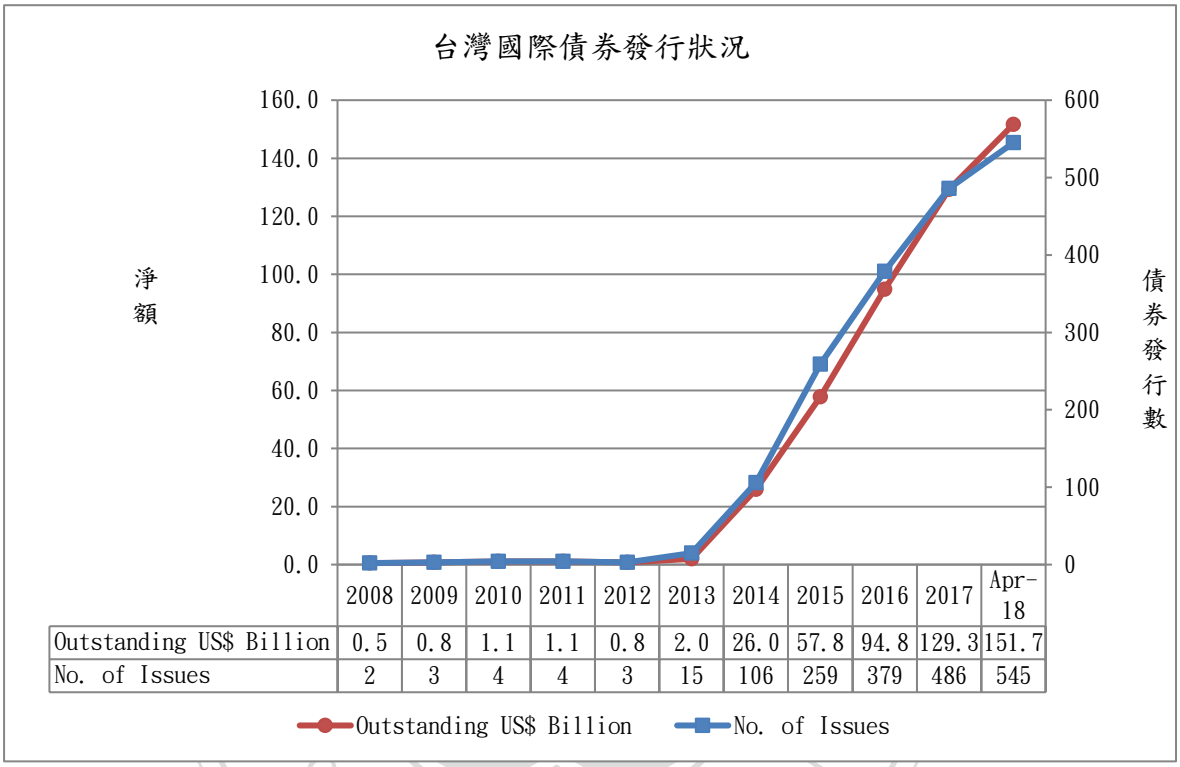

圖 1-2：台灣國際債券發行狀況

另外，根據櫃檯買賣中心所公告的專業版上的國際債券發行資料，從圖 1-3 中，能觀察到於 2018/06/14 所發行的國際債券數總額為 549 檔，其中，117 檔為無贖回條件的債券，65 檔為有付息的債券，剩餘的 367 檔為可贖回的零息債券，即為本篇論文所探討的對象，占總發行國際債券的約 67%，而其債券之計價幣別包括了美金、澳幣、人民幣與南非幣，於 2016/06/14 時，分別有 362、3、1、1 檔債券數，從圓餅圖中可了解到美元計價的零息可贖回債券為台灣所發行的國際債券中最大宗的商品類別。

由於債券的交易主要以證券商營業處所議價，且交易量與其他金融商品相

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

比較低，特別是富有贖回條件之債券商品，市場缺乏較為合理的公平價格，作為與交易對手議價的參考。此外，於 2014 年國際會計準則理事會（IASB）所發布的 IFRS 9，相關於金融工具之資產分類、評價與減損方式皆有所變動，且台灣也於 2018 年元月開始，適用於該會計準則，因此，各式金融資產之公允價值對於企業在會計上之提列極為重要，特別是較為複雜之金融工具更是如此，此外，台灣的會計準則仍多以台幣為計價單位，使得在獲得受外幣計價、外國利率影響之金融商品的理論價格，較存在探討之空間，因為此類型商品價格所受之影響因子較多，導致評價更為複雜許多。而零息可贖回債券，此類債券可將其視為一般債券與百慕達式選擇權的組合，由於在買賣債券的當下並無法得知在商品期間中所交易的債券是否會被發行人提前贖回，因此，在評價上，必須進一步對未來的利率等影響因子作模擬，方能推估出商品之理論價格。目前，於 2017 年年底開始，櫃檯買賣中心提供美元計價零息可贖回國際債券的理論價格予投資人評估之用，由於其目前僅提供美元計價的理論價格，台灣的會計報帳多以台幣作為基準，因此，此篇論文將探討他種評價方法，並考慮其自債券商品計價幣別轉換為台幣之可行性與合理性。

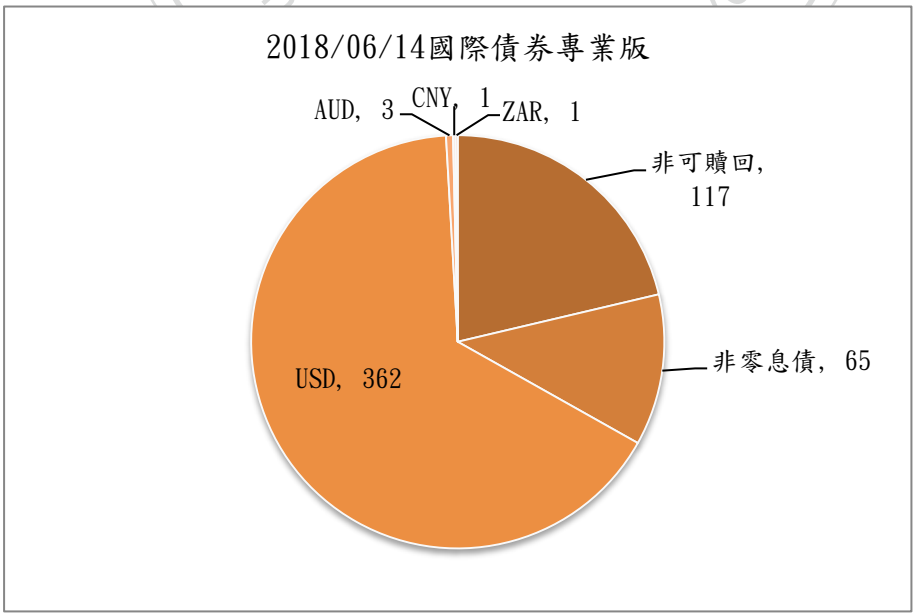

圖 1-3：2018/06/14 國際債券專業版商品類別發行狀況

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第二章　文獻回顧

第一節　可贖回債券評價

首先，參考了 Jarrow, Li, Liu, and Wu（2006）、Jiang（2011）與 Hua, Chou, and Wang（2009）等人對於可贖回債券的評價研究，多偏向於使用數值方法來解決可贖回債券無封閉解的情況。Jarrow, Li, Liu, and Wu(2006)提出延伸 Duffie and Singleton（1999）所提出的評價法與贖回和違約之間的差異性結合的可贖回公司債評價方法，主要利用縮減式（Reduced-Form Approach）模型試圖刻劃出贖回的機率，實證結果表示，該論文所改良的方法無論是樣本內外的表現皆比傳統評價法好。

Jiang（2011）利用 Vasicek（1977）與 Cox, Ingersoll, and Ross（1985b）所提出的短利模型，欲對可贖回零息債券作評價，而評價方式採用有限差分法（Finite Difference Methods），並利用選擇權特性推得零息歐式可贖回債券（Zero-Coupon European Callable Bonds）的解析解，此外，實證結果發現，使用 Vasicek model 債券價格下降速度較使用 Cox-Ingersoll-Ross（CIR） model 快，且由於實際利率很低，因此 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)model 比 Vasicek model 佳。

Hua, Chou, and Wang（2009）建立一個三維度模型用來評價有違約風險的可贖回債券，因此，評價模型考量的因子包括隨機變動的利率、隨機的違約風險、贖回條款，其中，隨機變動的利率與隨機的違約風險是使用雙根的擴散過程（Square-Root Diffusion Process），而贖回條款則採用有限差分法（Finite Difference Methods），且實證結果顯示此模型可充分運用在評價此類商品。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第二節　最小平方蒙地卡羅法

本篇論文選定用來評價零息可贖回債券的其中一個方法最小平方蒙地卡羅法，即為參考由 Longstaff and Schwartz（2001）提出的最小平方蒙地卡羅法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method），論文中，先使用美式賣權作為方法之說明對象，方法的核心為利用線性迴歸方程式作為繼續持有的條件期望值，並將其與提前履約的價值作比較，來決定繼續持有或是提前履約，從商品到期日由後往前推回評價日。此評價方法，除了可利用於路徑相依的商品類別，更能使用在多因子的商品，在文末，還對標的資產擁有跳躍擴散特性之選擇權及可取消型指數攤銷利率交換（Cancelable Index Amortizing Swaps）作為實證對象。

Sun（2015）由於 Basel III 的發布，該論文加入信用風險，將其視為真實測度下做處理，加入此參考因子嘗試延伸與優化 Longstaff and Schwartz（2001）所提出的最小平方蒙地卡羅法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method），且將美式選擇權與界線選擇權作為其實證研究之對象。

陳文琦（2016）引用 Cox-Ingersoll-Ross（CIR）model 當作短利模型，並運用 Longstaff and Schwartz (2001)提出的最小平方蒙地卡羅模擬法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method）評價零息可贖回債券，並進一步對其作敏感度分析與風險量化評估。而陳子謙、黎致平（2017）同樣採用 Longstaff and Schwartz (2001)提出的最小平方蒙地卡羅模擬法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method）評價零息可贖回債券，不過在短利模型的選取上，運用 Hull and White（1990）model，而本篇論文用來比較之最小平方蒙地卡羅法，即參考該篇論文所提及之方法。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第三節　三元樹

