國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

關於一個秤重問題的探討

The Study About A Weighing Problem

指導教授：李陽明 博士

研究生：王昱翔　撰

中華民國 108 年 06 月 28 日

DOI:10.6814/NCCU201900333

摘　　要

本文欲探討，在已知一枚硬幣重量有誤而其他硬幣重量皆相同的情況之下，利用無砝碼天平秤 n 次，最多可以從多少枚硬幣中找到重量有誤的那一枚硬幣並且知道是較輕還是較重。第二章分別討論「已知一枚硬幣較重」、「已知一枚硬幣較輕」和「已知一枚硬幣重量有誤但不知道是較輕還是較重」三種情況，利用決策樹和數學歸納法證明之，第三章給予實際操作的過程。

關鍵詞：秤重問題、決策樹、數學歸納法

DOI:10.6814/NCCU201900333

Abstract

This article wants to find : under the condition that one coin is wrong in weight and the other coins are the same weight, using a scale without weight, what is the maximum number of coins that we can find from the coin with the wrong weight ,and know that it is heavier or lighter ? In chapter 2, we will discuss the following three cases : there is a heavier coin, there is a lighter coin, and there is a coin of wrong weight but not sure the coin is heavier or lighter, separately. we will use the decision tree and mathematical induction to prove them. In chapter 3, we will show the practical process.

Keywords: Weighing problem、Decision tree、Mathematical Induction

DOI:10.6814/NCCU201900333

目次

DOI:10.6814/NCCU201900333

第一章　　緒論

1.1前言

在網路上看到一個有趣的數學題目：有8枚外觀一模一樣硬幣，其中7枚硬幣的重量相同，另外1枚硬幣較重，測量工具只有一個無法碼的天平，試以最少測量次數找出較重的那一枚硬幣。

我當下的第一個想法是先將8枚硬幣分成4枚放在天平左盤，4枚放右盤，如果天平傾向右邊，表示右盤4枚硬幣之中有1枚較重，傾向左邊則表示左盤4枚硬幣之中有1枚較重。接下來再將可能有問題的4枚硬幣分成2枚放在天平左盤，2枚放右盤，重複此動作，三次之後便可以找到較重的那一枚硬幣。但這樣的做法所得到的答案真的是最少的方法數嗎? 如果是其他數量，例如：9枚硬幣或10枚硬幣，那答案又是如何? 又該怎麼做呢?

本篇研究的啟發，從8枚硬幣這個題目切入，欲延伸探討：若有 t 枚硬幣，其中一枚較重，最少能用無法碼天平秤多少次來找到較重的那一枚硬幣，亦或是，在秤 n 次之後，最多可以從多少枚硬幣中找到這一枚較重的硬幣；進而推廣，將已知一枚硬幣較重的狀況，改成已知一枚硬幣重量有問題但不知道是較輕還是較重的狀況。

若今有 t 枚硬幣，其中一枚重量有問題但不知道是較輕還是較重，那麼最少能用無法碼天平秤多少次來找到重量有問題的那一枚硬幣並且知道是較輕還是較重，亦或是，在秤 n 次之後，最多可以從多少枚硬幣中找到這一枚有問題的硬幣並且知道是較輕還是較重。

DOI:10.6814/NCCU201900333

1.2研究方法

本文使用決策樹，幫助建構決策模型，從一些實例之中構思並尋找規律，由於硬幣的個數為正整數，因此再利用數學歸納法和鴿籠原理證明，進而得到其一般式。

決策樹，由一些決策和其可能的結果組合而成，是一個利用像樹一樣的圖形或決策模型的決策支持工具，用來創建到達目標的規劃，在決策分析中能夠幫助確定一個達到目標的策略，或是展示比較各種決策下的可能性。

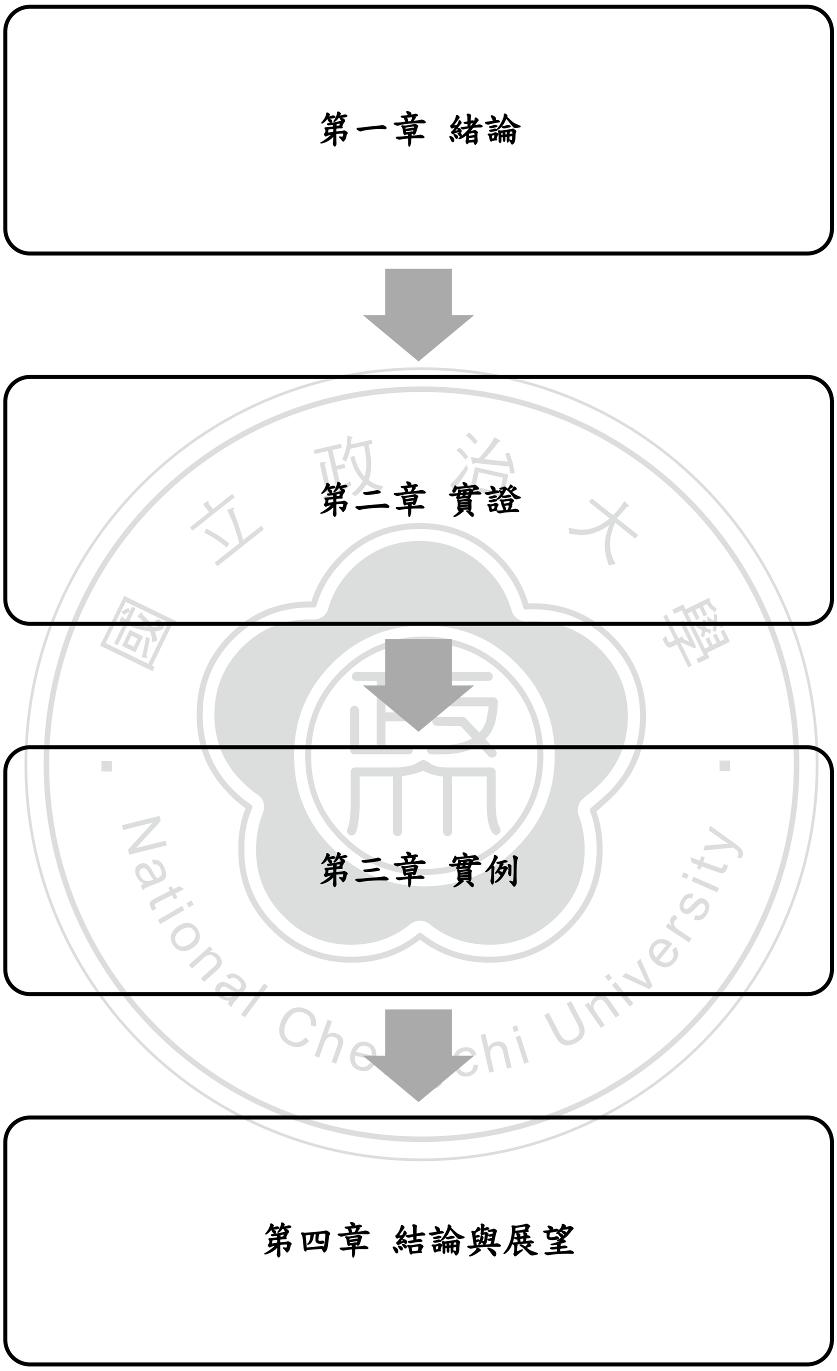
大多數的決策樹可以運用在分類預測上。當其用來預測的應變數類別型態(例如：生或死、男或女)時，該決策樹便稱為分類樹(Classification Tree)。有些決策樹演算法也可以像迴歸分析一樣，預測的結果呈現的是一個實數(例如：身高、體重)，這種決策樹就稱為迴歸樹(Regression Tree)。另有一種決策樹，則結合了分類樹與迴歸樹的特性，其預測結果不僅可以呈現類別型態，也可以是數值型的資料，該決策樹則稱為分類迴歸樹(Classification and Regression Tree，簡稱 CART)。

