

國立政治大學應用數學系
碩士學位論文



Diffy 2^k 邊形的探討
The Study of Diffy 2^k -gon

碩士班學生：黃育賢 撰
指導教授：李陽明 博士
中華民國 108 年 6 月 28 日

Abstract

In this thesis, we study the Diffy 2^k -gon. Under conditions where some results of Diffy quadrilateral are known, first we study the Diffy octagon, therefore we consider the general Diffy 2^k -gon, and then discuss the convergence and properties between them.

Second, we study whether there are some relationships between each Diffy 2^k -gon. We discuss the relationships by two directions “construction” and “amount” in this thesis, and we find some good results.

Third, we try to decompose the Diffy 2^k -gon. We partition a Diffy polygon with more edges into several Diffy polygons with less edges, and discuss the relationships between them.

Finally, we consider the general Diffy n -gon. We discuss the decomposition of Diffy n -gon, and we also find some results. We think that the result of this part may be a good way to study the general Diffy n -gon in the future.

摘要

本論文中，我們主要探討 Diffy 2^k 邊形。在已知 Diffy 四邊形的一些結果之下，我們首先研究 Diffy 八邊形，之後，我們將其推廣至一般 Diffy 2^k 邊形，討論它們的收斂性以及共同性質。

接下來，我們研究每一個 Diffy 2^k 邊形之間，是否存在著某些關聯。本文從「結構」及「數量」兩個大方向去探討彼此間的關係，並得出一些不錯的結果。

之後，我們嘗試將 Diffy 2^k 邊形做分解，將一個邊數多的 Diffy 多邊形分解成數個邊數較少的 Diffy 多邊形，以及討論兩種 Diffy 多邊形它們彼此的關聯。

最後，我們嘗試把分解的可行性推廣至更一般的 Diffy n 邊形，不再只限制於 2^k 邊形的狀況，也得到了一些結果。而這一部分的研究，也給未來研究一般的 Diffy n 邊形時，一個很好的起步方向。

目次

Abstract	i
摘要	ii
目次	iii
圖目錄	iv
第一章 前言	1
第二章 定義、符號與基本性質	3
第三章 Diffy 八邊形	9
第四章 Diffy 2^k 邊形	15
第五章 Diffy 2^k 邊形彼此間的相關性	19
第六章 Diffy 2^k 邊形的分解與其延伸	31
第七章 結論與未來展望	43
參考文獻	45

圖目錄

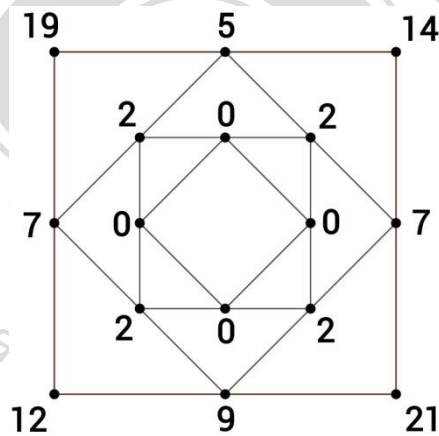
圖 1.1 : Diffy box 的例子	1
圖 1.2 : Diffy box 的例子	1
圖 2.1 : Diffy box 的例子用符號表示	4
圖 2.2 : 旋轉不變性質的例子	4
圖 2.3 : 翻轉不變性質的例子	5
圖 3.1 : 旋轉視為相同的例子	9
圖 3.2 : 翻轉視為相同的例子	10
圖 3.3 : Diffy 八邊形的收斂路徑圖	11
圖 3.4 : 證明 Diffy 八邊形必會在 8 步內收斂至 0	13
圖 5.1 : Diffy 四邊形的收斂路徑圖	19
圖 5.2 : Diffy 八邊形的收斂路徑圖	19
圖 5.3 : Diffy 四邊形與 Diffy 八邊形的收斂圖比較與關聯	20
圖 5.4 : Diffy 十六邊形的收斂路徑圖之猜測	22
圖 5.5 : Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖之猜測	26
圖 6.1 : 將一個八元數列分解成兩個四元數列	31
圖 6.2 : 分別對經過奇數次運算與偶數次運算的數列討論	32
圖 6.3 : Diffy 十二邊形分解成 4 個 Diffy 六邊形的情況	38
圖 6.4 : Diffy 十二邊形分解成 9 個 Diffy 四邊形的情況	39

第一章 前言

Diffy 多邊形的概念，最早源自於一個簡單的小遊戲：Diffy box（中文稱作「迪菲方塊」）。其基本的構造流程如下：

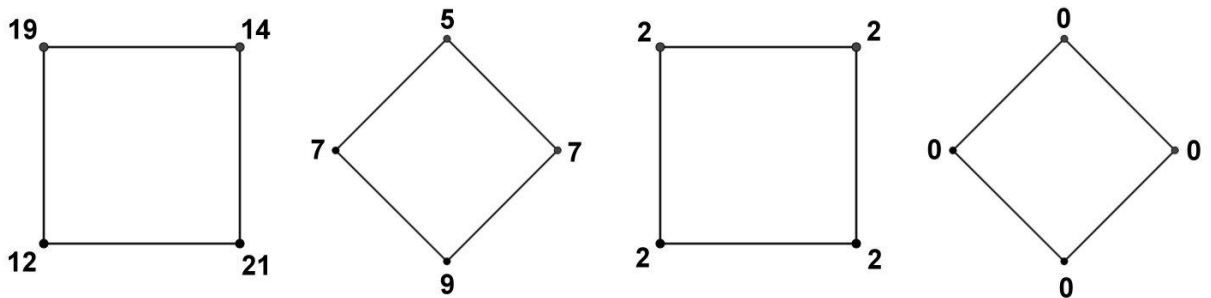
1. 繪製一正方形，並在正方形的四個頂點上分別寫下一個非負整數。
2. 對每一組相鄰的頂點，將兩頂點上的數字，做相減後再取絕對值的運算，並將得出的四個值分別寫在四個邊上的中點位置。
3. 連接四個邊中點的數字，使之形成一個較小的新的正方形。
4. 重複步驟 2 及步驟 3，直到四個頂點的數字全部為 0。

以下我們舉個簡單的 Diffy box 的例子：



(圖 1.1：Diffy Box 的例子)

另外，我們也可以將上圖做拆解，畫成一個計算過程如下：



(圖 1.2：Diffy Box 的例子)

有了 Diffy box 的構造流程之後，我們可以試著將四邊形延伸至正多邊形，然後用同樣的流程及運算，造出一個 Diffy 多邊形。若假設該正多邊形之邊數為 n ，則 Diffy n 邊形的構造流程如下：

1. 繪製一 n 邊形，並在 n 邊形的 n 個頂點上分別寫下一個非負整數。
2. 對每一組相鄰的頂點，將兩頂點上的數字，做相減後再取絕對值的運算，並將得出的 n 個值分別寫在 n 個邊上的中點位置。
3. 連接 n 個邊中點的數字，使之形成一個較小的新的 n 邊形。
4. 重複步驟 2 及步驟 3。

顯然地，其流程並無太多異處，但唯獨步驟 4，對於大部分的 n 邊形，並不一定最後都會有全部頂點皆為 0 的狀況發生。事實上，在五邊形、六邊形、七邊形的狀況下，任意給定所有頂點上的數字後，經過上述流程，絕大部分都不會有頂點全為 0 的結果；而八邊形的結果卻與四邊形一樣，無論一開始頂點上給的是什麼數字，最後必定會有八個頂點全為 0 的結果。

於是，我們便開始了相關的研究。本文一開始我們會先給出一些定義與符號、以及一般的 Diffy n 邊形都會有的一些基本性質。之後，我們開始著重於 Diffy 八邊形的探討，是否真的如四邊形的狀況一樣，計算過程中必定會出現八個頂點上數字皆為 0 的結果。最後，如果上述為真，那麼 Diffy 四邊形與 Diffy 八邊形有什麼關聯？Diffy 十六邊形是否也具有相同特性？如果 Diffy 十六邊形也是，那是不是 Diffy 2^k 邊形 ($k \geq 2, k \in \mathbb{N}$) 都具有相同性質呢？這些問題將是我們在本文中要探討的方向。

第二章 定義、符號與基本性質

【定義 2.1】給定一個初始的 Diffy n 邊形，我們以 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 代表 Diffy n 邊形中 n 個頂點的數字依順時鐘方向排列所形成的序列，其中 a_i 為非負整數， $1 \leq i \leq n$ 。