本篇論文選定用來評價零息可贖回債券的另一個方法，即為三元樹，且選定短利模型為 Hull and White（1990）所提出的 Hull and White（1990）model，因此，參考了以下文獻。在 Hull and White（1994a）這篇論文中，首先，進一步改良 Hull and White（1993）所提出的建置方式，建立短利之長期平均水準為 0 的三元樹，並將三元樹的展開分支根據限制條件設立上下界，因此，將利率推延到下期會因為是否觸及到所設定的分支上下界而有不同的機率計算公式，第二步，利用市場的利率資訊，對長期平均水準作調整，產生更貼近市場實際情況的歪斜三元樹，最後，作者更提及此三元樹的展開方式，也能運用在 Black and Karasinski（1991）model 等其他模型。

Hull and White（1994b）延伸 Hull and White（1994a）所提出的單因子的三元樹模型展開方法，提出了雙因子的三元樹展開方法，利用兩種切入點，第一種，先展開兩個國家的短利在個別風險中立測度下的三元樹，再利用機率的調整產生兩者間的相關性，而調整方式會依據相關性正或負有所差異；第二種，則是直接產生一個雙因子的模型，運用 Hull and White（1994a）單因子模型的利率三元樹展開方式。

蘇立人（2017）運用 Hull and White（1994a）所提出的短利模型建置利率樹，且利用利率交換選擇權（Swaption）的隱含波動度來試圖逼近市場價格與模型價格，便能估算出 Hull and White（1990）model 的均數復歸與短利波動度，最後，在實證的部分對其評價結果之合理性做進一步評估。而本篇論文，採用不同的參數估計方式，已獲得κ與σ。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第四節　其他

在評價前，需選定欲使用之短利模型，參考了 Vasicek（1977）與 Hull and White（1990）所提出的模型。Vasicek（1977）對短利提出的利率模型，模型有三個前提假設，包括短利符合擴散過程（Diffusion Process）、零息債券價格僅受期間內的即期利率影響、市場是有效率的。其中，更提到短利的長期平均水準與短利的差距會與短利的波動度成一定的比例關係。

Hull and White(1990)參考 Vasicek(1977)與 Cox, Ingersoll, and Ross(1985b)所提出的短利模型，並將其延伸，對模型中的短利長期平均水準從常數改為隨時間變動之變數，並利用上述之利率模型評價債券選擇權（Bond Options），比較結果，發現由 Vasicek（1977）所延伸的方法的準確性佳，且模型的擴充性也不錯。但由於 Hull and White（1990）model 中的短利長期平均水準，相較於 Vasicek（1977）model 會隨著時間做調整，在評價商品期間多為 20-30 年期的零息可贖回債券，將較為貼近市場。

接下來，在評價過程中將考量零息可贖回債券的違約風險，而著名的相關的模型，便有結構式模型(Structural-Form Model)與縮減式模型(Reduced-Form Model)。Merton (1974)以 Black and Scholes (1973)選擇權定價理論為根本，發展出評價公司債務的模型，並應用到考量違約風險的情況下，用來評價可贖回的債券。另外，Chamber and Lu (2007)利用二元樹模型來評價可轉換公司債，參考因子包括利率、公司股價以及違約風險，其中，變數中所引用的模型分別為 Ho-Lee(1986)lognormal model、Cox-Ross-Rubinstein(CRR)model 與 Jarrow and Turnbull (1995)的縮減式模型(Reduced-Form Model)，而利率和公司股價之間的相關性假設則參考 Hull and White（2003），而所使用的縮減式模型（Reduced-Form Model）的概念是利用無擔保債券與有擔保債券的信用利差推

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

得隱含的違約機率，該篇論文的實證結果顯示利率和公司股價之間的相關性假設是必要的在評價可轉換公司債上。

Milanov, Kounchev, Fabozzi, Kim, and Rachev（2013）運用二元樹模型對可轉換債券作評價，且考量違約機率，其中，運用了縮減式（Reduced-Form）違約模型與合成式（Synthesis）違約模型，所使用的模型在連續時間空間下收斂為 Ayache, Forsyth, and Vetzal（2003）所提出的違約模型，不過實證層面上，對轉換機率、二元樹的展開做更詳細的探討。

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第三章　理論說明

本章將介紹本篇論文用來評價零息可贖回債券的方法，包括最小平方蒙地卡羅法，以及 Hull and White model 下的三元樹，在詳細的商品定價說明前，將先對國內利率與違約強度等因子做模型上的假設。

第一節　模型假設

這部分為所選定之影響零息可贖回債券定價的因子，作模型的選定與假設，以利本章的第二節與第三節的商品評價方法使用。

一、國外利率

考慮一個過濾的機率空間（Filtered Probability Space），記作$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q}, \{\mathcal{F}(t)\}_{t=0}^{T}\}$，由標準布朗運動$W^{\mathcal{Q}}(t) \sim \text{Normal}(0, t)$所產生。其中，$\Omega$為所有可能結果的集合，$\mathcal{F}$為$\Omega$ 的子集的 σ-field，$\mathcal{Q}$為國外風險中立機率測度，$\{\mathcal{F}(t)\}_{t=0}^{T}$為標準布朗運動在時間點t所產生的一數列之資訊集合。依據上述前提，在國外風險中立測度下，國外短期利率服從Hull and White（1990）model的公式如下：

$$dr(t) = \kappa[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma dW^{\mathcal{Q}}(t), \qquad (3.1)$$

其中κ為復歸速度，即為短期利率偏離長期平均水準$\theta(t)$時，被拉回的力道；$\theta(t)$為短利在時間點t的長期平均水準，即為與Vasicek（1977）model有別之處；σ為短利的瞬間波動度。

在給定資訊集合$\mathcal{F}(t)$，且假設$q > t$、$Y[t, r(t)] = r(t)e^{\kappa t}$。利用Itô's lemma

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

將$Y[t,r(t)]$展開如下：

$$dY[t,r(t)] = \kappa r(t)e^{\kappa t}dt + e^{\kappa t}dr(t) = \kappa\theta(t)e^{\kappa t}dt + e^{\kappa t}\sigma dW^{Q}(t) \qquad (3.2)$$

接下來，(3.2）式左右同時取積分介於(t,T)間，整理後便得短利連續型的變化公式。

$$r(q) = r(t)e^{-\kappa(q-t)} + \kappa\int_t^q \theta(u)e^{-\kappa(q-u)}du + \sigma\int_t^q e^{-\kappa(q-u)}dW^{Q}(u) \quad (3.3)$$

下一步，將利用（3.3）式計算出零息債券的公式，並進一步運用推導過程中所得之長期平均水準$\theta(t)$與瞬間遠期利率的關係，求得長期平均水準$\theta(t)$的計算公式，以利實證作使用。至於Hull and White（1990）model公式中的復歸速度κ與瞬間波動度σ的估算將於第四章第一節的參數估計中詳加敘述。

零息債券的公式計算過程，可分為兩個步驟，第一，利用（3.3）式，並根據常態分配的相加性特質，可得$r(t) \sim \mathrm{Normal}\left(\mathrm{E}_t^{Q}[r(q)], \mathrm{Var}_t^{Q}[r(q)]\right)$，其中$\mathrm{E}_t^{Q}[r(q)]$與$\mathrm{Var}_t^{Q}[r(q)]$的計算如下：

$$\mathrm{E}_t^{Q}[r(q)] = \mathrm{E}_t^{Q}\left[r(t)e^{-\kappa(q-t)} + \kappa\int_t^q \theta(u)e^{-\kappa(q-u)}du + \sigma\int_t^q e^{-\kappa(q-u)}dW^{Q}(u)\right]$$

$$= r(t)e^{-\kappa(q-t)} + \kappa\int_t^q \theta(u)e^{-\kappa(q-u)}du \qquad (3.4)$$

$$\mathrm{Var}_t^{Q}[r(q)] = \mathrm{Var}_t^{Q}\left[r(t)e^{-\kappa(q-t)} + \kappa\int_t^q \theta(u)e^{-\kappa(q-u)}du + \sigma\int_t^q e^{-\kappa(q-u)}dW^{Q}(u)\right]$$

$$= \mathrm{Var}_t^{Q}\left[\sigma\int_t^q e^{-\kappa(q-u)}dW^{Q}(u)\right] = \sigma^2\int_t^q e^{-2\kappa(q-u)}du$$

$$= \frac{\sigma^2\left[1-e^{-2\kappa(q-t)}\right]}{2\kappa} \qquad (3.5)$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第二，依據常態分配的動差母函數（即為$E(e^{tx}) = e^{tE(x)+\frac{1}{2}Var(x)t^2}$）以及 Fubini's Theorem，再將（3.4）、（3.5）計算結果帶入，便可得初步的零息債券公式。其中$B(t,T) = \left[1 - e^{-\kappa(T-t)}\right]/\kappa$。

$$P(t,T) = \mathrm{E}_t^Q\left\{\exp\left[-\int_t^T r(q)dq\right]\right\}$$

$$= \exp\left[\mathrm{E}_t^Q\left(-\int_t^T r(q)dq\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_t^Q\left(-\int_t^T r(q)dq\right)\right] := \exp\left[a + \frac{1}{2}b\right]$$

$$a = \mathrm{E}_t^Q\left[-\int_t^T r(q)dq\right] = -\int_t^T\left[\mathrm{E}_t^Q[r(q)]\right]dq$$

$$= -\int_t^T\left[r(t)e^{-\kappa(q-t)} + \kappa\int_t^q \theta(u)e^{-\kappa(q-u)}du\right]dq$$

$$= -r(t)B(t,T) - \kappa\int_t^T \theta(u)B(u,T)du$$

$$b = \mathrm{Var}_t^Q\left[-\int_t^T r(q)dq\right] = \mathrm{Var}_t^Q\left[\int_t^T \sigma\int_t^q e^{-\kappa(q-u)}dW^Q(u)\,dq\right]$$

$$= \sigma^2\mathrm{Var}_t^Q\left[\int_t^T \frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}dW^Q(u)\right] = \sigma^2\int_t^T\left(\frac{1-e^{-\kappa(T-u)}}{\kappa}\right)^2 du$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left[2(T-t) - 2B(t,T) - \kappa B(t,T)^2\right]$$

$$\therefore P(t,T) = \mathrm{E}_t^Q\left\{\exp\left[-\int_t^T r(q)dq\right]\right\}$$

$$= \exp\left[-r(t)B(t,T) - \kappa\int_t^T \theta(u)B(u,T)du + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}\left[2(T-t) - 2B(t,T) - \kappa B(t,T)^2\right]\right] \quad (3.6)$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