決策樹的應用相當廣泛，除了數學以外，也常常在企業管理、神經網路、經濟學、管理科學等各方面扮演重要的角色。決策樹有幾個優點：

- 決策樹易於理解和閱讀
- 可清楚展示決策前後的關係
- 可用簡單的規則將欲分析的資料進行分類
- 不需要龐大的運算
- 無論是離散型的資料或是連續型的資料都可以使用決策樹來分析

DOI:10.6814/NCCU201900333

1.3 論文架構



DOI:10.6814/NCCU201900333

第二章　　實證

2.1 已知一枚硬幣較重

假設有若干枚外觀、大小、形狀相同的硬幣，已知有一枚硬幣重量較重，而工具只有一個無砝碼的天平，我們想探討：在利用無法碼天平秤 n 次時，最多可以從多少枚硬幣之中找到這一枚較重的硬幣。

當硬幣只有一枚時，無從比較，故我們從兩枚硬幣開始討論。當有兩枚硬幣時，將這兩枚硬幣分別放在天平的左盤及右盤，如果天平左傾代表左盤那枚硬幣較重，右傾則代表右盤那枚硬幣較重。

利用天平秤一次過後的情況可能是左盤較重、右盤較重、平衡狀態三種結果，故我們猜想在秤 n 次時，最多可以從3^n枚硬幣中找到較重的那一枚硬幣。以下利用《數學歸納法》證明：

步驟一：

當 n=1時，

有三枚硬幣①②③，將①放天平左盤，②放天平右盤，若天平左傾代表① 較重，右傾代表② 較重，平衡則代表③ 較重，故可在秤一次的動作之下從三枚硬幣之中找到較重的那一枚硬幣。實際操作如圖2-1：

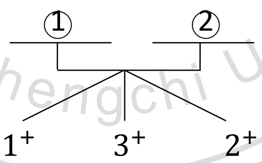


圖2-1

步驟二：

令 n=k 時，

可以在秤 k 次的動作之後，從3^k枚硬幣中找到較重的那一枚硬幣。

則當 n=k+1時，

有3^{k+1}枚硬幣，取編號1號的硬幣到編號3^k號的硬幣，放在天平的左盤，取編號3^k+1號的硬幣到編號$2\cdot3^k$號的硬幣，放在天平右盤。

DOI:10.6814/NCCU201900333

若天平左傾，表示編號1號到編號3^k號的硬幣，其中一枚硬幣較重；若天平右傾，表示編號3^k+1號到編號$2 \cdot 3^k$號的硬幣，其中一枚硬幣較重；若天平平衡則表示編號$2 \cdot 3^k+1$號到編號$3 \cdot 3^k$號的硬幣，其中一枚硬幣較重。

根據歸納法步驟，不論是左盤的3^k枚硬幣、右盤的3^k枚硬幣或是沒放上天平的3^k枚硬幣都可以在秤 k 次的動作之後，從中找到較重的那一枚硬幣。
故得證。

接著要證明，當有3^n+1枚硬幣時，至少需要秤 n+1次才能找到較重的那枚硬幣。3^n+1枚硬幣，相當於鴿籠原理中的鴿子；秤重 n 次後有3^n個結果，相當於鴿籠原理之中的鴿籠，根據鴿籠原理，至少有一個結果之中有兩枚硬幣，則必須再多秤一次才能找出較重的那一枚硬幣，故至少需要 n+1次。

DOI:10.6814/NCCU201900333

2.2 已知一枚硬幣較輕

假設有若干枚外觀、大小、形狀相同的硬幣，已知有一枚硬幣重量較輕，而工具只有一個無砝碼的天平，我們想探討：在秤 n 次時，最多可以從多少枚硬幣中找到這一枚較輕的硬幣。

當硬幣只有一枚時，無從比較，故我們從兩枚硬幣開始討論。當有兩枚硬幣時，將這兩枚硬幣，一枚放在天平的左盤，一枚放在右盤，如果天平左傾代表右盤那枚硬幣較輕，右傾則代表左盤那枚硬幣較輕。

利用天平秤一次過後的情況可能是左盤較重、右盤較重、平衡狀態三種結果，故我們猜想在秤 n 次時，最多可以從3^n枚硬幣中找到較輕的那一枚硬幣。

以下利用《數學歸納法》證明：

步驟一：

當 n=1時，

有三枚硬幣①②③，將①放天平左盤，②放天平右盤，若天平左傾代表②較輕，右傾代表①較輕，平衡則代表③較輕，故可在秤一次之後從三枚硬幣之中找到較輕的那一枚硬幣。實際操作如圖2-2：