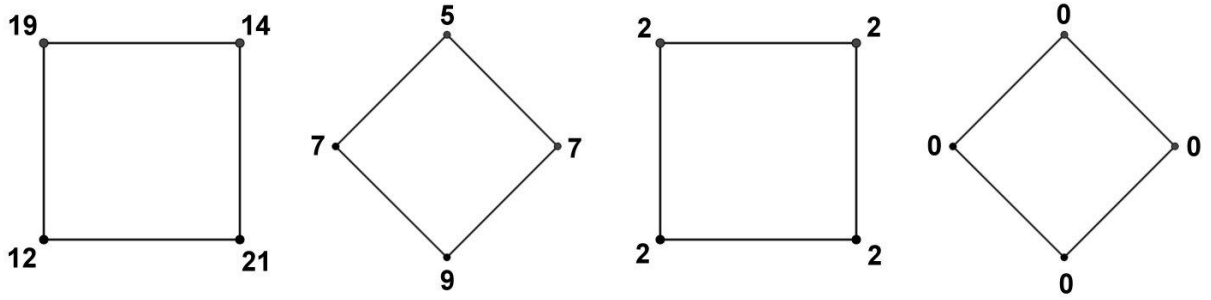
【定義 2.2】令 $D_1 = [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|]$ ，代表由 D_0 做一次相減取絕對值的運算後，所得到的下一個 Diffy n 邊形。依此類推，可以定義 D_i 為 D_{i-1} 再做一次同樣的運算後，所得到的第 i 個 Diffy n 邊形，也可以說是由 D_0 做 i 次運算後，所得到的第 i 個 Diffy n 邊形。

【定義 2.3】若 D_0 經過了 i 次運算後，首次得到一個全為 0 的數列，則我們稱 D_0 經 i 次運算後收斂至 0，記為 $l(D_0) = i$ 表示它的運算長度。

【定義 2.4】假設 D_0 經過了 i 次運算後得到數列 D_i ， D_0 經過了 j 次運算後得到數列 D_j ，其中 $i \leq j$ 。如果 $D_i = D_j$ ，且 $D_k \neq D_i \forall i < k < j$ ，則我們稱 D_0 經 i 次運算後進入循環，而 D_i, D_{i+1}, \dots, D_j 稱為一個循環節，其循環長度為 $j - i$ 。

【定義 2.5】我們以 M_0 來表示在 D_0 這個數列中，值最大的那一個數字，記為 $M_0 = \max(D_0) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。依此類推，我們可以定義 $M_i = \max(D_i)$ ，來表示 D_i 這個數列裡面的最大值。

以下我們試著將第一章中的例子，用符號來表示，過程中以「 \rightarrow 」代表運算過程。由下面的例子，我們可以說：Diffy 四邊形 $D_0 = [19, 14, 21, 12]$ 經過 3 次運算後收斂至 0。



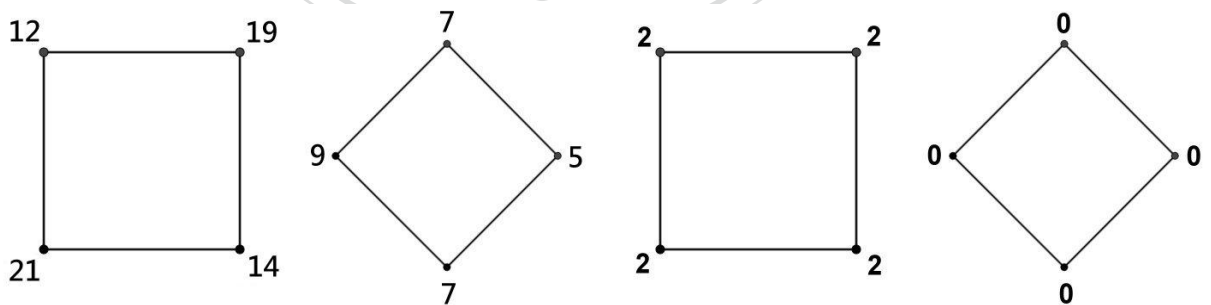
$$D_0 = [19, 14, 21, 12] \rightarrow D_1 = [5, 7, 9, 7] \rightarrow D_2 = [2, 2, 2, 2] \rightarrow D_3 = [0, 0, 0, 0]$$

(圖 2.1：Diffy Box 的例子用符號表示)

接下來我們介紹有關 Diffy n 邊形最基本的性質，往後將不時地會使用到。

【性質 2.6】 給定任意一個 Diffy n 邊形 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，若將該 Diffy n 邊形上每個頂點的數字同時順時鐘 $\frac{2\pi}{n}$ ，那麼所形成的另外一個 Diffy n 邊形 $D'_0 = [a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ ，具有與 D_0 完全相同的計算過程與結果。此性質我們稱為「旋轉不變性質」。

例如下面的例子，可以發現圖 2.2 與圖 2.1 具備完全相同的過程，差別僅在於所有數字都順時鐘旋轉了一個 $\frac{\pi}{4}$ 。

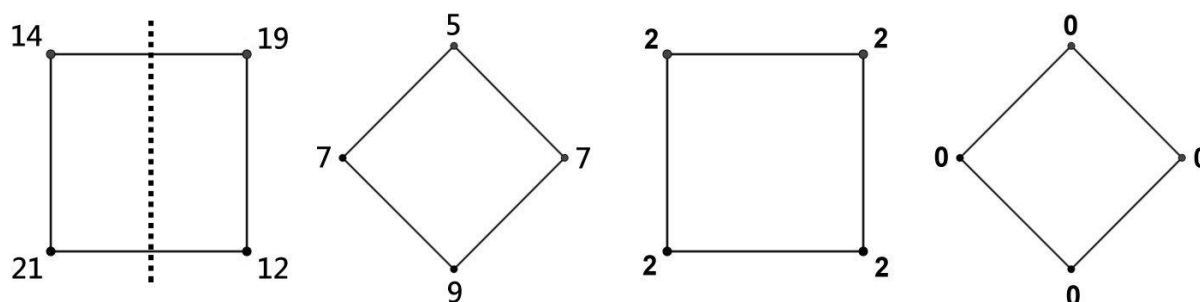


$$D'_0 = [12, 19, 14, 21] \rightarrow D'_1 = [7, 5, 7, 9] \rightarrow D'_2 = [2, 2, 2, 2] \rightarrow D'_3 = [0, 0, 0, 0]$$

(圖 2.2：旋轉不變性質的例子)

【性質 2.7】給定任意一個 Diffy n 邊形 D_0 ，若沿著該 Diffy n 邊形的其中一條對稱軸翻轉一次，那麼所形成的另外一個 Diffy n 邊形 D'_0 ，具有與 D_0 完全相同的計算過程與結果。此性質我們稱為「翻轉不變性質」。

例如下面的例子，若 D'_0 是 D_0 以虛線做為對稱軸而翻轉過來的數列，則可以發現圖 2.3 與圖 2.1 具備完全相同的過程。



$$D'_0 = [14, 19, 12, 21] \rightarrow D'_1 = [5, 7, 9, 7] \rightarrow D'_2 = [2, 2, 2, 2] \rightarrow D'_3 = [0, 0, 0, 0]$$

(圖 2.3：翻轉不變性質的例子)

【性質 2.8】給定任意一個 Diffy n 邊形 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，將該 Diffy n 邊形上每個頂點的數字同時加上一個整數 k ($-k \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$)，形成另外一個 Diffy n 邊形 $D'_0 = [a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_n + k]$ 。則兩個 Diffy n 邊形具有完全相同的計算過程與結果。此性質我們稱為「平移不變性質」。(註： k 之所以有限制，是為了要符合 Diffy n 邊形的一個定義，所有頂點上的數字都是非負整數。)

[證明]

$$\because D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$\because D_1 = [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|].$$

$$\because D'_0 = [a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_n + k],$$

$$\because D'_1 = [|(a_2 + k) - (a_1 + k)|, \dots,$$

$$|(a_n + k) - (a_{n-1} + k)|, |(a_1 + k) - (a_n + k)|]$$

$$\begin{aligned}
&= [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|] \\
&= D_1.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow D_0$ 與 D'_0 經過一次運算後得到相同結果，因此之後的運算都會完全相同。得證。