（3.6）式即為初步計算所得的零息債券公式，下一步將利用瞬間遠期利率與零息債券的關係式，將長期平均水準$\theta(t)$替換掉，得最後的零息債券評價公式。

$$f(0,t) = -\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} = r(0)e^{-\kappa t} + \kappa \int_0^t \theta(u)e^{-\kappa(t-u)}du - \frac{\sigma^2}{2}B(0,t)^2$$

$$\theta(t) = f(0,t) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2[1-e^{-2\kappa t}]}{2\kappa^2}$$

$$\therefore P(t,T) = \mathrm{E}_t^Q\left\{\exp\left[-\int_t^T r(q)dq\right]\right\} = \exp[A(t,T) - r(t)B(t,T)]$$

其中

$$A(t,T) = \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + f(0,t)B(t,T) - \frac{\sigma^2[1-e^{-2\kappa t}]}{4\kappa}B(t,T)^2$$

在零息債券的推導過程中，獲得長期平均水準$\theta(t)$與瞬間遠期利率的關係式，而又知道瞬間遠期利率與即期利率曲線的關係式如下：

$$f(0,t) = r(t) + t\frac{\partial r(t)}{\partial t} \qquad (3.7)$$

由於市場僅公布有限個到期期限的即期利率資訊，因此，無法滿足（3.7）式微分之需求，且為了避免所得之遠期利率曲線有不平滑的現象，以及產生不合理的數值，所以不採取有限差分法做近似的方式，而直接假設即期利率曲線服從一組二次多項式，如（3.8）式，使得瞬間遠期利率與長期平均水準皆可獲得近似值，計算與所得之結果分別呈現在（3.9）與（3.10）式中。

$$R^M(0,t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \qquad (3.8)$$

$$f^M(0,t_i) = R^M(0,t_i) + t_i\frac{\partial R^M(0,t)}{\partial t}\bigg|_{t=t_i} \approx \beta_0 + 2\beta_1 t_i + 3\beta_2 t_i^2 \qquad (3.9)$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

$$\theta(t_i) = f^M(0,t_i) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t}\bigg|_{t=t_i} + \frac{\sigma^2\left[1-e^{-2\kappa t_i}\right]}{2\kappa^2}$$

$$\approx \beta_0 + \frac{2\beta_1}{\kappa} + 2\left(\beta_1 + \frac{3\beta_2}{\kappa}\right)t_i + 3\beta_2 t_i^2 + \frac{\sigma^2\left[1-e^{-2\kappa t_i}\right]}{2\kappa^2} \qquad (3.10)$$

二、違約強度

常見的信用風險模型可分成兩大類，包括結構式模型（Structural-Form Model）與縮減式模型（Reduced-Form Model）。由於後者，不受公司債務結構的影響，因此，採用縮減式違約模型進行公司違約機率的表示。模型在給定$\mathcal{F}(t)$的資訊集合下，假設公司的違約強度為固定常數λ，即為信用利差，其中，τ為零息可贖回債券第一次違約時點，以離散的形態呈現，於期間$(t,T]$的條件違約機率表示為：

$$Q_t(t < \tau \leq T) = 1_{\{\tau > t\}} \cdot \left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right) \qquad (3.11)$$

第二節　最小平方蒙地卡羅法

由於零息可贖回債券可拆解成一般債券與百慕達選擇權的組合，為了解決提前履約等特殊的商品條件，因此，參考Longstaff and Schwartz (2001)所提出的最小平方蒙地卡羅法(Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method)與陳子謙、黎致平（2017）所提出的評價方法。如何應用在附有贖回條件的零息債券的評價上，接下來將拆解成六個步驟做詳細的說明。

〔步驟一〕

與Boyle（1977）所提出的蒙地卡羅法（Monte Carlo Simulation）的起初步

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

驟相同，將欲估算的未來商品期間的觀察因子的路徑模擬出來。因此，此步驟將在國外風險中立測度下，模擬國外利率走勢，即為商品計價幣別的該國利率走勢。將（3.1）式以離散的方式表示，公式如下：

$$r(t+\Delta) = r(t) + \kappa[\theta(t) - r(t)]\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon_m(t)$$

其中，$m = 1,2,\cdots,M$；M為路經模擬數；Δ為個別路徑的模擬間距，單位為年；$\varepsilon(t)$為標準常態分配中的隨機亂數。

〔步驟二〕

最小平方蒙地卡羅法(Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method)為反向歸納法（Backward Induction），因此，此處需先定義商品到期時的價值，即為可贖回零息債券的期末價值，等同於發行人在到期時點須償還債券買方的本利和，計算公式如下：

$$V_m(T) = F_0(1+IR)^T$$

其中，$m = 1,2,\cdots,M$；T為商品到期時點，單位為年；F_0為本金；IR為債券的隱含利率。

〔步驟三〕

依據贖回契約載明的贖回條款，當贖回時點為τ_c時，該時點的贖回價格計算方式如下。一般情況下，在遇商品贖回時間時，當債券持有價值高於該時點的贖回價格$C(\tau_c)$，對於發行商來說，贖回再重新發行新的債券，可降低融資成本。

$$C(\tau_c) = F_0 \cdot (1+IR)^{\tau_c}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

〔步驟四〕

而前一步驟所提及的債券持有價格，將利用反向歸納法（Backward Induction）由時點$t+\Delta$往前推得債券該時點t的價值，所以，將先計算出零息可贖回債券在$t+\Delta$時的期望價值，當中將考量商品的違約風險，因此，期望值的計算為未違約的機率乘以下一期的債券持有價值$V_m(t+\Delta)$，加上違約的機率乘以違約時契約約定的投資人可回收金額δF_0，最後將期望價值再乘以折現因子，便可得第m條路徑債券t時點的持有價值計算式：

$$V_m(t)=e^{-r_m(t)\Delta}\left[e^{-\lambda\Delta}V_m(t+\Delta)+\left(1-e^{-\lambda\Delta}\right)\delta F_0\right]$$

其中，λ為本章第一節第二部份所假設的公司的違約強度，δ為商品契約約定違約時所償還的本金占比。

〔步驟五〕

繼步驟四，當時點t為商品的可贖回時點時，再計算出M條路徑t時點債券持有價值時，將持有價格大於贖回價格的路徑取出，並假設為$\{h_1(t),\cdots,h_K(t)\}$，其中$0<K\leq M$，並利用線性迴歸模型計算債券的期望價值，公式如下，其中，為了避免$h_k(t)$為負，將其取對數再與短利進行線性迴歸。

$$h_k(t)=\exp(\alpha_0+\alpha_1 r_k(t)+\alpha_2 r_k^2(t)+z_k),\quad z_k\overset{IID}{\sim}\mathrm{N}(0,1),$$

利用最小平方法估計出參數α_0、α_1與α_2，並利用估計出的參數，重新計算得債券期望價值$h_k^\star(t)$，再與該時點的贖回價格做比較，當期望價值大於贖回價格，該路徑該時點的債券價值由贖回價格代替之；反之，則由期望價值代替之。替代方式可寫作：

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

$$V_k(t) = C(t)1_{\{h_k^\star(t)>C(t)\}} + h_k^\star(t)1_{\{h_k^\star(t)\le C(t)\}}.$$

〔步驟六〕

從商品到期時間 T依序回推至商品評價時點，把所模擬的M條路徑的債券價格取平均，即為參考最小平方蒙地卡羅法(Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method)所估算的債券價格。公式如下：

$$V(0) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} e^{-r_m(0)\Delta}\left[e^{-\lambda\Delta}V_m(\Delta) + \left(1 - e^{-\lambda\Delta}\right)\delta F_0\right]$$

第三節　三元樹

此方法參考最先提出二元樹模型（Binomial Model）的論文 Cox, Ross and Rubinstein（1979），以及Hull and White（1994a）所提出的短利在Hull and White（1990）model下的單因子的三元樹建置方法，在這節將拆解成步驟一與二作說明，而最後的步驟三，則是將建置出的利率三元樹替代前一節所介紹的最小平方蒙地卡羅法六個步驟中的第一步驟，後續將模仿Longstaff and Schwartz (2001)所提出的最小平方蒙地卡羅法(Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method)中的反向歸納法，而不同之處在於對零息可贖回債券的可贖回商品條件之調整規則有所修改，在步驟三會有詳細的說明。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

〔步驟一〕三元樹建置

首先，先將國外風險中立測度下，國外短期利率服從Hull and White (1990) model，即為（3.1）式，但此處將其定義為（3.12）式，即為$\mu(t) := \kappa\theta(t)$。

$$dr^*(t) = [\mu(t) - \kappa r^*(t)]dt + \sigma dW^Q(t) \qquad (3.12)$$

而此步驟，假設$\mu(t) = 0$的情況下所建置而成的短利三元樹，因此，此三元樹的起點為 0，接下來，將對此方法所需使用到的符號進行說明。短利所展開的三元樹，每個節點將表示為(i,j)，其中i為第幾層展開間隔$\Delta\mathrm{t}$，j為往上或往下幾倍的$\Delta\mathrm{r}$，即為對於節點(i,j)來說，是站在$\mathrm{t} = \mathrm{i}\Delta\mathrm{t}$，且$\mathrm{r} = \mathrm{j}\Delta\mathrm{r}$，而就數值方法上的理論建議，為了將錯誤率降到最低，取$\Delta\mathrm{r} = \sigma\sqrt{3\Delta\mathrm{t}}$。

為了避免所展開的利率，因為模擬的期數過大，導致所展開的利率在實際情況下不容易出現，因而有j的上下界設定，使得從樹中某節點發散到下一期的三個節點之機率，會因觸碰到上界或下界，有不同的機率計算公式，以下將分為三個情況，且分別說明其機率的計算公式推導。