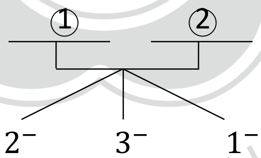


圖2-2

步驟二：

假設 n=k 時，

可以在秤 k 次的動作之後，從3^k枚硬幣中找到較輕的那一枚硬幣。

則當 n=k+1時，

有3^{k+1}枚硬幣，取編號1號的硬幣到編號3^k號的硬幣，放在天平的左盤，取編號3^k+1號的硬幣到編號$2 \cdot 3^k$號的硬幣放在天平右盤。

DOI:10.6814/NCCU201900333

若天平左傾，表示編號3^k+1號到編號$2\cdot 3^k$號的硬幣，其中一枚硬幣較輕；若天平右傾，表示編號1號到編號3^k號的硬幣，其中一枚硬幣較輕；若平衡則表示編號$2\cdot 3^k+1$號到編號$3\cdot 3^k$號的硬幣，其中一枚硬幣較輕。

根據歸納法步驟，不論是左盤的3^k枚硬幣、右盤的3^k枚硬幣或是沒放上天平的3^k枚硬幣都可以在秤 k 次的動作之後，從中找到較輕的那一枚硬幣。
故得證

接著要證明，當有3^n+1枚硬幣時，至少需要秤 n+1次才能找到較輕的那枚硬幣。3^n+1枚硬幣，相當於鴿籠原理中的鴿子；秤重 n 次後有3^n個結果，相當於鴿籠原理之中的鴿籠，根據鴿籠原理，至少有一個結果之中有兩枚硬幣，則必須再多秤一次才能找出較輕的那一枚硬幣，故至少需要 n+1次。

DOI:10.6814/NCCU201900333

2.3 一枚硬幣重量有誤但不知其較重或較輕

假設有若干枚外觀、大小、形狀相同的硬幣，已知有一枚硬幣重量有誤，但不知道較重或是較輕，而工具只有一個無砝碼的天平，我們想探討：利用天平秤 n 次時，最多可以從多少枚硬幣中找到這一枚重量有誤的硬幣並且知道是較輕還是較重。

當硬幣只有一枚時，無從比較；兩枚硬幣時，則無法判斷是其一較輕或是另一枚較重，故從三枚硬幣開始討論起。

先前的兩個例子，一枚硬幣即代表一個有問題的結果，而在此命題之中，一枚硬幣可能有較重或是較輕兩種結果，因此，在此的證明會將硬幣分成以下兩種狀況：第一次經過天平的秤重過後，硬幣可被區分成已上秤過的硬幣和未上秤的硬幣，以下我們將至少上秤過一次的硬幣稱為情況 A，而從未上秤過的硬幣則稱為情況 B。

《情況 A》

在第一次秤重後，天平左傾，可能是左盤的硬幣中有一枚較重或是右盤的硬幣中有一枚硬幣較輕；天平右傾，可能是右盤的硬幣中有一枚較重或是左盤的硬幣中有一枚硬幣較輕，然而左傾與右傾的證明過程是一樣的。

在天平左傾或右傾的狀況下，重量有問題的硬幣必定來自這些已上秤過的硬幣之中，而每一枚硬幣是輕是重的結果會被確定，我們欲證明在接下來的 m 次之後，最多可以秤得3^m個結果。

以下利用《數學歸納法》證明：

步驟一：當 m=1時，有三枚硬幣①②③，我們分成4個 case 討論。

Case1：①②③皆為較重的硬幣

將①放在天平左盤，②放在右盤，天平左傾表示①較重，右傾則是②較重，平衡則代表③較重。實際操作如圖2-3：

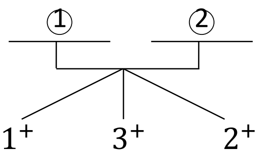


圖2-3

DOI:10.6814/NCCU201900333

Case2：①②較重，③較輕

將①放在天平左盤，②放在右盤，天平左傾表示①較重，右傾則是②較重，平衡則代表③較輕。實際操作如圖2-4：

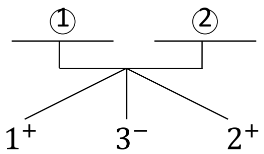


圖2-4

Case3：①②較輕，③較重

將①放在天平左盤，②放在右盤，天平左傾表示②較輕，右傾則是①較輕，平衡則代表③較重。實際操作如圖2-5：

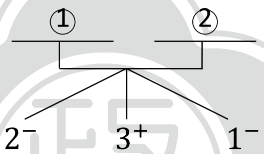


圖2-5

Case4：①②③皆為較輕的硬幣

將①放在天平左盤，②放在右盤，天平左傾表示②較輕，右傾則是①較輕，平衡則代表③較輕。實際操作如圖2-6：

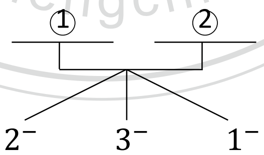


圖2-6

步驟二：

假設 m=k 時，可以在秤 k 次的動作之後，秤得3^k個結果，且這3^k個結果之中不論有多少個較輕的和多少個較重的。

則當 m=k+1時，我們一樣分成四個 case 討論

DOI:10.6814/NCCU201900333

Case 1：偶數個較重的結果且較重的結果的個數大於或等於 $\frac{2}{3} \times 3^{k+1}$

在較重的硬幣中各取3^k個分別放在天平的左盤和右盤，若天平左傾，代表左盤的3^k個硬幣中有一個硬幣重量大於其他硬幣，若天平右傾，則代表右盤的3^k個硬幣中有一個硬幣重量大於其他硬幣，若天平平衡，則表示在剩餘所有未上秤的3^k個硬幣之中，有一個硬幣的重量有問題。

Case 2：奇數個較重的結果且較重的結果的個數大於或等於 $\frac{2}{3} \times 3^{k+1}$

做法同上述之 Case 1。

Case 3：偶數個較重的結果且較重的結果的個數小於 $\frac{2}{3} \times 3^{k+1}$

令較重的結果的個數為 2x 個，且$2x < \frac{2}{3} \times 3^{k+1}$。則較輕的結果的個數為$3^{k+1} - 2x$個，取 x 個較重的和$3^k-$ x 個較輕的放天平的左盤，x 個較重的和3^k-x 個較輕的放天平右盤，使天平的左右盤各有3^k個硬幣。若天平左傾，代表左盤的 x 個較重的硬幣其中一個重量大於其他硬幣，或是右盤3^k-x 個較輕的硬幣中有一個重量小於其他硬幣；若天平右傾，代表右盤 x 個較重的硬幣其中一個重量大於其他硬幣，或是左盤3^k-x 個較輕的硬幣中有一個重量小於其他硬幣；若天平平衡則代表未上秤的$(3^{k+1} - 2x) - (3^k - x) - (3^k - x) = 3^k$個較輕的硬幣之中有一枚有問題。