【性質 2.9】 給定任意一個 Diffy n 邊形 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，將該 Diffy n 邊形上每個頂點的數字同時被一個整數 k 減去 ($k \geq \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$)，形成另外一個 Diffy n 邊形 $D'_0 = [k - a_1, k - a_2, \dots, k - a_n]$ 。則兩個 Diffy n 邊形具有完全相同的計算過程與結果。此性質我們稱為「互補不變性質」。(註： k 之所以有限制，是為了要符合 Diffy n 邊形的一個定義，所有頂點上的數字都是非負整數。)

[證明]

$$\begin{aligned}
\because D_0 &= [a_1, a_2, \dots, a_n], \\
\because D_1 &= [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|], \\
\because D'_0 &= [k - a_1, k - a_2, \dots, k - a_n], \\
\because D'_1 &= [|(k - a_2) - (k - a_1)|, \dots, \\
&\quad |(k - a_n) - (k - a_{n-1})|, |(k - a_1) - (k - a_n)|] \\
&= [|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|] \\
&= [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|] \\
&= D_1.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow D_0$ 與 D'_0 經過一次運算後得到相同結果，因此之後的運算都會完全相同。得證。

【性質 2.10】 給定任意一個 Diffy n 邊形 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，將該 Diffy n 邊形上每個頂點的數字同時乘上一個實數 k ，形成另外一個 Diffy n 邊形 $D'_0 = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]$ 。則兩個 Diffy n 邊形具有相似的計算過程與結果，過程中所有由 D'_0 計算出來的數字，皆為由 D_0 計算出來的數字的 k 倍。此性質我們稱為「縮放相似性質」。

[證明]

$$\because D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$\therefore D_1 = [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|].$$

$$\because D'_0 = k \cdot D_0 = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n] .$$

$$\begin{aligned} \therefore D'_1 &= [|ka_2 - ka_1|, \dots, |ka_n - ka_{n-1}|, |ka_1 - ka_n|] \\ &= [k|a_2 - a_1|, k|a_3 - a_2|, \dots, k|a_n - a_{n-1}|, k|a_1 - a_n|] \\ &= k \cdot D_1. \end{aligned}$$

\Rightarrow 由此可知，無論經過幾次運算，在 D'_0 的計算過程所得出的數字，皆為 D_0 的計算過程所得出的數字的 k 倍。得證。

【性質 2.11】 $\forall i < j, M_i \geq M_j$ ，也就是說，在運算過程中，數列中的最大數將會遞減。

[證明]

我們僅須證明 $\forall i, M_i \geq M_{i+1}$ 即可。

$$\text{假設 } D_i = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$\text{那麼 } D_{i+1} = [|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|, |a_1 - a_n|]$$

$$\because \forall i, 0 \leq a_i \leq M_i$$

$$\therefore \forall i \neq j, -M_i \leq a_i - a_j \leq M_i$$

$\Rightarrow \forall i \neq j, |a_i - a_j| \leq M_i$ ，故 D_{i+1} 的每個元素都會小於等於 M_i ，所以 $M_{i+1} \leq M_i$ 。

得證。

【性質 2.12】 任意一個 Diffy n 邊形，經過多次運算後，最後必定發生下列兩種情況中的其中一種：收斂至 0，或者進入循環。

【性質 2.13】 給定一個 Diffy n 邊形，經過多次運算後，如果進入循環，則該數列必定成為一個所有元素都是由 0 或正整數 α 所組成的二元數列。

[證明]

假設 D_i, D_{i+1}, \dots, D_j 為一個循環，其中 $D_i = D_j$ ，則 $M_i = M_j$ 。

又因為數列最大值為遞減，所以 $\forall i < k < j, M_i \geq M_k \geq M_j = M_i$ 。

⇒ 在這個循環節內，所有數列的最大值皆相等。

我們令這個共同的最大值為 α ，現在我們要證明：

在這個循環節內的所有數列，

都只包含0和 α 這兩個整數。

現在考慮 D_j 裡面的其中一個必定含有的元素 α 。

因為 $M_{j-1} = \alpha$ ，

所以它的上一個數列 D_{j-1} 必定有兩個相連的元素是0或 α 。

接著，考慮 D_{j-1} 裡面的那兩個相連的元素0和 α 。

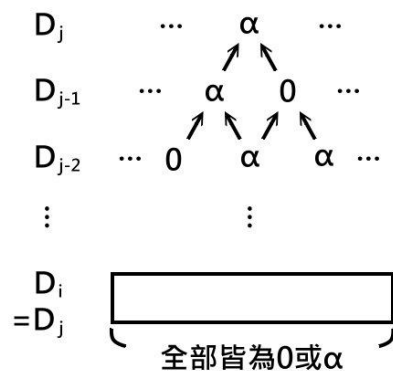
因為 $M_{j-2} = \alpha$ ，所以它的上一個數列 D_{j-2} 必定有三個相連的元素是0或 α 。

依此類推，可推到 D_i 有 $i - j + 1$ 個相連的元素是0和 α 。

然後又因為 $D_i = D_j$ 的關係，可推到 D_j 有 $i - j + 1$ 個相連的元素是0和 α ，

再推到 D_{j-1} 有 $i - j + 2$ 個相連的元素是0和 α ，依此接續下去。

所以，無論這個 Diffy n 邊形的 n 有多大（也就是不管這個數列的元素數量有多少），只要能往回推足夠多次（也就是 n 次），便可以保證在此之後，所有的數列 D_k 裡面的所有元素都只能含有0和 α 這兩個數字，故得證。



由「性質 2.13」可知道，無論是什麼樣的 Diffy n 邊形，只要它開始進入循環，必定是由0和正整數 α 所組成的。實際上，可以收斂至0的 Diffy n 邊形，在運算過程中也會有一部分數列是由0和正整數 α 所組成的。所以，所有的 Diffy n 邊形，必定會發生數列中所有元素是由0和一個正整數 α 所組成的狀況。

此外，根據「性質 2.10——縮放相似性質」，我們可以把二元數列提出一個倍數 α ，使得它接下來的運算過程是相似的。因此在本文接下來的內容，當有需要用到二元數列的部分時，我們會以 $\{0, 1\}$ 來做為該二元數列的元素。

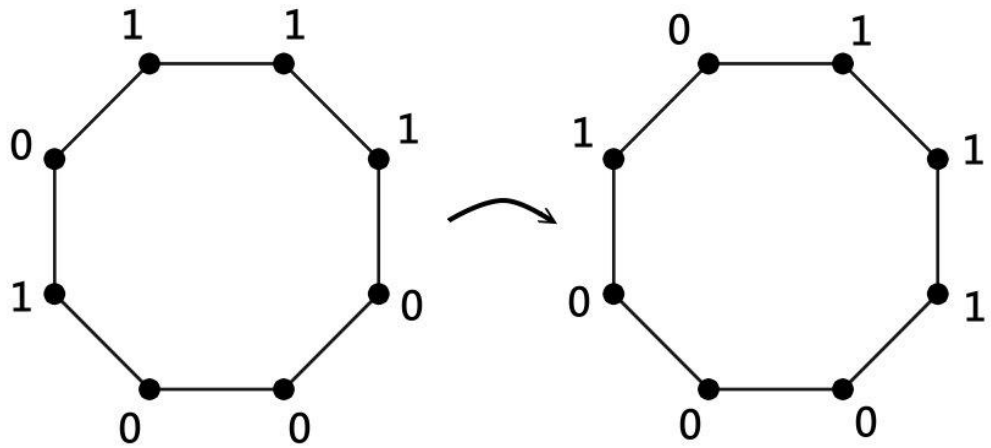
第三章 Diffy 八邊形

在前面一章，我們介紹了一些基本性質，這些性質無論是在幾邊形下都是成立的。現在我們開始著重於 Diffy 八邊形的探討。

首先，根據第二章的內容，我們可以知道，任意一個 Diffy 八邊形，在經過多次的運算之後，會變成僅由 0 和一個正整數 α 所組成的數列，再經由縮放相似性質，變成一個僅由 0 和 1 所組成的數列。