在一般情況下，即為j未觸及上界或下界，節點(i,j)在下一期的變化，將會有三種$(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}+1)$、$(\mathrm{i}+1,\mathrm{j})$、$(\mathrm{i}+1,\mathrm{j}-1)$，若單觀察j的變化，便是往上加一個$\Delta\mathrm{r}$、持平與往下減一個$\Delta\mathrm{r}$。而從節點$(\mathrm{i},\mathrm{j})$變化為各點的機率，分別以$p_u$、$p_m$、$p_d$表示，將運用利率下一期變化的情況的期望值、變異數與所變化的所有情況之機率總合為 1 這三個條件，計算出p_u、p_m、p_d的公式，如下：

$$\begin{cases} E(\Delta r^*) = -\kappa r^*\Delta t \\ VAR(\Delta r^*) = \sigma^2\Delta t = E\left(\Delta r^{*2}\right) - (E(\Delta r^*))^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_u\Delta r + p_m \times 0 + p_d(-\Delta r) = -\kappa r\Delta t = -\kappa \mathrm{j}\Delta\mathrm{r}\Delta t \\ p_u\Delta r^2 + p_m \times 0^2 + p_d(-\Delta r)^2 = \sigma^2\Delta t + \kappa^2 j^2\Delta\mathrm{r}^2\Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

$$\rightarrow \begin{cases} p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 - \kappa j \Delta t) \\ p_m = \frac{2}{3} - \kappa^2 j^2 \Delta t^2 \\ p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 + \kappa j \Delta t) \end{cases}$$

在第二種情況，即為j觸及下界，節點(i, j)在下一期的變化，將會有三種$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}+2)$、$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}+1)$、$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j})$，若單觀察j的變化，便是往上加兩個$\Delta\mathrm{r}$、往上加一個$\Delta\mathrm{r}$與持平。而從節點(i, j)變化為各點的機率，同樣分別以p_u、p_m、p_d表示，將同樣運用利率下一期變化的情況的期望值、變異數與所變化的所有情況之機率總合為1這三個條件，計算出p_u、p_m、p_d的公式，如下：

$$\begin{cases} E(\Delta r^*) = -\kappa r^* \Delta t \\ VAR(\Delta r^*) = \sigma^2 \Delta t = E\left(\Delta r^{*2}\right) - (E(\Delta r^*))^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_u 2\Delta r + p_m \Delta r + p_d \times 0 = -\kappa r \Delta t = -\kappa \mathrm{j} \Delta \mathrm{r} \Delta t \\ p_u (2\Delta r)^2 + p_m \Delta r^2 + p_d \times 0^2 = \sigma^2 \Delta t + \kappa^2 j^2 \Delta \mathrm{r}^2 \Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 + \kappa j \Delta t) \\ p_m = -\frac{1}{3} - \kappa^2 j^2 \Delta t^2 - 2\kappa j \Delta t \\ p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 + 3\kappa j \Delta t) \end{cases}$$

在第三種情況，即為j觸及上界，節點(i, j)在下一期的變化，將會有三種$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j})$、$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}-1)$、$(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}-2)$，若單觀察j的變化，便是持平、往下減一個$\Delta\mathrm{r}$、往下減兩個$\Delta\mathrm{r}$。而從節點(i, j)變化為各點的機率，同樣分別以p_u、p_m、p_d表示，將同樣運用利率下一期變化的情況的期望值、變異數與所變化的所有情況之機率總合為1這三個條件，計算出p_u、p_m、p_d的公式，如下：

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

$$\begin{cases} E(\Delta r^*) = -\kappa r^* \Delta t \\ VAR(\Delta r^*) = \sigma^2 \Delta t = E\left(\Delta r^{*2}\right) - (E(\Delta r^*))^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_u \times 0 + p_m(-\Delta r) + p_d(-2\Delta r) = -\kappa r \Delta t = -\kappa \mathrm{j} \Delta \mathrm{r} \Delta t \\ p_u \times 0^2 + p_m(-\Delta r)^2 + p_d(-2\Delta r)^2 = \sigma^2 \Delta t + \kappa^2 j^2 \Delta \mathrm{r}^2 \Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 - 3\kappa j \Delta t) \\ p_m = -\frac{1}{3} - \kappa^2 j^2 \Delta t^2 + 2\kappa j \Delta t \\ p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(\kappa^2 j^2 \Delta t^2 - \kappa j \Delta t) \end{cases}$$

至於，j的上下界取法，必須使得前述的第三種情況與第二種情況的p_u、p_m、p_d皆大於或等於0，因此，經過計算，j的上界j_{MAX}需界於$(0.814/\kappa\Delta t)$與$(0.816/\kappa\Delta t)$之間，而j的下界j_{MIN}需界於$(-0.816/\kappa\Delta t)$與$(-0.814/\kappa\Delta t)$之間，就實務上，可表示為j_{MAX}為比$(0.814/\kappa\Delta t)$大的整數中取最小值，而直接取$j_{MIN} = -j_{MAX}$作為實證之使用。

〔步驟二〕利用市場資訊對三元樹做調整

此步驟將使用市場利率的資料來對步驟一所作的$\mu(t) = 0$的假設進一步調整，使得所建置的三元樹更貼近實際狀況。接下來，將以節點(0,0)作為說明的出發點，節點(0,0)所展開的三元樹為節點(1,1)、節點(1,0)與節點$(1,-1)$，而從節點(0,0)所變化至節點(1,1)、節點(1,0)與節點$(1,-1)$的機率分別是p_u、p_m、p_d。因此，將商品評價時點$2\Delta t$的利率取出，計算其零息債券價格，另外，假設節點(1,0)的利率為α_1，使得節點(1,1)的利率調整為$\alpha_1 + \Delta r$、節點$(1,-1)$的利率調整為$\alpha_1 - \Delta r$，且α_0評價時點Δt的利率，因此，在節點(1,1)、節點(1,0)與節點$(1,-1)$時獲得1元的狀況下，利用三元樹中的利率折現，其價格會與先前計算的零息債

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

券價格相同，如下：

$$P(0,2)=e^{-\alpha_0\Delta t}\left(p_u e^{-(\alpha_1+\Delta r)\Delta t}+p_m e^{-\alpha_1\Delta t}+p_d e^{-(\alpha_1-\Delta r)\Delta t}\right)$$

透過上式的計算，便可得α_1，以此類推，可計算出α_i，$1\le i\le \mathrm{T}$，而獲得最終調整後的三元樹。

〔步驟三〕解決債券的贖回條件

已建置完成國外利率三元樹，接下來，同樣參考Longstaff and Schwartz (2001)所提出的最小平方蒙地卡羅法(Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method)，因此，對於反向歸納法（Backward Induction）與贖回時點該贖回與否之比較價值的需求，重複執行第二節的步驟二與三的動作，接下來，時點t的債券價值計算如下：

$$V(t)=e^{-r(t)\Delta t}\left[e^{-\lambda\Delta t}\left(p_u V_u(t+\Delta t)+p_m V_m(t+\Delta t)+p_d V_d(t+\Delta t)\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-e^{-\lambda\Delta t}\right)\delta F_0\right]$$

表示為時點t的某節點其持有價值為某節點在時間演變到$t+\Delta t$時的期望價值，再乘以折現因子，即為該節點的持有價格。其中，同樣將債券的違約機率考量進去，另外，p_u、p_m、p_d分別為該節點在位移Δt後，變化的三種情況之機率，而$V_u(t+\Delta t)$、$V_m(t+\Delta t)$、$V_d(t+\Delta t)$則為其個別的債券持有價格。

在重新定義債券的持有價格計算方式後，將類似第二節的步驟五，對零息可贖回債券觸碰到商品契約載名的可贖回時間點的價格調整，但此處將僅進行一次的贖回與否的確認，若持有價格大於贖回價格，將以贖回價格替代該節點的價格；若持有價格小於贖回價格，則不對債券價格作任何調整。最後，依次由商品到期時點回推到評價時點，即為利用三元樹所模擬出來的零息可贖回債券價格。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第四章　實證分析

此章節將利用第三章第一節的模型假設、第三章第二節與第三節的評價方法，針對目前市場仍存續的零息可贖回債券進行實證研究。在此章節的第一節中，將說明如何針對第三章第一節第一部分的國外利率Hull and White（1990）model中的復歸速度κ與短利的瞬間波動度σ，進行估計；而第二節，則是對將用來實證呈現的商品規格與資料作說明；最後，在第三節、第四節中，對最小平方蒙地卡羅法，以及Hull and White（1990）model下的三元樹，個別進行評價結果呈現、敏感度分析，以及進一步的評價結果之比較。

第一節　參數估計

在第三章第二節的最小平方蒙地卡羅法與第三章第三節的 Hull and White（1990）model 下的三元樹中，最一開始的利率模擬，皆需使用到國外利率 Hull and White（1990）model 中的復歸速度 κ 與短利的瞬間波動度σ，此處採用時間序列的方法進行估計，此處的參數估計方法為參考陳子謙、黎致平（2017）之內容，首先，將（3.1）式視為自我迴歸模型（Autoregressive Model），而用來估計參數的利率資料，採用 3 個月期的即期利率做為短利的代理變數，此處，並未使用 1 個月期的即期利率，原因為 1 個月期的即期利率剛好是即期利率曲線的端點，穩定性較差，較具有爭議。

因此，將（3.1）式寫作（4.1）式，將其寫成矩陣表示方式的線性方程組形式，如（4.2）式，便可利用最小平方法$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$的公式解，估計出參數μ、κ，如（4.3）與（4.4）式，如此，便可進一步利用殘差項
$z^{\star}(t) = r(t+\Delta) - \mu^{\star}\Delta - (1-\kappa^{\star}\Delta) r(t)$估計出參數σ，如（4.5）式。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

$$r(t+\Delta)=\mu\Delta+(1-\kappa\Delta)r(t)+z(t),\quad z(t)\sim\text{Normal}(0,\sigma^2\Delta) \qquad (4.1)$$

$$Y:=\begin{bmatrix} r(t_2)\\ r(t_3)\\ \vdots\\ r(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & r(t_1)\\ 1 & r(t_2)\\ \vdots & \vdots\\ 1 & r(T-\Delta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\Delta\\ 1-\kappa\Delta\end{bmatrix}:=X\beta, where\ i=1,2,\dots,T_0\ 、T_0=\frac{T}{\Delta}$$

$$(4.2)$$

$$\mu^\star=\frac{\sum_{i=2}^{T_0}r(t_i)\sum_{i=2}^{T_0}r^2(t_{i-1})-\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})r(t_i)}{(T_0-1)\sum_{i=2}^{T_0}r^2(t_{i-1})-\left[\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})\right]^2}\frac{1}{\Delta} \qquad (4.3)$$

$$\kappa^\star=\left[1-\frac{(T_0-1)\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})r(t_i)-\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})\sum_{i=2}^{T_0}r(t_i)}{(T_0-1)\sum_{i=2}^{T_0}r^2(t_{i-1})-\left[\sum_{i=2}^{T_0}r(t_{i-1})\right]^2}\right]\frac{1}{\Delta} \qquad (4.4)$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{\frac{1}{T_0-3}\sum_{i=2}^{T_0}[r(t_{i+1})-\mu^\star\Delta-(1-\kappa^\star\Delta)r(t_i)]^2} \qquad (4.5)$$