Case 4：奇數個較重的結果且較重的結果的個數小於 $\frac{2}{3} \times 3^{k+1}$

假設重的結果的個數為2x+1個，且$2x+1 < \frac{2}{3} \times 3^{k+1}$。則輕的結果的個數為$3^{k+1} - 2x - 1$個，取 x 個重的和$3^k$-x 個輕的放在天平左盤；x 個重和$3^k$-x 個輕的放右盤，使天平左右盤各有$3^k$個硬幣。若天平左傾，代表左盤的 x 個較重的硬幣其中一個重量大於其他硬幣，或是右盤3^k-x 個較輕的硬幣中有一個重量小於其他硬幣；若天平右傾，代表右盤 x 個較重的硬幣其中一個重量大於其他硬幣，或是左盤3^k-x 個較輕的硬幣中有一個重量小於其他硬幣；平衡代表未上秤的$(3^{k+1} - 2x - 1) - (3^k - x) - (3^k - x) + 1 = 3^k$個包含較重和較輕的硬幣之中有一枚有問題。

DOI:10.6814/NCCU201900333

根據歸納法步驟，接下來不論是左盤的3^k枚硬幣、右盤的3^k枚硬幣或是未上秤的3^k枚硬幣都可以在秤 k 次的動作之後，找到重量有問題的那一枚硬幣並且知道是較輕還是較重。

故得證。

接著要證明，當有3^m+1枚上過秤的硬幣時，至少需要秤 m+1次才能找到有問題的那枚硬幣。3^m+1枚上過秤的硬幣，相當於鴿籠原理中的鴿子；秤重 m 次後有3^m個結果，相當於鴿籠原理之中的鴿籠，根據鴿籠原理，至少有一個結果之中有兩枚硬幣，則必須再多秤一次才能找出較重的那一枚硬幣，故至少需要 m+1次。

《情況 B》

在情況 B 中，多了真幣的輔助，真幣即已知重量沒問題的硬幣，我們欲證明在接下來的 m 次之後，最多可以從 $\frac{3^m-1}{2}$ 枚硬幣中找到有問題的那一枚硬幣並且知道是較輕還是較重，由於都是未上秤過的硬幣，故這 $\frac{3^m-1}{2}$ 枚硬幣事實上是3^m−1個結果。

以下利用《數學歸納法》證明：

步驟一：

當 m=1時，

有一枚硬幣①，在有真幣Ⓣ的輔助下，將①放在天平左盤，Ⓣ放在右盤，若天平左傾代表①較重，右傾代表①較輕，可得兩個結果。實際操作如圖2-7：

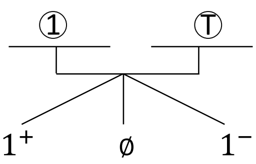


圖2-7

步驟二：

假設 m=k 時，在秤 k 次的動作之後，最多可以從 $\frac{3^k-1}{2}$ 個未上秤的硬幣中，找到有問題的那一枚並且知道他是較輕還是較重。

DOI:10.6814/NCCU201900333

則當 m=k+1時，

此時有 $\frac{3^{k+1}-1}{2}$ 枚未上秤的硬幣，將 $\frac{3^k+1}{2}$ 枚硬幣放在天平的左盤，$\frac{3^k-1}{2}$ 和一枚真幣Ⓣ放在天平的右盤，若天秤左傾，代表左盤中的 $\frac{3^k+1}{2}$ 枚硬幣中有一枚較重或是右盤中的 $\frac{3^k-1}{2}$ 枚硬幣中有一枚較輕，若天平右傾，代表右盤中的 $\frac{3^k-1}{2}$ 枚硬幣中有一枚較重或是左盤中的 $\frac{3^k+1}{2}$ 枚硬幣中有一枚硬幣較輕，平衡則代表未放上天平的 $\frac{3^{k+1}-1}{2}-\frac{3^k+1}{2}-\frac{3^k-1}{2}=\frac{3^k-1}{2}$ 枚硬幣中有一沒有問題。天平左傾時所得到的 $\frac{3^k+1}{2}+\frac{3^k-1}{2}=3^k$ 個結果可以在秤 k 次的動作之後找到有問題的那一枚硬幣，即情況 A 所證，天平右傾時同理可證，天平平衡時，根據歸納法步驟，亦可在秤 k 次的動作之後，找到有問題的那一枚硬幣並且知道其為較輕還是較重。

同樣的，我們必須證明，當有$\frac{3^m-1}{2}+1$ 枚未上秤硬幣時，至少需要秤 m+1 次才能找到有問題的那枚硬幣並知其為較輕或較重。$\frac{3^m-1}{2}+1$ 枚未上秤的硬幣其重量有誤的結果有3^m+1個，相當於鴿籠原理中的鴿子；秤重 m 次後有3^m個結果，相當於鴿籠原理之中的鴿籠，根據鴿籠原理，至少有一個結果之中有兩枚硬幣，則必須再多秤一次才能找出較重的那一枚硬幣，故至少需要 m+1次。

回到原命題，我們已經證明完在情況 A；即上秤過的硬幣之中，可以在 n-1 次秤重之後，最多秤得3^{n-1}個結果，然而在第一次秤重時，沒有真幣的輔助，因此不論天平左傾或右傾，有問題的硬幣是來自第一次放在天平左盤的硬幣數加上天平右盤的硬幣數，必為偶數，而3^{n-1}為奇數，故第一次秤重後，在剩下的 n-1次秤重，情況 A 的左盤和右盤最多只能各自得到3^{n-1}-1個結果。

自情況 A 和情況 B 可知，在第一次秤重之後，情況 A 在剩下的 n-1次秤重，左盤和右盤分別最多只能得到3^{n-1}-1個結果；情況 B 在剩下的 n-1次秤重，最多能得到3^{n-1}-1個結果，綜合上述，加上第一次秤重，在 n 次的秤重過後，最多可得 $3^{n-1}-1+3^{n-1}-1+3^{n-1}-1=3^n-3$，又每一枚硬幣會有較輕或是較重兩種結果，故在 n 次的秤重過後，最多可從 $\frac{3^n-3}{2}$ 枚硬幣之中找到有問題的那枚硬幣並且知道是較輕或較重。