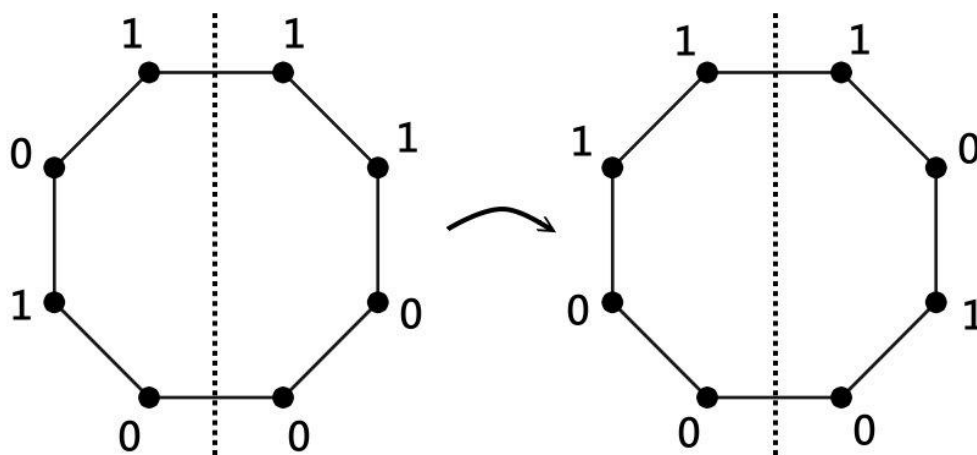
現在，我們令 $D'_0 = [a_1, a_2, \dots, a_8]$ ， $a_i \in \{0, 1\}$ ， $1 \leq i \leq 8$ 。所以我們已經知道，任意一個 Diffy 八邊形 D_0 經過多次運算後，都會變成如上述 D'_0 的形式。

為了後續推導某些理論與某些很好的結果，我們預先假設 Diffy 八邊形「可以旋轉」但「不能翻轉」（下方的圖 3.1 和圖 3.2 即為例子），那麼我們可以利用 cycle index 的方式算出 D'_0 可能的個數。



（圖 3.1：右邊的 $[01110001]$ 是由左邊的 $[11100010]$ 順時鐘轉 45°

得到的，因此左右兩個 Diffy 八邊形我們會視為同一個。）

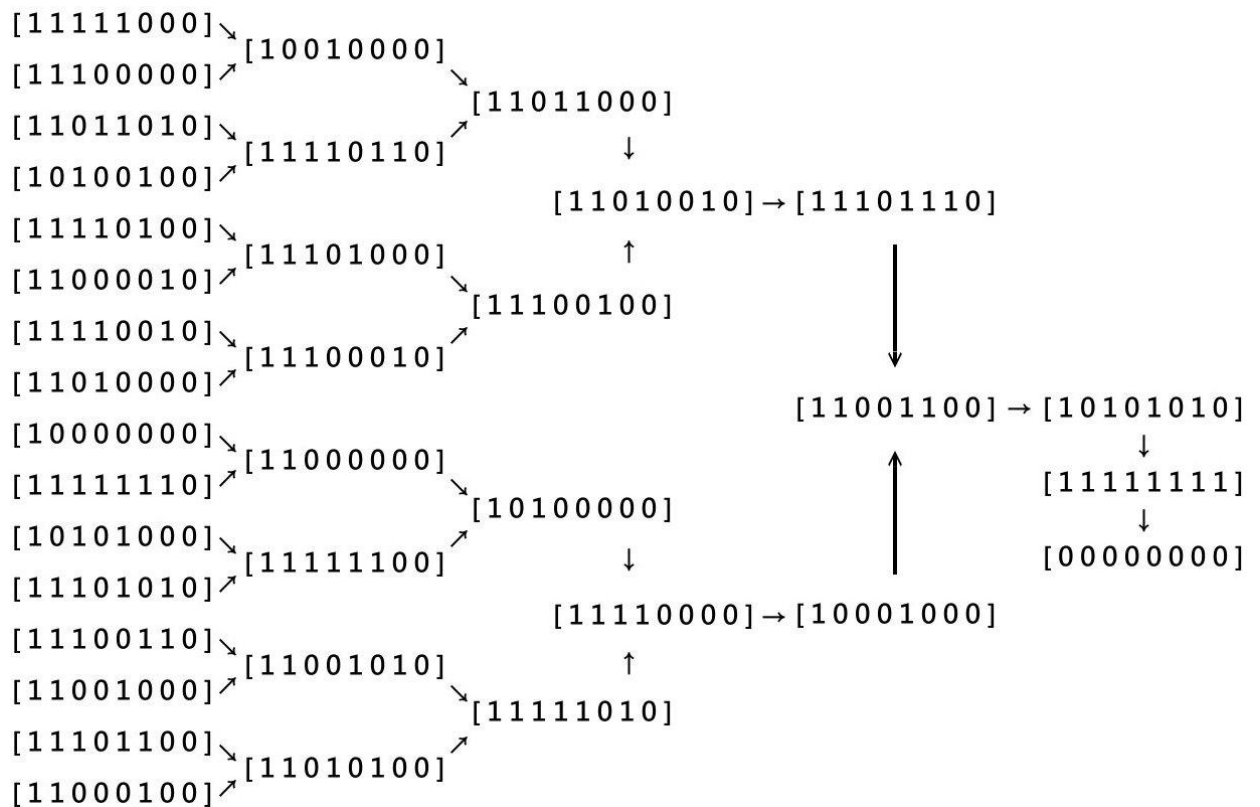


(圖 3.2：右邊的 [11010001] 是由左邊的 [11100010] 以虛線做對稱軸翻轉得到的，但是左右兩個 Diffy 八邊形我們會視為不同的兩個。)

【引理 3.1】假設我們要以 x 種顏色在正 n 邊形上的所有頂點進行著色，旋轉視為同一種，但翻轉視為不同種，那麼著色的方法數總共有 $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}$ 種，其中 d 為所有 n 的正因數， $\varphi(d)$ 為歐拉函數 (Euler's function)，即 $\varphi(d) =$ 不大於 d 且與 d 互質的正整數個數。

由「引理 3.1」，令 $n = 8$ ，則我們可以得到正八邊形的 cycle index 為 $\frac{1}{8}(x_1^8 + 1x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8^1)$ ，再來把所有的 x 以 2 代入，得到所求 = 36，也就是說，一個 Diffy 八邊形，所有頂點填入 0 或 1，旋轉視為同一種，翻轉視為不同種，則填入的總方法數為 36 種。

接下來，我們用窮舉的方式，把可能的 36 種 Diffy 八邊形 D'_0 都列出來，再來把彼此間的運算關係繪製成圖 3.3。於是我們發現，無論一開始任意給定的 Diffy 八邊形 D_0 是什麼，也無論這個 D_0 會運算到哪一種 D'_0 ，最後都會有一條路徑可以收斂至 0，因此我們先以「窮舉」的方式，說明了任意一種 Diffy 八邊形 D_0 ，會先跑到 36 個可能的 D'_0 的其中一個，然後最終都會收斂至 0。



(圖 3.3 : Diffy 八邊形的收斂路徑圖)

如果是用窮舉畫圖的方式，不難看出所有的 Diffy 八邊形必定收斂至 0，但是如果 Diffy n 邊形的邊數很大的時候，那麼窮舉畫圖顯然就不是好方法了。因此接下來我們將會給出一個比較適合的證明方法，來證明所有的 Diffy 八邊形必定收斂至 0。而之後，我們會說明，利用這個證明方法，可以推得所有 Diffy 2^k 邊形必定收斂至 0。

【引理 3.2】 令 $a, b \in \{0,1\}$ ，則恆有 $a + b \equiv a - b \pmod{2}$ 。

(a, b)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$a + b \pmod{2}$	0	1	1	$2 \equiv 0$
$a - b \pmod{2}$	0	$-1 \equiv 1$	$-1 \equiv 1$	0