第二節　資料說明

商品資料選用目前仍存續的附有可贖回條件的國際債券，商品規格如下：國際編碼為XS1296749549；國內債券代號為F02417；發行人為Deutsche Bank AG [Singapore]；發行人信用評價為BBB+ (S&P)，利用本金為百元價回推，得信用利差1.78%；發行日為2015/10/07；到期日為2045/10/07；商品期間30年；計價幣別為美元；票面利率為0%；隱含利率為5.23%；贖回價格利用本金與隱含利率計算，而贖回時點自發行屆滿第五年起每週年；發生違約時可拿回60%本金。

除了商品資訊外，還使用U.S. Department of the Treasury所公布的利用quasi-cubic hermite spline function計算的美國公債票面利率，並自行利用Matlab內建程式轉換為公債殖利率。選取每月月底的資料，選取期間為2009/01-2018/05。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第三節　實證結果與敏感度分析

一、 最小平方蒙地卡羅法

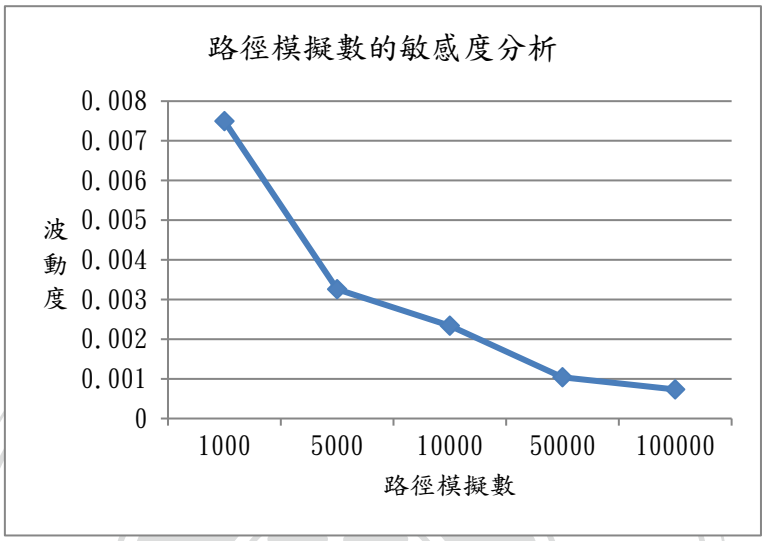

圖 4-1：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之路徑模擬數的敏感度分析

透過圖4-1，將2016/10設為零息可贖回債券的評價日，並運用最小平方蒙地卡羅法估算出不同模擬路徑次數的價格，分別估算了路徑數為1000、5000、10000、50000、100000，其價格的標準差變化，可從圖中清楚觀察到波動度有明顯下降的趨勢，標準差分別為0.0075、0.0033、0.0023、0.0010、0.00073，因此，本篇論文選定路徑模擬數100000作為最小平方蒙地卡羅法之使用。此處未將模擬路徑數再往上提升，原因為波動度0.00073已經足夠低，而接下來將用表4-1的最小平方蒙地卡羅法之實證結果，評估100000次模擬樹是否使評價結果穩定。

表 4-1：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10-2018/04 的實證結果

settle_date	κ	σ	price	SD	clean_price
2016/10/31	1.2877	0.0015	119.5729	0.0007	114.3429
2016/11/30	0.7097	0.0016	118.7128	0.0012	113.0348
2016/12/30	0.3431	0.0016	119.0619	0.0017	112.9340

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

2017/1/31	0.1666	0.0016	119.3853	0.0020	112.8056
2017/2/28	0.0571	0.0016	120.3826	0.0023	113.3491
2017/3/31	1E-10	0.0018	119.0117	0.0074	111.5226
2017/4/28	1E-10	0.0018	119.8186	0.0063	111.8719
2017/5/31	1E-10	0.0019	119.3274	0.0081	110.9211
2017/6/30	1E-10	0.0019	119.9395	0.0053	111.0717
2017/7/31	1E-10	0.0019	119.1910	0.0083	109.8598
2017/8/31	1E-10	0.0019	120.1134	0.0060	110.3167
2017/9/29	1E-10	0.0019	120.2634	0.0055	109.9993
2017/10/31	1E-10	0.0019	120.5421	0.0048	109.8086
2017/11/30	1E-10	0.0019	120.4913	0.0040	109.2863
2017/12/29	1E-10	0.0020	120.4647	0.0034	108.7863
2018/1/31	1E-10	0.0020	120.0997	0.0039	107.9459
2018/2/28	1E-10	0.0021	119.9754	0.0059	107.3441
2018/3/29	1E-10	0.0021	120.0796	0.0051	106.9688
2018/4/30	1E-10	0.0021	120.3202	0.0047	106.7279

表4-1為利用最小平方蒙地卡羅法，分別在評價日2016/10-2018/04的實證結果，對於評價日2016/10的參數估計所使用的美國公債票面利率資料區間為2009/01-2016/10，接下來的評價日的參數估計所使用的資料區間以位移方式移動，表示此論文的參數估計的資料統一為評價日往前推94個月的資料作為估計材料。估計結果如表4-1的第二與第三行，其中，由於κ不得為負值，因此在利用最小平方法估計μ、κ時，有對κ作範圍上的限制，控制介於0到∞，但三元樹中分支上限j_{MAX}公式有κ不得為0的限制，所以將κ的限制範圍修正為$[10^{-10},\infty)$。

此外，從表4-1也觀察到，零息可贖回債券從評價日2016/10至2017/02，依照本章第一節所說明的參數估計方法估算結果，隨著評價日的移動，所估算出來的均數復歸κ的變化幅度似乎有點快，從2016/10的1.28一路下降到2017/02的0.05。其中，用來估算參數的資料變化，隨著評價日的位移，資料僅減少最舊的一筆月份的利率資料，且增加一筆最新的月份的利率資料，為了就此現象有進一步的了解，圖4-2繪製出短利的代理利率3個月期的利率的時間序列，圖中的紅點為評價

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

日2016/10參數估計所取用的資料區間的最終筆資料，所以可以觀察到，在紅點後的時點的利率有逐漸上升且偏離長期利率的走勢，因此，認為所估算的均數復歸κ有明顯的變化，主要為此原因所致。

圖 4-2：三個月期的公債殖利率於 2009/01-2018/04 的月資料折線圖

而表4-1中的第四到六行，分別為該評價日的可贖回債券的含息價格、標準差以及淨價格，此處是路徑模擬數為100000的實證結果。所模擬出的含息價格，在2016/10-2018/04 19個月的時間中，其波動度約0.57美元，而在各個評價日在100000條模擬路徑所估算的債券價格，可以觀察到其標準誤最高是在評價日2017/07時，但也僅0.0083美元，表示100000的路徑模擬數是足夠的，最後，可以觀察到債券的淨價格與含息價格的差有逐漸上升的趨勢，與實際狀況符合，當評價日距發行日越遠，隱含應計利息越高。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

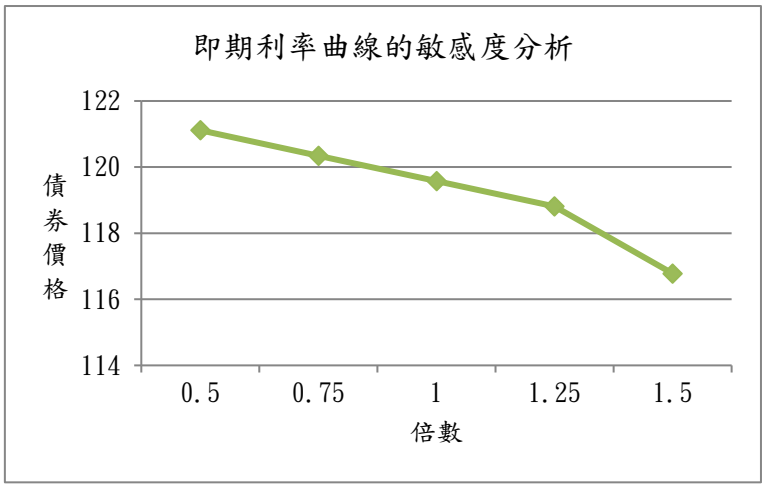

圖 4-3：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之即期利率曲線的敏感度分析

圖4-3，對利用市場資料所修正的即期利率曲線，作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，當即期利率曲線平行向上拉高，從圖中可明顯地觀察到零息可贖回債券價格有明顯下降的趨勢，最大的差距有近4美元。

直覺上來說，當即期利率曲線被平行上移時，債券的持有價格應下降，使得贖回的機率降低，導致債券的價格隨之升高，但圖4-3所呈現的結果不然，因為除了上述對於零息可贖回債券產生價格的拉升之動力外，還有，當即期利率曲線被平行上移時，促使零息可贖回債券下降之動力，而雙方之拉推，依圖4-3的結果，所分析的情況為後者之拉力較高，使得債券價格呈現下降的走勢。

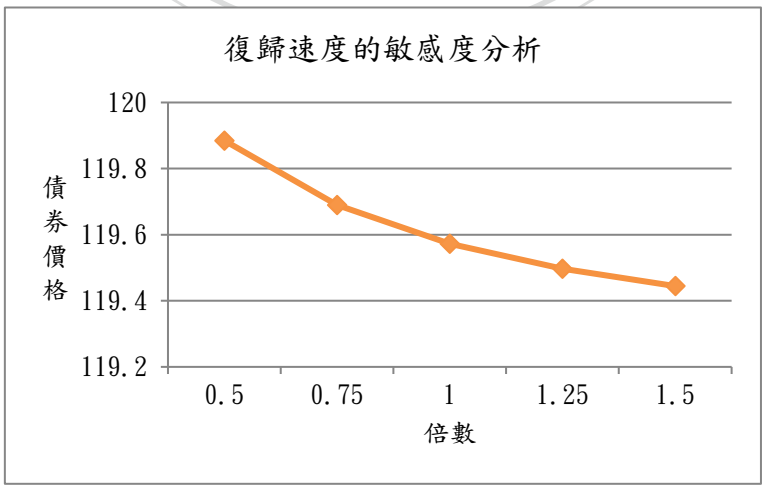

圖4-4：最小平方蒙地卡羅法評價日2016/10之復歸速度的敏感度分析

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

圖4-4，對復歸速度作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，而隨著復歸速度κ越大，債券價格越低。此圖形所呈現之結果，與一般的直覺有所差異，當復歸速度上升時，依照第三章第一節的模型假設，國外利率服從Hull and White（1990）model，因此，復歸速度越強其短利的變化越小，使得贖回機率下降，而促使零息可贖回債券價格上升。但除了上述所提及之影響債券價格的原因外，復歸速度的上升，也會讓短利有所上升，同樣依照國外利率服從Hull and White（1990）model的公式所推論的結果。