DOI:10.6814/NCCU201900333

2.4 固定秤法

2.3已經證明完：在已知一枚硬幣重量有誤但不知其較重或較輕的情況之下，利用一個無砝碼的天平，可以在 n 次的秤重過後，最多從 $\frac{3^n-3}{2}$ 枚硬幣之中找到有問題的那枚硬幣並且知道是較輕還是較重。

2.3利用決策樹所得到的證明，以及找尋有問題硬幣的過程我們在此稱之為動態秤法，根據前一次天平的結果，移動硬幣並決定下一次該如何在天平的左右盤擺放硬幣，重複此動作進而找到有問題的硬幣。

接下來我們將利用另外一種秤法—固定秤法，這種方法同樣可以在 n 次秤重後，從 $\frac{3^n-3}{2}$ 枚硬幣之中找到有問題的那枚硬幣並且知道其較輕或是較重。

固定秤法的做法是：每一次天平左右盤所擺放的硬幣個數都一樣，只是放上天平的硬幣編號不一樣，根據每一次天平的左傾、右傾及平衡三種結果，可列出一個表格，再來依據每一次天平秤出的結果，並且利用查表的方式，便可知道是哪一枚硬幣較重或是較輕。

然而固定秤法的想法是容易的，但擺放過程卻不容易，我簡單的給予幾個擺放的原則：

1. 每一枚硬幣至少需擺放上天平一次，左盤右盤不限制。
2. 任兩枚硬幣，對於 n 次的天平中，不能每一次都出現在相同位置(即天平的左盤、右盤或是未上秤)。

DOI:10.6814/NCCU201900333

第三章　　實例

本文主要介紹「一枚硬幣重量有誤但不知其較重或較輕」的例子，以秤4次為例，秤4次最多可從 $\frac{3^4-3}{2}=39$ 枚硬幣之中找到有問題的那枚硬幣並且知道其較輕或是較重。以下分別是動態秤法和固定秤法的操作過程

3.1 動態秤法

我們先將1號硬幣到13號硬幣放在天平的左盤，14號到26號放在天平的右盤。

- **天平左傾**

  若天平左傾，代表1號硬幣到13號硬幣其中一枚較重(以下簡記為1^{+}、2^{+}、3^{+}…以此類推)，或是14號硬幣到26號硬幣其中一枚較輕(以下簡記為14^{-}、15^{-}、16^{-}…以此類推)。後續操作如圖3-1：

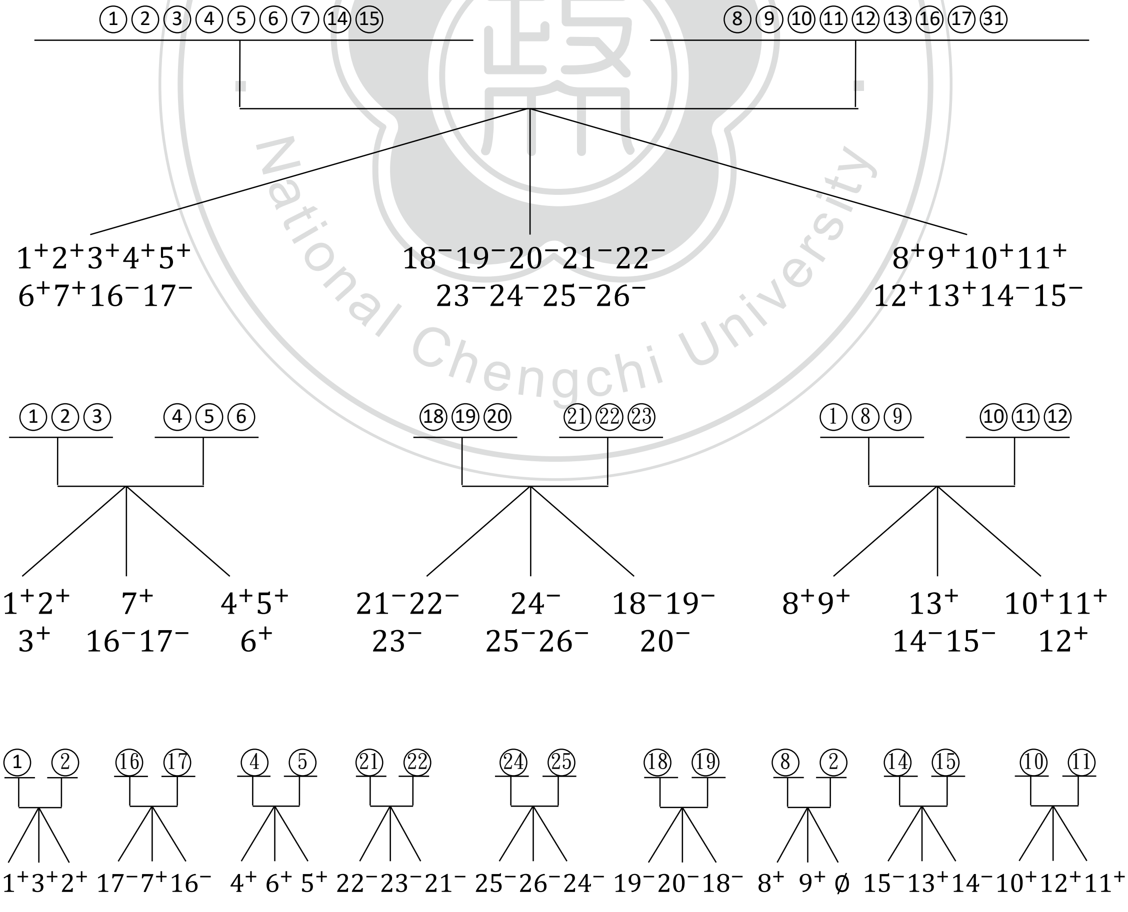


圖3-1

DOI:10.6814/NCCU201900333

- **天平右傾**

若天平右傾，代表1號硬幣到13號硬幣其中一枚較輕(以下簡記為1^-、2^-、3^-…以此類推)，或是14號硬幣到26號硬幣其中一枚較重(以下簡記為14^+、15^+、16^+…以此類推)。後續操作如圖3-2：