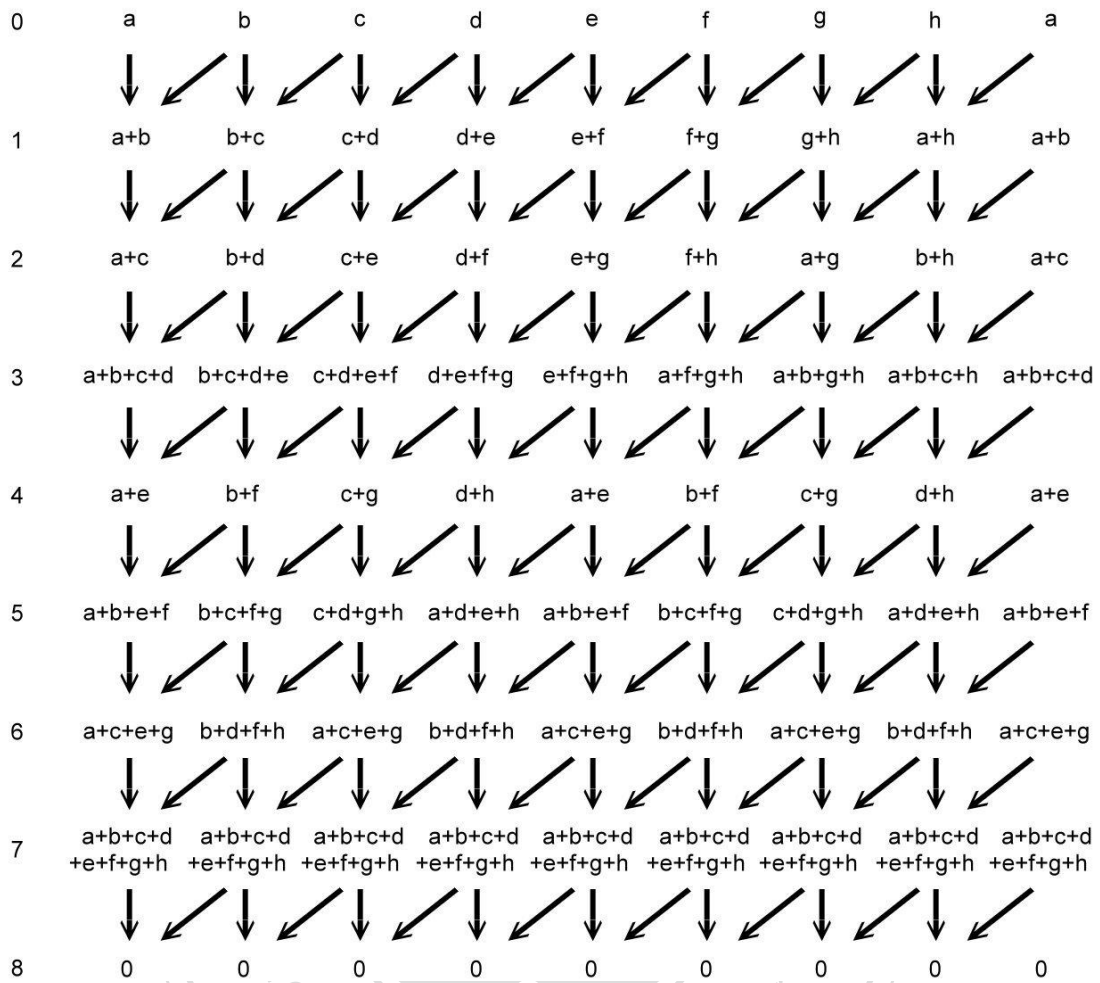
所以，當在八邊形上所有數字皆為 0 或 1 時，在做相減取絕對值的運算時，可以視為在做相加後同餘 2 的運算，也可以視為奇偶數之間的加減運算，亦可視為在整數加法群 \mathbb{Z}_2 內的運算。

【定理 3.3】 令 $D'_0 = [a, b, c, d, e, f, g, h]$ 為一個 Diffy 八邊形，其中所有字母皆為 0 或 1。則該八邊形必定會在 8 步內收斂至 0，即 $l(D'_0) \leq 8$ 。

[證明]

因為引理 3.2，我們可以把所有相減取絕對值的運算，換成相加後同餘 2 的運算，其結果不變。於是我們可以畫成如下圖 3.4 的樣子，其中兩個箭頭所指向的數字，代表它的上兩個數字相加後同餘 2 的結果。例如，在第一步到第二步中的 $a + b$ 與 $b + c$ ，因為兩者相加後變成 $a + 2b + c$ ，經過同餘 2 的運算後，無論 b 一開始是 0 或 1 都會被化簡掉，最後剩下 $a + c$ ，其他的狀況也是同理。因此，如下圖所示，無論 $D'_0 = [a, b, c, d, e, f, g, h]$ 是怎麼組成的，其必定會經過至多 8 次運算後收斂至 0。

運算次數



(圖 3.4：證明 Diffy 八邊形必會在 8 步內收斂至 0)

在定理 3.3 的證明中，除了使用到在整數加法群 \mathbb{Z}_2 內一個特別的運算性質之外，其實也用到了一點二項式定理與巴斯卡三角形的概念。而這些概念我們將會在探討 Diffy 2^k 邊形時詳細說明。

至此，我們已經證明了，給定任意一個 Diffy 八邊形，它的運算過程必定會呈現如下的狀況：

1. 經過多次運算之後，會變成頂點上的數字僅由 0 和一個正整數 α 組成的八邊形，等同於形成了一個僅由 0 和正整數 α 組成的 8 個元素的數列。
2. 因為縮放相似性質，我們可以化簡成一個頂點上的數字僅由 0 和 1 所組成的八邊形，等同於化簡成一個僅由 0 和 1 所組成的八個元素的數列，進而成為 36 個可能的 Diffy 八邊形中的其中一個。
3. 因為定理 3.3，這個八邊形必定會在至多 8 步內收斂至 0。



第四章 Diffy 2^k 邊形

在前面一章，我們說明了任意的 Diffy 八邊形必定會收斂至 0，而在前言我們也提到了任意的 Diffy 四邊形也會收斂至 0。於是我們開始思考，既然四邊形與八邊形都收斂至 0 了，那麼是不是 Diffy 十六邊形也會收斂呢？又或者其實所有邊數為 2 的幕次的 Diffy 2^k 邊形都會收斂至 0 呢？所以接下來我們開始討論一般的 Diffy 2^k 邊形，是否會有一樣的性質。

在開始證明是否所有 Diffy 2^k 邊形都會收斂至 0 之前，我們先介紹一些在證明過程中會用到的工具。

【定義 4.1】如右圖所示，由最上方開始，令最上方的 1 是第 0 行，而下一行的 1、1 為第一行，第二行之後的每個數字都是它左上方和右上方的數字的和，依此類推所形成的由正整數構成的三角形，稱做巴斯卡三角形。

行數																
0									1							
1								1	1							
2								1	2	1						
3								1	3	3	1					
4								1	4	6	4	1				
5								1	5	10	10	5	1			
6								1	6	15	20	15	6	1		
7								1	7	21	35	35	21	7	1	
8								1	8	28	56	70	56	28	8	1

【引理 4.2】 $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n x^{n-i} y^i$ ，該式子即為二項式定理。

【引理 4.3】在巴斯卡三角形中的第 k 行的數字，即為二項式 $(x + y)^k$ 展開後的各項係數。（例如巴斯卡三角形中第三行依序為 1、2、1，對應 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 的係數）

【定理 4.4】巴斯卡三角形中第 $2^k - 1$ 行的所有數字必定為奇數，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。

[證明]

根據引理 4.3，第 $2^k - 1$ 行的所有數字為 $(x + y)^{2^k - 1} = \sum_{i=0}^{2^k - 1} C_i^{2^k - 1} x^{2^k - 1 - i} y^i$ 的係數，所以我們必須證明，對所有的 $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ， $C_i^{2^k - 1}$ 是奇數就完成證明了。

$$C_i^{2^k - 1} = \frac{(2^k - 1)(2^k - 2) \cdots (2^k - i)}{1 \times 2 \times \cdots \times i} = \frac{2^k - 1}{1} \times \frac{2^k - 2}{2} \times \cdots \times \frac{2^k - i}{i}$$
$$= \prod_{j=1}^i \frac{2^k - j}{j}$$

令 $j = \alpha \cdot 2^m$ ，其中 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $\alpha \in \mathbb{N}$ 是一個奇數，表示把 j 做了因數分解後，分解成 2 的冪次與一些奇數的乘積，則 $\frac{2^k - j}{j} = \frac{2^k - \alpha \cdot 2^m}{\alpha \cdot 2^m} = \frac{2^m(2^{k-m} - \alpha)}{\alpha \cdot 2^m} = \frac{2^{k-m} - \alpha}{\alpha}$ 。

因為 α 是一個奇數，所以 $2^{k-m} - \alpha$ 必定是一個奇數，那麼 $C_i^{2^k - 1} = \prod_{j=1}^i \frac{2^k - j}{j}$ 就會變成許多個分子與分母都是奇數的分數做相乘，則 $C_i^{2^k - 1}$ 必定會變成一個分子與分母都是奇數的分數，奇數除奇數的結果亦為奇數，所以 $C_i^{2^k - 1}$ 為一個奇數，同時也說明了巴斯卡三角形中第 $2^k - 1$ 行的所有數字必定為奇數的結果。

【定理 4.5】巴斯卡三角形中第 2^k 行的所有數字必定為偶數，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。