由於目前分析的結果，對於零息可贖回債券的價格變化有兩個主要的動力，因此，便回頭確認所分析之債券F02417且以評價日2016/10之模擬情況與細節，發現就此分析內容，前者，復歸速度的增強，對於贖回機率的影響不大，使得價格並未推升；而後者，利率的確因復歸速度的增加而上升，促使價格下降，綜合影響下，得到如圖4-4的走勢結果。

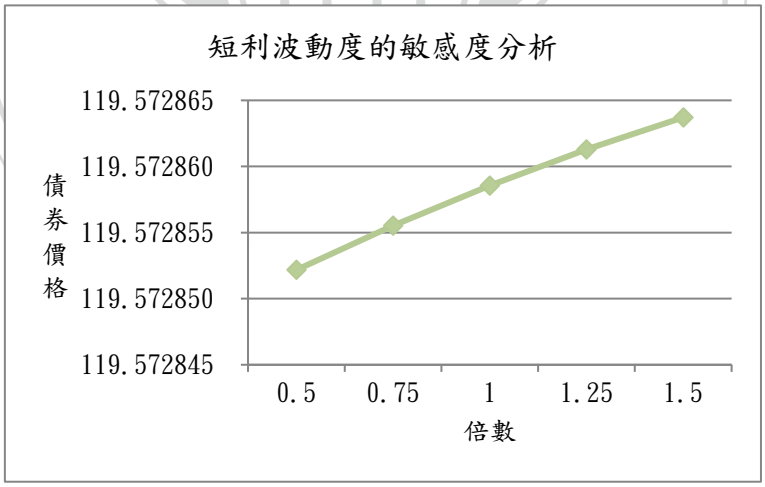

圖 4-5：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之波動度的敏感度分析

圖4-5，同樣對短利波動度作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的處理，可從圖中觀察到，隨著短利波動度σ的增加，可贖回債券價格隨之上升，但其價格變化幅度小於0.0001，表示短利的波動度對於債券價格的敏感度不大。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

導致圖4-5所呈現之結果，當短利的波動度增加，會使得贖回機率上升，導致零息可贖回債券價格下降，但就本篇論文敏感度分析所分析的對象與評價時點，波動度的提升並未對贖回機率有明顯的影響，使得此一影響性下降，與圖4-5所繪製的走勢一致。

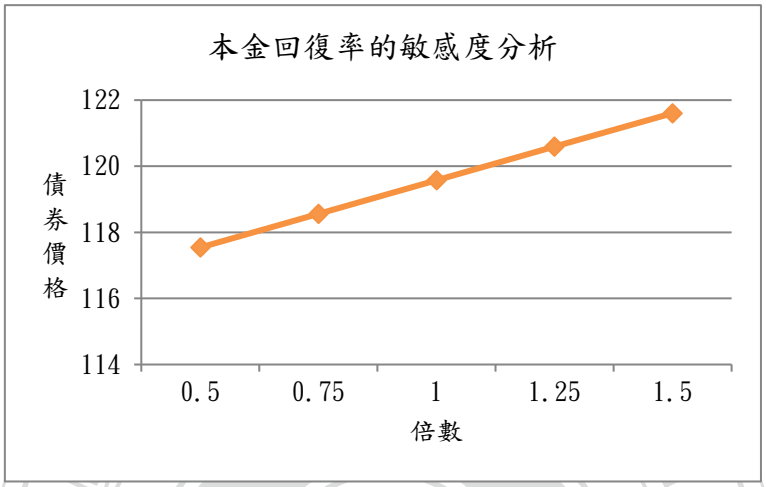

圖 4-6：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之本金回復率的敏感度分析

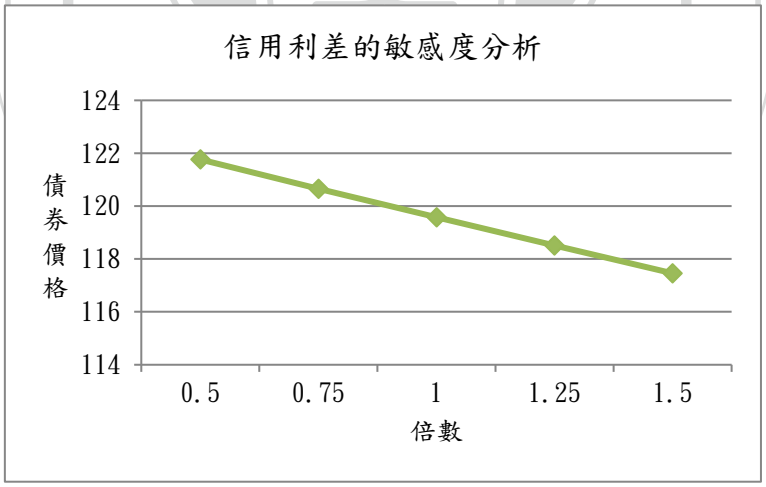

圖 4-7：最小平方蒙地卡羅法評價日 2016/10 之信用利差的敏感度分析

同樣對本金回復率與信用利差，作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整。從圖4-6可觀察到零息可贖回債券價格呈現直線上升的狀態，當違約發生時投資人仍可收回之本金比率越高，即為違約發生時損失降低，將使得債券價格提高。而圖4-7可清楚看到債券價格隨著信用利差的增加而下降，由於，信用利差

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

的上升，表示該債券的違約機率提高，其商品價格當然隨之下降。

二、 三元樹

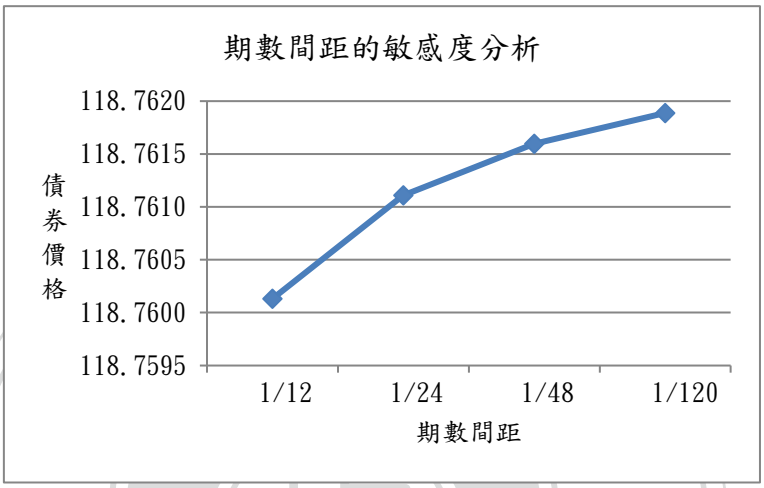

圖 4-8：三元樹評價日 2016/10 之期數間距的敏感度分析

透過圖4-8，將2016/10設為零息可贖回債券的評價日，並運用三元樹估算出不同期數間距的價格，分別估算了間距為一個月、兩周、一周以及三天，可從圖中清楚觀察到債券價格有明顯上升的趨勢，隨著間距的縮短，使得所估算的零息可贖回債券價格更接近前一部分運用最小平方蒙地卡羅法所估算的價格119.57美元，但由於間距為一個月與三天的債券價格差距不超過0.002美元，因此，本篇論文的三元樹的期數間隔選用一個月，即為1/12年。

表 4-2：三元樹於評價日 2016/10-2018/04 的實證結果

settle_date	κ	σ	j_{MAX}	dirty_price	clean_price
2016/10/31	1.2877	0.0015	2	118.7601	113.5301
2016/11/30	0.7097	0.0016	4	116.9358	111.2578
2016/12/30	0.3431	0.0016	7	116.8897	110.7618
2017/1/31	0.1666	0.0016	14	117.2983	110.7186

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

2017/2/28	0.0571	0.0016	39	117.5504	110.5170
2017/3/31	1E-10	0.0018	353	117.0448	109.5557
2017/4/28	1E-10	0.0018	354	117.9030	109.9563
2017/5/31	1E-10	0.0019	355	118.4698	110.0635
2017/6/30	1E-10	0.0019	356	118.4086	109.5409
2017/7/31	1E-10	0.0018	357	118.8113	109.4800
2017/8/31	1E-10	0.0019	358	119.5875	109.7908
2017/9/29	1E-10	0.0019	359	119.1061	108.8420
2017/10/31	1E-10	0.0019	360	119.0086	108.2751
2017/11/30	1E-10	0.0019	361	118.7831	107.5781
2017/12/29	1E-10	0.0020	362	118.8625	107.1841
2018/1/31	1E-10	0.0020	363	118.0515	105.8977
2018/2/28	1E-10	0.0021	364	117.4707	104.8395
2018/3/29	1E-10	0.0021	365	118.3569	105.2462
2018/4/30	1E-10	0.0021	366	117.6998	104.1074

表4-2為利用三元樹，分別在評價日2016/10-2018/04的實證結果，對於評價日2016/10的參數估計所使用的美國公債票面利率資料區間為2009/01-2016/10，依次以位移方式移動參數估計的資料區間，因此表4-2的第二與第三行的κ、σ的估計結果與表4-1相同。而第四行，利用第三章第三節所選用的三元樹分支上界計算方式，所得之實證結果其不同評價時點的j_{MAX}，在評價日於2017/03-2018/04之間，由於所估算的κ為接近零的數值，使得分支上界j_{MAX}無任何實際作用，使得分支上界即為三元樹展開期數。

表4-2中的第五與第六行,分別為各評價日的可贖回債券含息價格及淨價格。利用三元樹所模擬出的含息價格，在2016/10-2018/04 19個月的時間中，其波動度僅有0.81美元，而同樣可觀察到，當評價時點越接近商品到期日，債券的隱含應計利息越高，使得債券的淨價格與含息價格的差距逐漸遞增。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