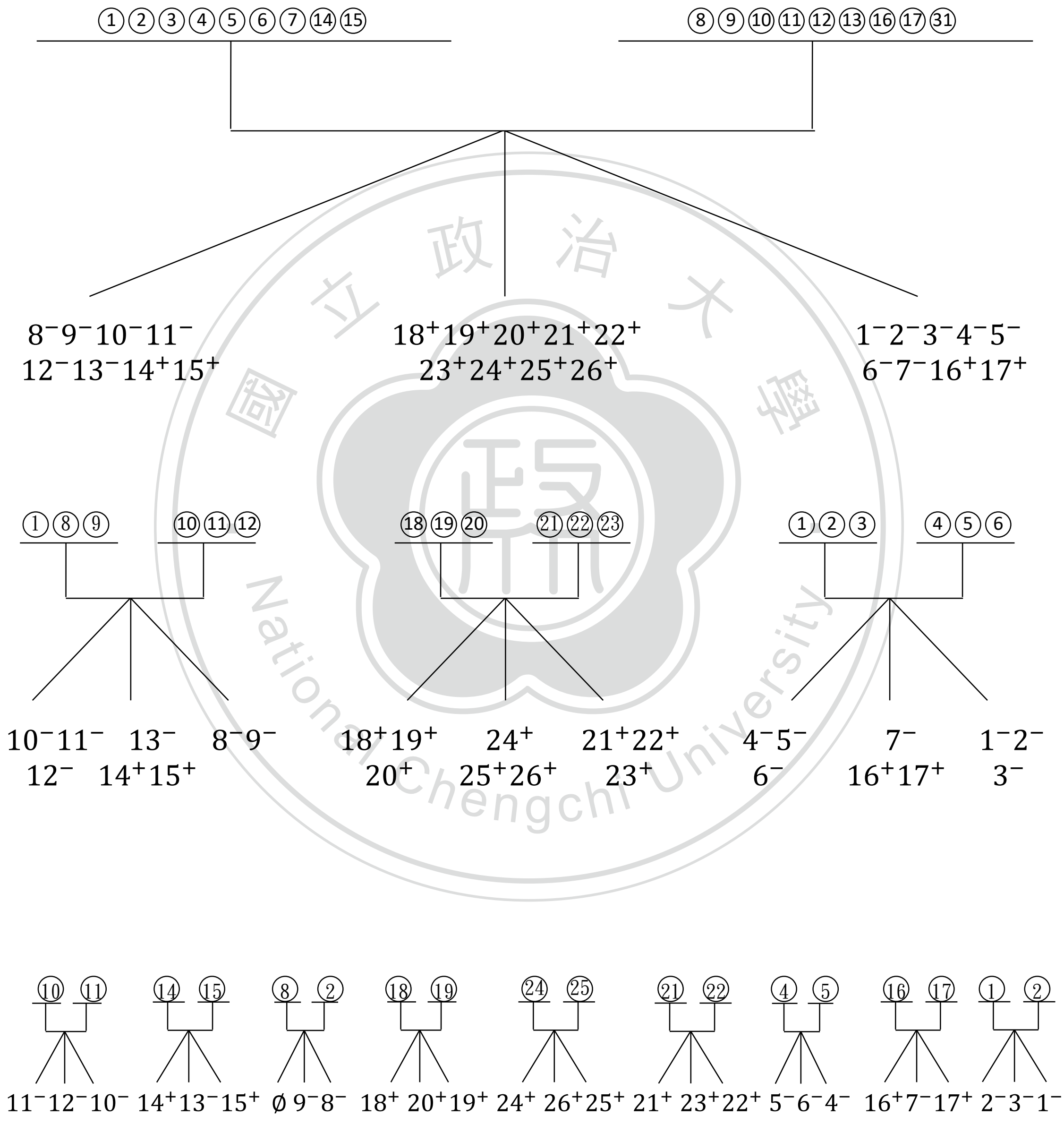


圖3-2

DOI:10.6814/NCCU201900333

- **天平平衡**

若天平平衡，代表27號硬幣到39號硬幣其中一枚較重(以下我們簡記為27^+、28^+、29^+…以此類推)或較輕(以下簡記為27^-、28^-、29^-…以此類推)。後續操作如圖3-3：