[證明]

根據定理 4.4，巴斯卡三角形中第 $2^k - 1$ 行的所有數字必定為奇數，又因為第 2^k 行的所有數字是由其左上與右上的第 $2^k - 1$ 行的數字所相加得到，故巴斯卡三角形中第 2^k 行的所有數字必定為一個奇數加上另一個奇數，而奇數加上奇數必為偶數，所以本定理得證。

有了上述這些定理之後，我們開始討論 Diffy 2^k 邊形的情況。令

$D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2^k}]$ 為任意一個 Diffy 2^k 邊形，其中 a_i 為非負整數， $1 \leq i \leq 2^k$ 。根據第二章的內容，任意的 D_0 都可以化簡成 $D'_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2^k}]$ ，其中 $a_i \in \{0, 1\}$ ， $1 \leq i \leq 2^k$ 。接著我們給出一個定理敘述，並證明任意的 Diffy 2^k 邊形必定會收斂至 0。

【定理 4.6】 令 $D'_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2^k}]$ ，其中 $a_i \in \{0, 1\}$ ， $1 \leq i \leq 2^k$ 。則 D'_{2^k-1} 的所有元素必為 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} \pmod{2}$ ，且 D'_{2^k} 的所有元素必為 0。換句話說，任意一個由 0 和 1 組成的 Diffy 2^k 邊形必定會在 2^k 步內收斂至 0，即 $l(D'_0) \leq 2^k$ 。

[證明]

首先，根據引理 3.2，所有相減取絕對值的運算，都可以視為在做相加後同餘 2 的運算，也就是在整數加法群 \mathbb{Z}_2 內的運算。故我們假設現在所有運算都在整數加法群 \mathbb{Z}_2 內計算。

$$\begin{aligned} \Rightarrow D'_1 &= [a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{2^k-1} + a_{2^k}, a_{2^k} + a_1] \\ &= [C_0^1 a_1 + C_1^1 a_2, C_0^1 a_2 + C_1^1 a_3, \dots, C_0^1 a_{2^k-1} + C_1^1 a_{2^k}, C_0^1 a_{2^k} + C_1^1 a_1] \\ \Rightarrow D'_2 &= [a_1 + 2a_2 + a_3, a_2 + 2a_3 + a_4, \dots, \\ &\quad a_{2^k-1} + 2a_{2^k} + a_1, a_{2^k} + 2a_1 + a_2] \\ &= [C_0^2 a_1 + C_1^2 a_2 + C_2^2 a_3, C_0^2 a_2 + C_1^2 a_3 + C_2^2 a_4, \dots, \\ &\quad C_0^2 a_{2^k-1} + C_1^2 a_{2^k} + C_2^2 a_1, C_0^2 a_{2^k} + C_1^2 a_1 + C_2^2 a_2] \\ \Rightarrow D'_3 &= [a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4, a_2 + 3a_3 + 3a_4 + a_5, \dots, \\ &\quad a_{2^k-1} + 3a_{2^k} + 3a_1 + a_2, a_{2^k} + 3a_1 + 3a_2 + a_3] \\ &= [C_0^3 a_1 + C_1^3 a_2 + C_2^3 a_3 + C_3^3 a_4, C_0^3 a_2 + C_1^3 a_3 + C_2^3 a_4 + C_3^3 a_5, \dots, \\ &\quad C_0^3 a_{2^k-1} + C_1^3 a_{2^k} + C_2^3 a_1 + C_3^3 a_2, C_0^3 a_{2^k} + C_1^3 a_1 + C_2^3 a_2 + C_3^3 a_3] \end{aligned}$$

依此類推，我們可以發現，當計算到 D'_i 時，它裡面的每個元素中的各項係數，都會形成像巴斯卡三角形中的第 i 行的數字，也就是形如二項式 $(x + y)^k$ 展開後的各項係數。

我們依序這個規則，當算到第 $2^k - 1$ 步時，也就是算出 D'_{2^k-1} 時，有以下結果：

D'_{2^k-1} 的第一個元素為 $C_0^{2^k-1}a_1 + C_1^{2^k-1}a_2 + \cdots + C_{2^k-2}^{2^k-1}a_{2^k-1} + C_{2^k-1}^{2^k-1}a_{2^k}$

D'_{2^k-1} 的第二個元素為 $C_0^{2^k-1}a_2 + C_1^{2^k-1}a_3 + \cdots + C_{2^k-2}^{2^k-1}a_{2^k} + C_{2^k-1}^{2^k-1}a_1$

.....

D'_{2^k-1} 的第 $2^k - 1$ 個元素為

$C_0^{2^k-1}a_{2^k-1} + C_1^{2^k-1}a_{2^k} + \cdots + C_{2^k-2}^{2^k-1}a_{2^k-3} + C_{2^k-1}^{2^k-1}a_{2^k-2}$

D'_{2^k-1} 的第 2^k 個元素為

$C_0^{2^k-1}a_{2^k} + C_1^{2^k-1}a_1 + \cdots + C_{2^k-2}^{2^k-1}a_{2^k-2} + C_{2^k-1}^{2^k-1}a_{2^k-1}$

根據定理 4.4，因為對所有 $i = 0, \dots, 2^k - 1$ ， $C_i^{2^k-1}$ 是奇數，

所以在整數加法群 \mathbb{Z}_2 內，

D'_{2^k-1} 的第一個元素可化簡為 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k-1} + a_{2^k}$

D'_{2^k-1} 的第二個元素可化簡為 $a_2 + \cdots + a_{2^k-1} + a_{2^k} + a_1$

依此類推，我們便算出，在 D'_{2^k-1} 內的每一個元素都是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k-1} + a_{2^k}$ ，

因此它的下一步 D'_{2^k} 就會變成一個所有元素必為 0 的數列了，也就是 D'_{2^k} 必定收斂至 0，證畢。

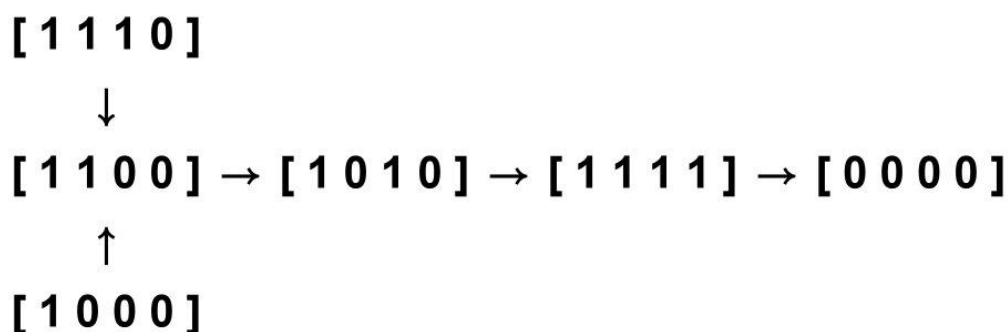
至此，我們可以像第三章一樣，總結出一個 Diffy 2^k 邊形的計算流程。若我們給定任意一個 Diffy 2^k 邊形，它的運算過程必定會呈現如下的狀況：

1. 經過多次運算之後，會變成頂點上的數字僅由 0 和一個正整數 α 組成的 2^k 邊形，等同於形成了一個僅由 0 和正整數 α 組成的 2^k 個元素的數列。
2. 因為縮放相似性質，我們可以化簡成一個頂點上的數字僅由 0 和 1 所組成的 2^k 邊形，等同於化簡成一個僅由 0 和 1 所組成的 2^k 個元素的數列。
3. 因為定理 4.6，這個 2^k 邊形必定會在至多 2^k 步內收斂至 0。