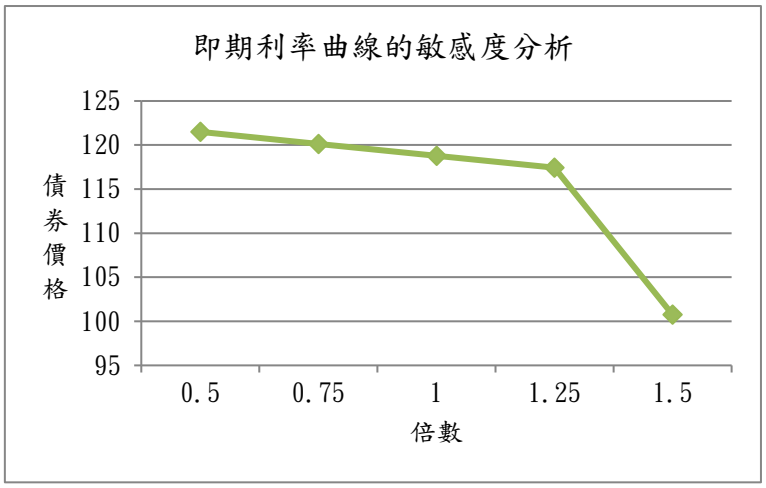

圖 4-9：三元樹評價日 2016/10 之即期利率曲線的敏感度分析

圖4-9，將利用市場資料所修正的即期利率曲線，作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，所得之曲線走勢與圖4-3相似，當即期利率曲線平行向上位移，零息可贖回債券價格便提高，而圖中最大的價差來到近20美元。

如同本篇論文最小平方蒙地卡羅法對即期利率曲線的敏感度分析之結果，其影響價格變動的原因有二，第一，即期利率曲線的推升，雖使得債券持有價格下降，有機會促使贖回機率降低，使得零息可贖回債券價格上升，但根據圖4-9所呈現的走勢，應是另一個原因對於價格之影響動力較強，所導致的結果，即為即期利率曲線的平行上移，使得零息可贖回債券價格下降。

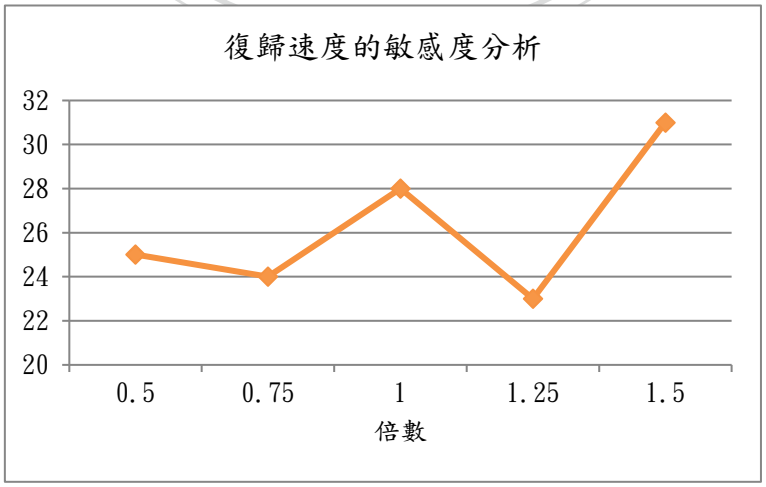

圖 4-10：三元樹評價日 2016/10 之復歸速度的敏感度分析

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

圖4-10，同樣對復歸速度作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，觀察其對債券價格的影響。可觀察到復歸速度對可贖回零息債券價格的敏感度不明顯，變化小於10^{-12}，使得價格的變化情況不易呈現，因此，圖4-10的Y軸座標為不同的倍數所計算出的債券價格之尾數差異。與最小平方蒙地卡羅法中圖4-4的敏感度分析比較，使用三元樹評價可贖回零息債券時，復歸速度κ對價格影響程度較低。

如同對圖4-4所分析的兩個影響債券價格的動力，復歸速度越強其短利的變化越小，使得贖回機率下降，而促使零息可贖回債券價格上升，在實際的模擬結果中，在復歸速度上升時，的確使得贖回機率下降，而產生債券價格上升的實際拉升效果；而另一個，依照國外利率服從Hull and White（1990）model的公式，復歸速度的上升，讓短利有所上升，在實際的模擬情況下的確也觀察到此現象，因此，促使價格有所下降，導致與圖4-4有不同之結果走勢。

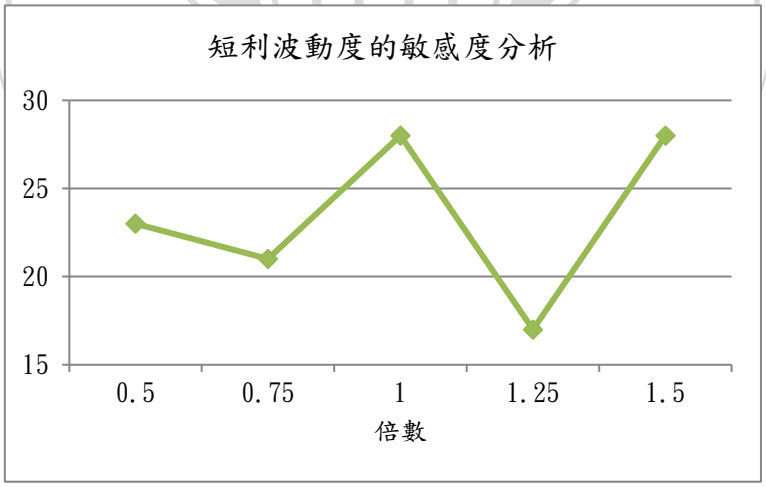

圖 4-11：三元樹評價日 2016/10 之短利波動度的敏感度分析

圖4-11，同樣對短利波動度作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，短利波動度對可贖回零息債券價格的敏感度也不明顯，變化同樣小於10^{-12}，因此， Y軸座標同樣式不同的倍數所計算出的債券價格之尾數差異，而圖4-11所呈現的結果與圖4-5相似。如圖4-5的說明與推論相同，此處便不多加贅述。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

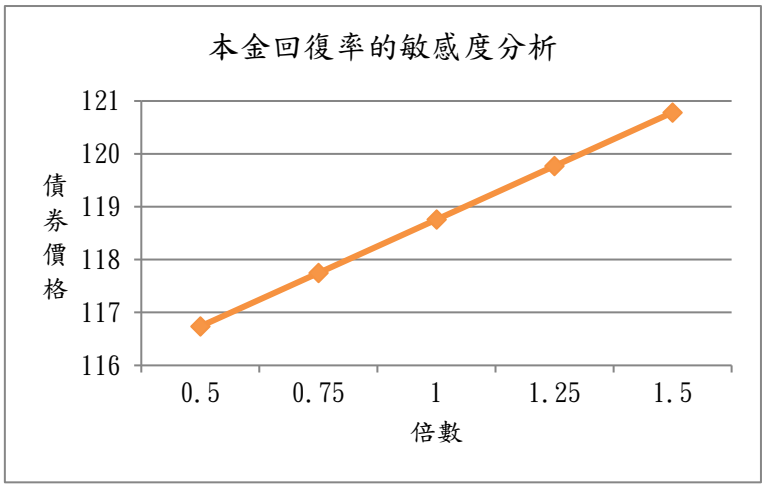

圖 4-12：三元樹評價日 2016/10 之本金回復率的敏感度分析

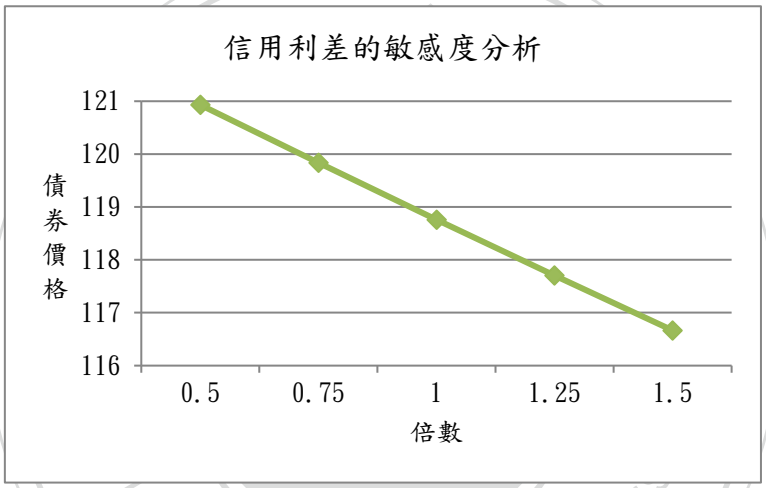

圖 4-13：三元樹評價日 2016/10 之與信用利差的敏感度分析

圖4-12、4-13，同樣對本金回復率、信用利差作0.5倍、0.75倍、1倍、1.25倍、1.5倍的調整，本金回復率與信用利差對利用三元樹作為評價方法之價格的影響性，與利用最小平方蒙地卡羅法相似。圖4-12，隨著本金回復率的上升，對於投資人當違約發生時之損失降低，當然債券價格隨之提升。圖4-13，隨著信用利差的提高，對於投資人而言發行人之違約風險增加，當然債券價格隨之下降。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第四節　實證結果比較

表 4-3：評價日 2016/10-2018/04 不同方法之債券價格比較

	最小平方蒙地卡羅法 (1)		三元樹 (2)		櫃買中心公告價格 (3)		(1)與(2)	(1)與(3)	(2)與(3)
評價日	含息價格	淨價格	含息價格	淨價格	含息價格	淨價格	含息價格之估計差	含息價格之估計差	含息價格之估計差
2016/10/31	119.57	114.34	118.76	113.53	\	\	0.81	\	\
2016/11/30	118.71	113.03	116.94	111.26	\	\	1.78	\	\
2016/12/30	119.06	112.93	116.89	110.76	\	\	2.17	\	\
2017/1/31	119.39	112.81	117.30	110.72	\	\	2.09	\	\
2017/2/28	120.38	113.35	117.55	110.52	\	\	2.83	\	\
2017/3/31	119.02	111.53	117.04	109.56	\	\	1.98	\	\
2017/4/28	119.83	111.88	117.90	109.96	\	\	1.92	\	\
2017/5/31	119.34	110.93	118.47	110.06	\	\	0.87	\	\
2017/6/30	119.95	111.08	118.41	109.54	\	\	1.54	\	\
2017/7/31	119.20	109.87	118.81	109.48	\	\	0.39	\	\
2017/8/31	120.12	110.32	119.59	109.79	\	\	0.53	\	\
2017/9/29	120.27	110.01	119.11	108.84	\	\	1.16	\	\
2017/10/31	120.55	109.81	119.01	108.28	\	\	1.54	\	\
2017/11/30	120.50	109.29	118.78	107.58	\	\	1.71	\	\
2017/12/29	**120.47**	108.79	**118.86**	107.18	**121.12**	109.09	**1.61**	**-0.65**	**-2.26**
2018/1/31	**120.10**	107.95	**118.05**	105.90	**121.32**	108.80	**2.05**	**-1.22**	**-3.27**
2018/2/28	**119.98**	107.35	**117.47**	104.84	**121.78**	108.82	**2.51**	**-1.79**	**-4.30**
2018/3/29	**120.09**	106.98	**118.36**	105.25	**122.10**	108.62	**1.73**	**-2.01**	**-3.74**
2018/4/30	**120.33**	106.73	**117.70**	104.11	**122.40**	108.43	**2.63**	**-2.07**	**-4.70**