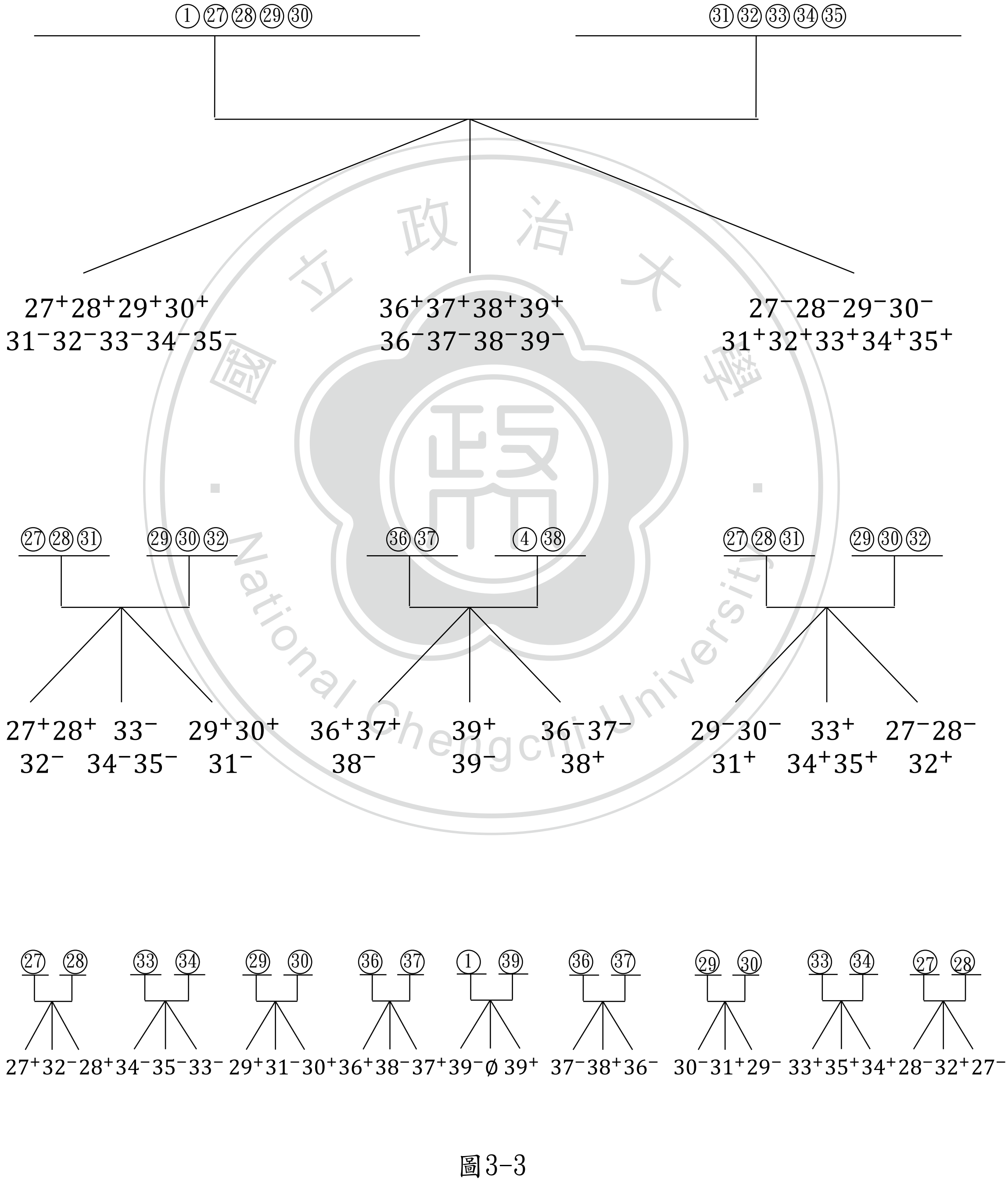


圖3-3

DOI:10.6814/NCCU201900333

3.2 固定秤法

第一次

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬　　　　⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖

第二次

①②③④⑤⑥⑦⑭⑮㉗㉘㉙㉚　　　　⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑯⑰㉛㉜㉝㉞㉟

第三次

①②③⑧⑨⑱⑲⑳㉗㉘㉛㊱㊲　　　　④⑤⑥⑩⑪⑫㉑㉒㉓㉙㉚㉜㊳

第四次

①④⑧⑩⑭⑯⑱㉑㉔㉗㉙㉝㊱　　　　②⑤⑪⑮⑰⑲㉒㉕㉘㉚㉞㊲㊴

圖3-4

圖3-4為固定秤法的一組解，由上而下依序是第一次，第二次，第三次，第四次天平左右兩盤擺放的硬幣。

舉例來說，倘若第一次天平左傾，第二次天平左傾，第三次天平左傾，第四次天平左傾，代表①較重；反之，第一次天平右傾，第二次天平右傾，第三次天平右傾，第四次天平右傾，則代表①較輕。若第一次天平左傾，第二次左傾，第三次左傾，第四次平衡，以下簡稱左左左平，代表③較重。整理並簡稱可得表3-1。

DOI:10.6814/NCCU201900333

表3-1

編　號	1	2	3	4	5
重	左左左左	左左左右	左左左平	左左右左	左左右右
輕	右右右右	右右右左	右右右平	右右左右	右右左左
編　號	6	7	8	9	10
重	左左右平	左左平平	左右左左	左右左平	左右右左
輕	右右左平	右右平平	右左右右	右左右平	右左左右
編　號	11	12	13	14	15
重	左右右右	左右右平	左右平平	右左平左	右左平右
輕	右左左左	右左左平	右左平平	左右平右	左右平左
編　號	16	17	18	19	20
重	右右平左	右右平右	右平左左	右平左右	右平左平
輕	左左平右	左左平左	左平右右	左平右左	左平右平
編　號	21	22	23	24	25
重	右平右左	右平右右	右平右平	右平平左	右平平右
輕	左平左右	左平左左	左平左平	左平平右	左平平左
編　號	26	27	28	29	30
重	右平平平	平左左左	平左左右	平左右左	平左右右
輕	左平平平	平右右右	平右右左	平右左右	平右左左
編　號	31	32	33	34	35
重	平右左平	平右右平	平右平左	平右平右	平右平平
輕	平左右平	平左左平	平左平右	平左平左	平左平平
編　號	36	37	38	39	
重	平平左左	平平左右	平平右平	平平平右	
輕	平平右右	平平右左	平平左平	平平平左	

DOI:10.6814/NCCU201900333

如果把天平左傾的左對應到阿拉伯數字1，平衡的平對應到數字0，右傾的右對應到數字2，則表3-1可整理並改寫成表3-2。

表3-2

編　號	1	2	3	4	5
重	1111	1112	1110	1121	1122
輕	2222	2221	2220	2212	2211
編　號	6	7	8	9	10
重	1120	1100	1211	1210	1221
輕	2210	2200	2122	2120	2112
編　號	11	12	13	14	15
重	1222	1220	1200	2101	2102
輕	2111	2110	2100	1202	1201
編　號	16	17	18	19	20
重	2201	2202	2011	2012	2010
輕	1102	1101	1022	1021	1020
編　號	21	22	23	24	25
重	2021	2022	2020	2001	2002
輕	1012	1011	1010	1002	1001
編　號	26	27	28	29	30
重	2000	0111	0112	0121	0122
輕	1000	0222	0221	0212	0211
編　號	31	32	33	34	35
重	0210	0220	0201	0202	0200
輕	0120	0110	0102	0101	0100
編　號	36	37	38	39	
重	0011	0012	0020	0002	
輕	0022	0021	0010	0001	

DOI:10.6814/NCCU201900333

再將數字序列考慮成一個三進位數，並且將其轉換成十進位數，標註在三進位數的後方，則表3-2可整理成表3-3。

表3-3

編　號	1	2	3	4	5
重	1111(40)	1112(41)	1110(39)	1121(43)	1122(44)
輕	2222(80)	2221(79)	2220(78)	2212(77)	2211(76)
編　號	6	7	8	9	10
重	1120(42)	1100(36)	1211(49)	1210(48)	1221(52)
輕	2210(75)	2200(72)	2122(71)	2120(69)	2112(68)
編　號	11	12	13	14	15
重	1222(53)	1220(51)	1200(45)	2101(64)	2102(65)
輕	2111(67)	2110(66)	2100(63)	1202(47)	1201(46)
編　號	16	17	18	19	20
重	2201(73)	2202(74)	2011(58)	2012(59)	2010(57)
輕	1102(38)	1101(37)	1022(35)	1021(34)	1020(33)
編　號	21	22	23	24	25
重	2021(61)	2022(62)	2020(60)	2001(55)	2002(56)
輕	1012(32)	1011(31)	1010(30)	1002(29)	1001(28)
編　號	26	27	28	29	30
重	2000(54)	0111(13)	0112(14)	0121(16)	0122(17)
輕	1000(27)	0222(26)	0221(25)	0212(23)	0211(22)
編　號	31	32	33	34	35
重	0210(21)	0220(24)	0201(19)	0202(20)	0200(18)
輕	0120(15)	0110(12)	0102(11)	0101(10)	0100(9)
編　號	36	37	38	39	
重	0011(4)	0012(5)	0020(6)	0002(2)	
輕	0022(8)	0021(7)	0010(3)	0001(1)	