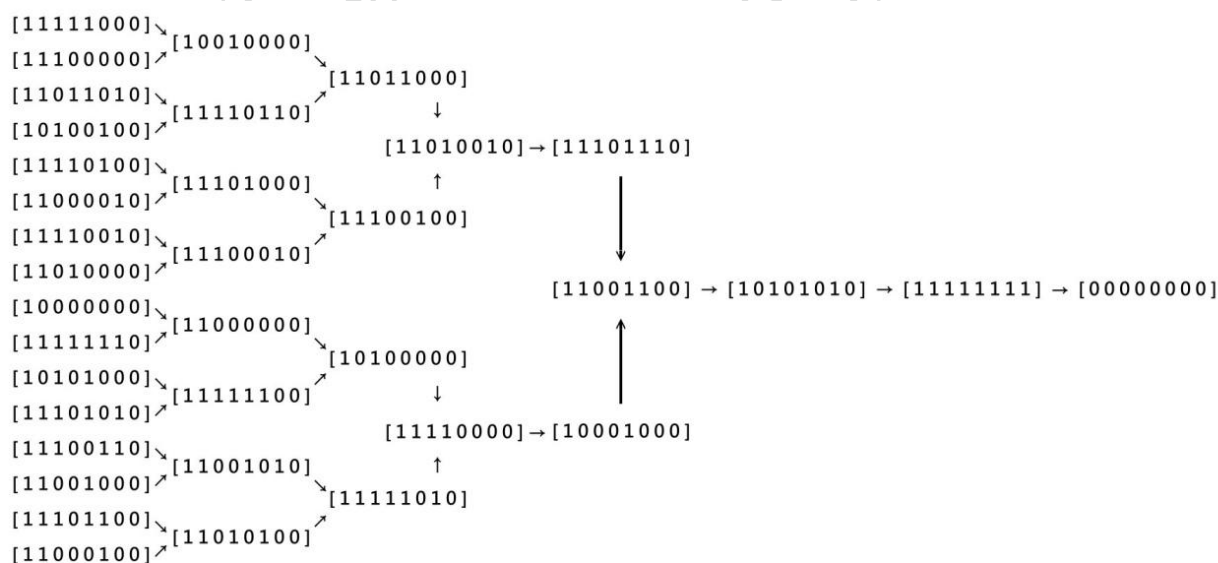
第五章 Diffy 2^k 邊形彼此間的相關性

我們已經知道，對所有的 $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, Diffy 2^k 邊形都具有「必定收斂至 0」這個性質。那麼，所有的 Diffy 2^k 邊形還有沒有其他共同擁有的性質呢？所有的 Diffy 2^k 邊形彼此間有沒有存在何種關聯性呢？

我們從探討最簡單的狀況開始，也就是討論 Diffy 四邊形與 Diffy 八邊形之間的關聯性。首先，我們先假設 Diffy 四邊形與 Diffy 八邊形都已化簡成僅由 0 和 1 組成的狀況，然後展示出他們的收斂圖，如下圖 5.1 及 5.2。



(圖 5.1：Diffy 四邊形的收斂路徑圖)

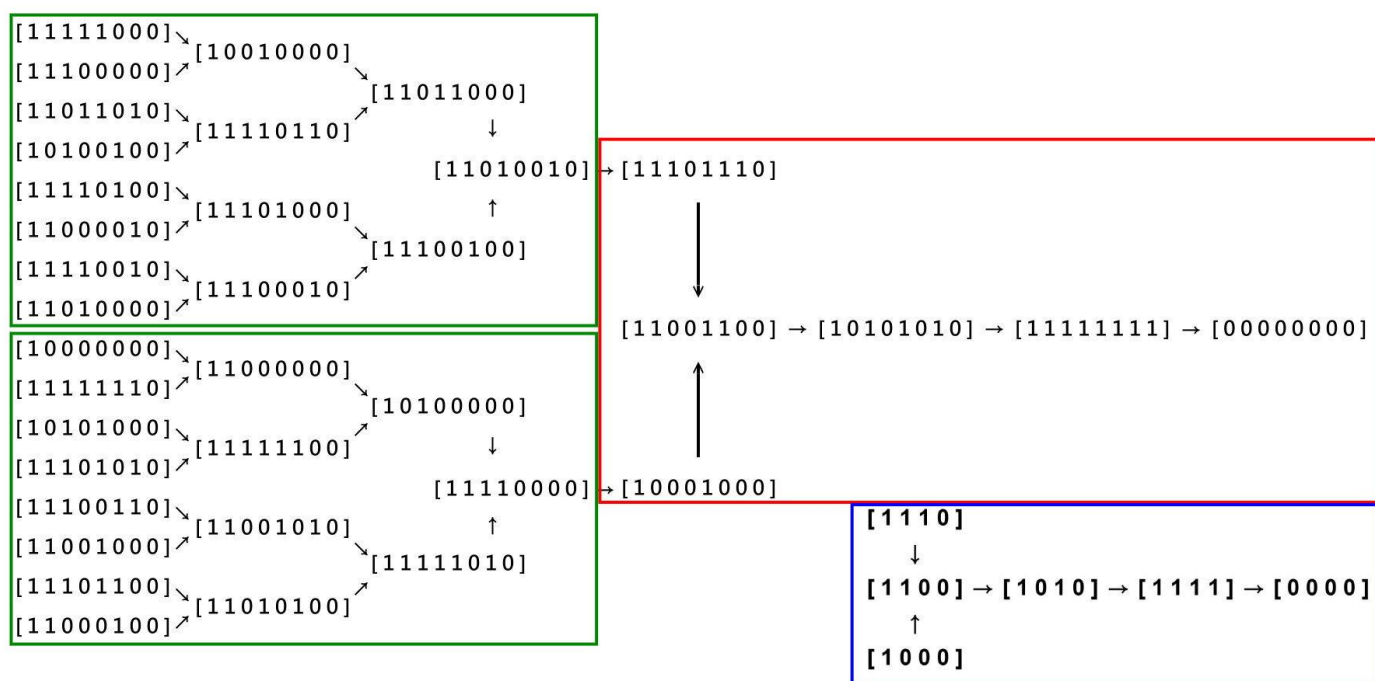


(圖 5.2：Diffy 八邊形的收斂路徑圖)

我們將這兩種收斂圖放在一起，如下圖 5.3，其中藍色框框的部分就是 Diffy 四邊形的收斂路徑圖，而紅色和綠色框框的部分則是 Diffy 八邊形的收斂路徑圖。若比較藍色框框處與紅色框框處的部分，我們可以發現，Diffy 八邊形的收斂圖中，紅色框框部分的所有八元數列，可以對應到藍色框框處中所有四元數列，而其中的關係就是，藍色框框處中某一個四元數列重複寫兩次，就會成為紅色框框中相對應位置的八元數列。

例如，藍色框框處最上方的數列 [1110]，將它重複寫兩次後，就會對應到紅色框框處相同位置（也就是最上方）的數列 [11101110]。

而剩下來的兩個綠色框框部分，我們發現，如果把每一個數列當作是一個節點，則每一個綠色框框內都各自形成了一個高度為 3，節點數為 15 的完滿二元樹（full binary tree）。



(圖 5.3：Diffy 四邊形與 Diffy 八邊形的收斂圖比較與關聯)

既然我們發現，Diffy 八邊形的收斂圖是由兩個完滿二元樹（圖 5.3 的綠色框框部分）與一個 Diffy 四邊形的路徑圖（圖 5.3 的紅色框框部分）所構成的，那麼，Diffy 十六邊形的收斂圖是否由數個完滿二元樹與一個 Diffy 八邊形的路徑

圖所構成的呢？以下我們先舉一個 Diffy 十六邊形的例子。

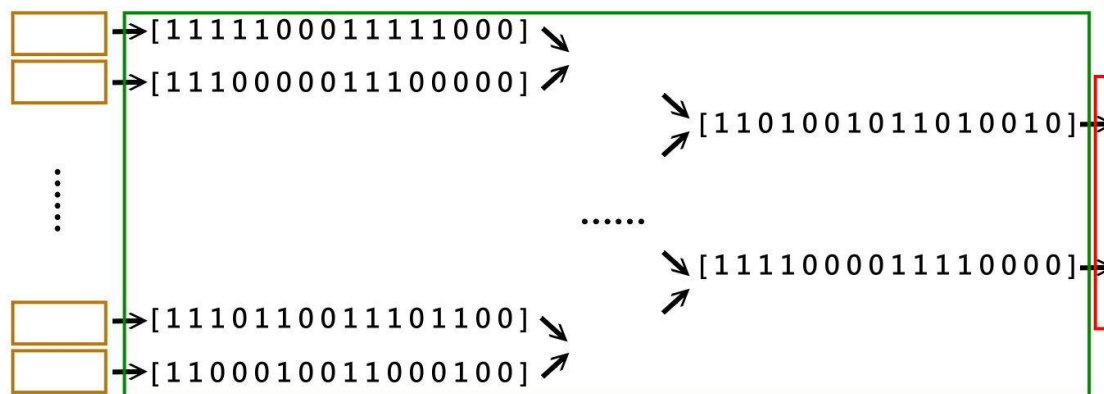
【例子 5.1】假設 $D_0 = [0110000000110111]$ ，那麼它的運算過程為：