表4-3，列出了在評價日2016/10-2018/04 19個月中，不同方法的零息可贖回債券的含息價格與淨價格，包括最小平方蒙地卡羅法、三元樹及櫃買中心所公告的理論價，由於櫃買中心於2017/12才開始有理論價的公告，因此，表4-3在評價日2016/10-2017/11中無櫃買中心所公告的該債券的含息價格與淨價格。而在表4-3中，右手邊的三個欄位中，分別為最小平方蒙地卡羅法與三元樹評價方法所估算之含息價格差、最小平方蒙地卡羅法與櫃買中心公告之含息價格差、三元樹

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

評價方法與櫃買中心公告之含息價格差。

首先，比較最小平方蒙地卡羅法與三元樹所評價的含息價格差，最大的差距於2017/02，兩者計算出的債券價格差2.83美元；而最小平方蒙地卡羅法與櫃買中心公告之含息價格差，可觀察到估計差不超過2%；而三元樹評價法與櫃買中心公告之含息價格差，其估計差不超過4%。就模型實用性與擴充性比較，使用三元樹作為評價工具，當復歸速度κ數值過小時，容易使得模型所限制的分支上限j_{MAX}對於所展開的三元樹，實質上無任何限制，導致所展開的利率樹過大，導致程式運算上需花費較長的時間作計算，且若對於債券所觀察的影響變數增為兩個以上，則需展開多個三元樹，加上變數之間的相關性調整，會是一大工程。

國立政治大學
National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

第五章　結論與未來研究

第一節　結論

可贖回零息債券的理論價格的探討，不僅能滿足此類金融商品買賣的公平價格之參考需求，此外，更能提供台灣企業，在遵循 2018 年年初正式上路的 IFRS 9 會計準則過程中，在金融資產的相關公允價格變動認列損失上，有較貼近市場之實際價格作為會計紀錄依據。

此篇論文中，主要比較的兩種評價方法，參考 Longstaff and Schwartz（2001）所提出的最小平方蒙地卡羅法（Least-Squares Monte-Carlo Pricing Method）、Cox, Ross and Rubinstein（1979）提出二元樹模型（Binomial Model）和 Hull and White（1994a）提出的 Hull and White（1990）model 下之利率三元樹展開方法，，所建置的。實證分析的部分，選定 30 年期美元計價的零息可贖回債券，國際編碼 XS1296749549，作為實證分析對象，並利用 U.S. Department of the Treasury 所公布的美國公債票面利率當作評價資料，至於國外利率 Hull and White（1990）model 中的復歸速度 κ 與短利的瞬間波動度σ的參數估計，則採用自我迴歸模型與最小平方法為估算方法，不過因為 Hull and White（1990）model 的變數設定範圍限制與三元樹的j_{MAX}的公式設定，最後將κ控制在$[10^{-10},\infty)$區間中，以利實證使用。

選定 2016/10-2018/04 每月月底作為評價日，實證結果呈現於表 4-1 與表 4-2 中，前者，是最小平方蒙地卡羅法使用路徑模擬數 100000 條所估算出的含息價格與淨價格，在這 19 個月中，所估算的價格大約落在 120 美元上下，而 100000 條路徑模擬所產生的標準差在 0.57 美元；後者，是三元樹所估算出的含息價格與淨價格，而其中所設定的j_{MAX}是為了讓三元樹的展開更貼近市場實際狀況所

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

做的分支上限限制，但實證結果顯示，在評價日 2017/03-2018/04 間，j_{MAX}的功能性並未發揮，原因為該評價日所估算的參數κ趨近 0，再將其假設為一個趨近 0 的數值後，依據公式計算，j_{MAX}結果恰巧皆超過三元樹所展開的總期數，而在 19 個月期間中，所估算的債券價格大致落在 118 美元上下。在上述兩評價方法所計算的可贖回零息債券價格，三元樹所估算的價格略低，但差距最大不超過 3 美元，即為不大於 2.5%之差。由於目前櫃買中心在 2017 年年底開始有一理論價格的公告，將兩評價法之價格與其比較，最大也不超過 4%的估計誤差。

實證結果，最小平方蒙地卡羅法、三元樹與櫃買中心所公告的理論價，在 2016/10-2018/04 每月月底對於國際編碼 XS1296749549 的 30 年期美元計價零息可贖回債券的評價，三者的評價結果差距不超過 4%。那就模型層面分析，首先，比較本論文用來評價零息可贖回債券的方法，最小平方蒙地卡羅法與三元樹，就實證結果顯示，從表 4-1 與表 4-2 皆可觀察到，在評價日 2017/03-2018/04 間，復歸速度 κ的參數估計結果趨近 0，在三元樹中，國外利率所展開的三元樹分支上限j_{MAX}，對於實證所討論的對象與設定的模擬區間來說，無任何限制功能，使得程式在三元樹的展開花費較長的時間，若欲做更進一步或嚴謹的實證，像是加入其他的商品規格，甚至是與櫃買中心的每日公告之理論價格做比較，都會有困難存在。

至於，最小平方蒙地卡羅法與櫃買中心所公告的理論價格，就了解，櫃買中心所公告的價格計算方式，同樣利用三元樹模型作為基礎，但在參數估計、違約模型中的信用利差等內容與本篇論文的三元樹評價方法是有所異的。不過如同第一章緒論所提及，發展另一種評價方法的其中一重要目的，所估算的債券理論價能讓公司應用在內部的會計報表中，而台灣的會計報表多利用台幣為貨幣單位，因此，若站在模型擴充的角度思考，當商品評價所考慮的變數除了原本所考量的國外利率外，還增設國內利率、匯率與動態的信用利差，在展開

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

多個三元樹，並同時將彼此間的相關性納入考慮，相較於使用最小平方蒙地卡羅法，在這部分只要將第三章第二節的步驟一，先利用彼此間的相關係數產生有關連性的隨機變數，在使用傳統蒙地卡羅將各變數模擬出來，便可重複步驟二至六，即可得債券的理論價格，使得在模型的延展性上稍占些許優勢。

第二節　未來研究

最後,在本篇論文未來仍可持續探討與研究的內容,包括模擬的間距設定、違約風險的動態變化與模型的延伸。目前所設定的模擬間距為 1/12 年，但在這間距所設定的合理性仍有可探討之空間；另外，便是違約風險的動態變化，由於可贖回債券多為長天期債券，加上現今的市場變化速度相較過往高，因此，違約風險若能隨著時間的變化作調整，將會使得評價結果更貼近市場；再者，便是模型的延伸的部分，如同本篇論文中的緒論、實證與結論中提及的，由於本篇論文在實證上的運算速度上的限制,因此,在評價模型上僅參考單一因子，但就實務上的需求，若將國內利率、匯率等影響因子納入參考對象，將會更加完善；最後，所提出的評價方法得之理論價格。也可進一步與其他的系統或網站做比較，像是 Bloomberg 等。

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

參考文獻

中文文獻

[1] 陳文琦（2016）。可贖回零息債券之評價與風險分析。未出版之碩士論文，東吳大學，財務工程與精算數學系，台灣台北市。

[2] 陳子謙、黎致平（2017）。以LSM評價國外可贖回零息債券（ZCB）。貨幣觀測與信用評等，第126期，第68~78頁。

[3] 蘇立人（2017）。美元零息可贖回債券在Hull-White Model下之評價模型。未出版之碩士論文，國立交通大學，財務金融研究所，台灣新竹市。

英文文獻

[1] Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein（1979）, Option Pricing：A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, 229-263.

[2] Chamber, D. R. and Q. Lu, (2007), A Tree Model for Pricing Convertible Bonds with Equity, Interest Rate, and Default Risk, *Journal of Derivatives*, Vol. 14, 25-46.

[3] Hull, J. and A. White,（1990）, Pricing Interest-Rate Derivatives Securities, *Review of Financial Studies*, Vol. 3, 573-592.

[4] Hull, J. and A. White,（1994a）, Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I：Single-Factor Models, *Journal of Derivatives*, Vol. 2, 7-15.

[5] Hull, J. and A. White,（1994b）, Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II：Two-Factor Models, *Journal of Derivatives*, Vol. 2, 37-48.

[6] Hua, D., .C. Chou, and D. Wang,（2009）, A Defaultable Callable Bond Pricing Model, *Investment Management and Financial Innovations*, Vol. 6, 54-62.

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06

[7] Jarrowa, R., H. Li , S. Liu, and C. Wu,（2006）, Reduced-Form Valuation of Callable Corporate Bonds：Theory and Evidence, Kamakura Corporation.

[8] Jiang, X,（2011）, Pricing Callable Bonds, Uppsala University.

[9] Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz,（2001）, Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, *Review of Financial Studies*, Vol. 14, 113-147.

[10] Merton, R.C.,（1974）, On The Pricing of Corporate Debt：The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, Vol. 29, 449-470.

[11] Milanov, K., O. Kounchev, F. J. Fabozzi, Y. S. Kim, and S. T. Rachev,（2013）, A Binomial-Tree Model for Convertible Bond Pricing, *Journal of Fixed Income*, Vol. 22, 79-94.

[12] Sun, Y.,（2015）, An Optimized Least Squares Monte Carlo Approach to Calculate Credit Exposures for Asian and Barrier Options, University of Waterloo.

[13] Vasicek, O.,（1977）, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 177-188.

國立政治大學 National Chengchi University

DOI:10.6814/THE.NCCU.MB.028.2018.F06