DOI:10.6814/NCCU201900333

第四章　　結論與展望

在本篇論文之中，我們利用「決策樹」配合《數學歸納法》以及《鴿籠原理》，證明了

1. 已知一枚硬幣較重

   利用無碼法天平秤 n 次過後，最多可以從3^n枚硬幣中找到較重的那一枚。

2. 已知一枚硬幣較輕

   利用無碼法天平秤 n 次過後，最多可以從3^n枚硬幣中找到較輕的那一枚。

3. 已知一枚硬幣重量有誤但不知其較重或較輕

   利用無碼法天平秤 n 次過後，最多可從 $\frac{3^n-3}{2}$ 枚硬幣中找到有問題的那枚硬幣並知道其較輕或是較重。

我們將小數字的例子，透過實作步驟，分析其規律性，利用數學歸納法推廣到任意整數，決策樹在其中扮演重要角色，當所有硬幣混在一起時，特別是「已知一枚硬幣有問題但不知其較輕或較重」的證明，一個硬幣有兩個結果導致我在一開始不知該如何下手。利用決策樹，在第一次天平擺放後並將其結果分成三部分時，我才明白必須分別討論。而此三部分之中的每一部分皆可再如法炮製的做下去，並且有其規律性，透過數學歸納法找到一般式，最後再利用鴿籠原理證明我們所得的一般式是最多且可達到的。

我所做的固定秤法，說明與實例是建立在動態秤法的結論之上，固定秤法是可以允許有3^n個結果，扣除某一號硬幣從未擺上任一個天平，即其結果為平平平⋯，則剩餘的3^n-1個結果之中，我無法單從固定秤法的限制下證明出為何僅有3^n-3個結果有用，並且多餘的2個結果是哪2個表格，也並非是唯一的，我猜想過多餘的兩個會不會是全左或全右？然而，在三枚硬幣的例子中，我認為是可以允許有全左或全右存在的，實際操作的比較如圖4-1、圖4-2與表4-1、表4-2。

DOI:10.6814/NCCU201900333

● **三枚硬幣之固定秤法實例一**

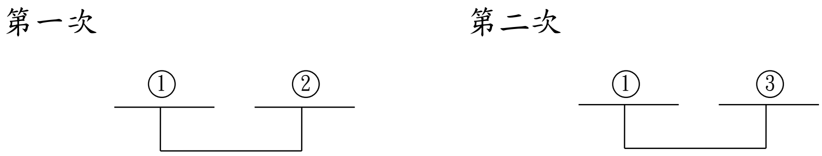


圖4-1

表4-1

編　號	1	2	3
重	左左	右平	平右
輕	右右	左平	平左

多餘的結果為：左右、右左

● **三枚硬幣之固定秤法實例二**

圖4-2

表4-2

編　號	1	2	3
重	左右	右平	平左
輕	右左	左平	平右

多餘的結果為：左左、右右

上述的兩個實例，皆可在三枚硬幣中找出有問題的那枚硬幣並知道其較輕或較重，但是兩個實例多餘的結果卻不一樣。因此我推論：在決策樹的證明裡已經證明了最多能秤出3^n-3個結果，然而固定秤法雖然看似有3^n-1個結果可以用，但相較之下多餘的是哪兩個結果，就不得而知了。

DOI:10.6814/NCCU201900333

另外，39個硬幣的固定秤法與表格，是我利用決策樹的輔助，拼湊出來的，並非唯一的擺法，然而很可惜地我僅能給出一套原則，而無法給予一套更有系統或是更加規律的做法，甚至是歸納出一個演算法。我將其結果轉換成三進位數，如表3-2，再將三進位數與十進位數做對照，如表3-3，試圖從三進位數或是十進位數字中找尋靈感，屢屢嚐試卻都無功而返，但自找尋的過程中我歸納出以下幾個造成阻礙的原因：

首先，因為一枚硬幣其較重與較輕的結果是相對的，如表3-1所示，1號硬幣較重的結果是左左左左，則1號硬幣較輕的結果就一定是右右右右，如此一來其三進位數與十進位數就必然呈現配對的模式。按照硬幣的編號分配數字，例如：1號硬幣分配到整數1，即三進位數中的0001，則必然也會伴隨整數2，三進位數中的0002；2號硬幣分配到整數3，即三進位數中的0010，則必然也會伴隨整數6，三進位數中的0020，硬幣會將整數分割的破碎凌亂。

再者，1號硬幣較重是分配到整數1還是整數2，又有兩種選擇，每一枚硬幣都是如此，因此有2^n種，還要搭配每一個天平左右盤擺放個數的限制，例如在秤4次的實例中，天平的左右兩盤都只能各自擺放13枚硬幣，以上種種原因導致我窒礙難行，無法在固定秤法上給出一個漂亮的演算法，期許往後若有優秀的後輩對此感興趣可以加以研究，甚至是完成它。

DOI:10.6814/NCCU201900333

參考文獻

中文文獻

(1) 謝維馨，分類工具(3)—決策樹（Decision Tree），上網日期2018年3月1日，檢自：http://yourgene.pixnet.net/blog/post/118211190-%E5%88%86%E9%A1%9E%E5%B7%A5%E5%85%B7(3)%E2%94%80%E6%B1%BA%E7%AD%96%E6%A8%B9%EF%BC%88decision-tree%EF%BC%89。

(2) CH.Tseng，決策樹 Decision trees，上網日期2017年2月10日，檢自：https://chtseng.wordpress.com/2017/02/10/%E6%B1%BA%E7%AD%96%E6%A8%B9-decision-trees/。

(3) 林宥廷(2014)，有關三源數列的探討，國立政治大學，應用數學系碩士班，臺北市。

英文文獻

(1) Alan Tucker(1994)，Applied Combinatorics(5th edition)，John wiley&Sons Inc.

(2) C.L.Liu(2000)，Introduction to Combinatorial Mathematics(International editions 2000)，McGraw-Hill.

(3) Susanna S.Epp(2003)，Discrete Mathematics with Applications，Cengage Learning.

DOI:10.6814/NCCU201900333