$\rightarrow D_1 = [1010000001011001] \rightarrow D_2 = [1110000011101010]$
 $\rightarrow D_3 = [0010000100111111] \rightarrow D_4 = [0110001101000001]$
 $\rightarrow D_5 = [1010010111000011] \rightarrow D_6 = [1110111001000100]$
 $\rightarrow D_7 = [0011001011001101] \rightarrow D_8 = [0101011101010111]$
 $\rightarrow D_9 = [1111100111111001] \rightarrow D_{10} = [0000101000001010]$
 $\rightarrow D_{11} = [0001111000011110] \rightarrow D_{12} = [0010001000100010]$
 $\rightarrow D_{13} = [0110011001100110] \rightarrow D_{14} = [1010101010101010]$
 $\rightarrow D_{15} = [1111111111111111] \rightarrow D_{16} = [0000000000000000]$

當中我們觀察到以下幾件事情：

1. $D_8 = [0101011101010111]$ ，其實它就是等同於由兩個八元數列
[01010111] 寫在一起所產生的，而 D_9 、 D_{10} 、 D_{11} 也是一樣由兩個八元
數列寫在一起所產生的，分別是[11111001]、[00001010]、
[00011110]。
2. 而其中我們又發現到， $[01010111] \rightarrow [11111001] \rightarrow$
 $[00001010] \rightarrow [00011110]$ 。換言之，在 Diffy 十六邊形的收斂過
程中，會走到與 Diffy 八邊形的收斂過程中某一條相同的路徑。(可對照圖
5.2 最左邊那一直排，由上往下數的第 12 個數列開始)
3. $D_{12} = [0010001000100010]$ ，其實它就是等同於由四個四元數列
[0010] 寫在一起所產生的，而 D_{13} 、 D_{14} 、 D_{15} 、 D_{16} 也是一樣由四個四元
數列寫在一起所產生的，分別是[0110]、[1010]、[1111]、[0000]。
4. 而其中我們又發現到， $[0010] \rightarrow [0110] \rightarrow [1010] \rightarrow [1111] \rightarrow$
 $[0000]$ 。換言之，在 Diffy 十六邊形的收斂過程中，會走到與 Diffy 四邊
形的收斂過程某一條相同的路徑。(可對照圖 5.1)

根據上面的例子，我們可以試著做一點猜測：Diffy 十六邊形的收斂圖可能與 Diffy 八邊形很相似，收斂圖的前面是很多個完滿二元樹，之後每一個完滿二元樹的樹頂都會連接到 Diffy 八邊形的收斂圖之中最前面的其中一個數列，之後再連接到 Diffy 四邊形的收斂圖，最後收斂至 0。可以參考下圖 5.4。



很多個大小一樣的完滿二元樹。

與Diffy八邊形的狀況下，長的完全一樣的收斂路徑圖，皆為兩個完滿二元樹的樣子。



與Diffy四邊形的狀況下，長的完全一樣的收斂路徑圖。

(圖 5.4：Diffy 十六邊形的收斂路徑圖之猜測)

現在，我們試著驗證這個 Diffy 十六邊形收斂路徑圖的猜想是否正確。

首先，根據引理 3.1，在旋轉視為同一個，翻轉視為不同個的狀況下，把所有可能的 Diffy 十六邊形的個數算出來，其可能個數為 4116 種。另外註記，Diffy 四邊形的可能個數為 6 種，Diffy 八邊形的可能個數為 36 種。

觀察 Diffy 八邊形的收斂圖，它是由兩個高度為 3，節點數為 15 的完滿二元樹，加上一個有 6 個節點的 Diffy 四邊形的收斂圖所構成，所以整個 Diffy 八邊形共計有 $2 \times 15 + 6 = 36$ 個節點，與直接用引理 3.1 算出來的個數相符合。

接著考慮 Diffy 十六邊形的收斂圖，如果它的構造一樣是由數個完滿二元樹加上一個有 36 個節點的 Diffy 八邊形的收斂圖所構成的話，那麼它應該要符合「完滿二元樹的個數 \times 每個完滿二元樹的節點數 $+36 = 4116$ 」這個式子。

因為我們猜測，Diffy 十六邊形收斂圖前面那些完滿二元樹，之後都會分別接到 Diffy 八邊形收斂圖之中最前面的其中一個數列，而排在 Diffy 八邊形收斂圖中最前面的數列共有 16 個，所以可以得出，Diffy 十六邊形收斂圖前面的完滿二元樹個數也等於 16 個，於是我們有了「 $16 \times$ 每個完滿二元樹的節點數 $+36 = 4116$ 」這個式子，進而得到每個完滿二元樹的節點數為 255 個。

因為每一個完滿二元樹的節點數為 255 個，所以每一個完滿二元樹的高度為 $\log_2(255 + 1) - 1 = 7$ ，這是一個合理的結果。

那麼，在這裡我們先把 Diffy 四邊形、Diffy 八邊形、Diffy 十六邊形的收斂圖與其相關性做一個整理。

【定理 5.2】

- i. Diffy 四邊形共有 6 種可能的數列。
- ii. Diffy 八邊形的收斂路徑圖，是由 2 個高度為 3，節點數為 15 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 四邊形的路徑圖所構成的，故 Diffy 八邊形可能的數列個數有 $2 \times 15 + 6 = 36$ 個。
- iii. Diffy 十六邊形的收斂路徑圖，是由 16 個高度為 7，節點數為 255 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 八邊形的路徑圖所構成的，故 Diffy 十六邊形可能的數列個數有 $16 \times 255 + 36 = 4116$ 個。

由定理 5.2，可以發現到其實 Diffy 四邊形、Diffy 八邊形、Diffy 十六邊形彼此的收斂圖都有存在密切的關聯，而且如果根據收斂圖的關係來算 Diffy 2^k 邊形的數列個數的話，亦會與由引理 3.1 的 cycle index 的方法所算出來的個數相等。

接下來我們開始討論更一般的狀況，也就是討論一般的 Diffy 2^k 邊形，其中 $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ 。那麼，我們根據定理 5.2 的結果，稍微做以下的猜測：

「Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖，是由 N 個高度為 H ，節點數為 $2^{H+1} - 1$ 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 2^{k-1} 邊形的路徑圖所構成的，故 Diffy 2^k 邊形可能的數列個數有『 $N \times (2^{H+1} - 1) + \text{Diffy } 2^{k-1} \text{ 邊形可能的數列個數}$ 』這麼多個。」

如果上述的猜測正確，那麼除了我們在本章前面所猜測的 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的構造是正確的之外，也可以把 Diffy 2^k 邊形的數列個數寫成一個遞迴關係式。所以我們接下來要試著驗證上述這個推測是否正確。

【引理 5.3】令 $D_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{2^k}]$ ，其中 $a_i \in \{0, 1\}$ ， $1 \leq i \leq 2^k$ 。如果 D_0 這個數列含有奇數個 0（等同於有奇數個 1），那麼這個數列必定會在 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的最前面，並且這個數列會剛好走 2^k 步後收斂至 0，即 $l(D_0) = 2^k$ 。

[證明]

根據定理 4.6， D_{2^k-1} 的所有元素必為 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} \pmod{2}$ 。

又因為 a_i ， $1 \leq i \leq 2^k$ ，總共含有奇數個 0 與奇數個 1，

所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} \equiv 1 \pmod{2}$ ，也就是說 D_{2^k-1} 的所有元素都是 1。

最後， D_{2^k} 就會收斂至 0，得到 $l(D_0) = 2^k$ 。

因為這個含有奇數個 0 的數列 D_0 必須花 2^k 次計算才能收斂至 0，

它會比其他所有含有偶數個 0 的數列較慢收斂至 0，（對於偶數個 0 的數列，

$a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k} \equiv 0 \pmod{2}$ ，所以至多在第 $2^k - 1$ 就會收斂至 0 了）

所以含有奇數個 0 的數列就一定位於 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的最前面。

如果我們所猜測的 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的構造是正確的，那麼在 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖前面的每一個完滿二元樹的樹頂，必定要接到 Diffy 2^{k-1} 邊形收斂路徑圖最前面的那些由奇數個 0 組成的數列，而且這個連接是一對一的，所以「Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖前面的完滿二元樹個數」應該要與「由奇數個 0 組成的可能的 2^{k-1} 元數列之個數」相等。以下我們先對已經討論完的 Diffy 四邊形、Diffy 八邊形、Diffy 十六邊形做一些驗證。

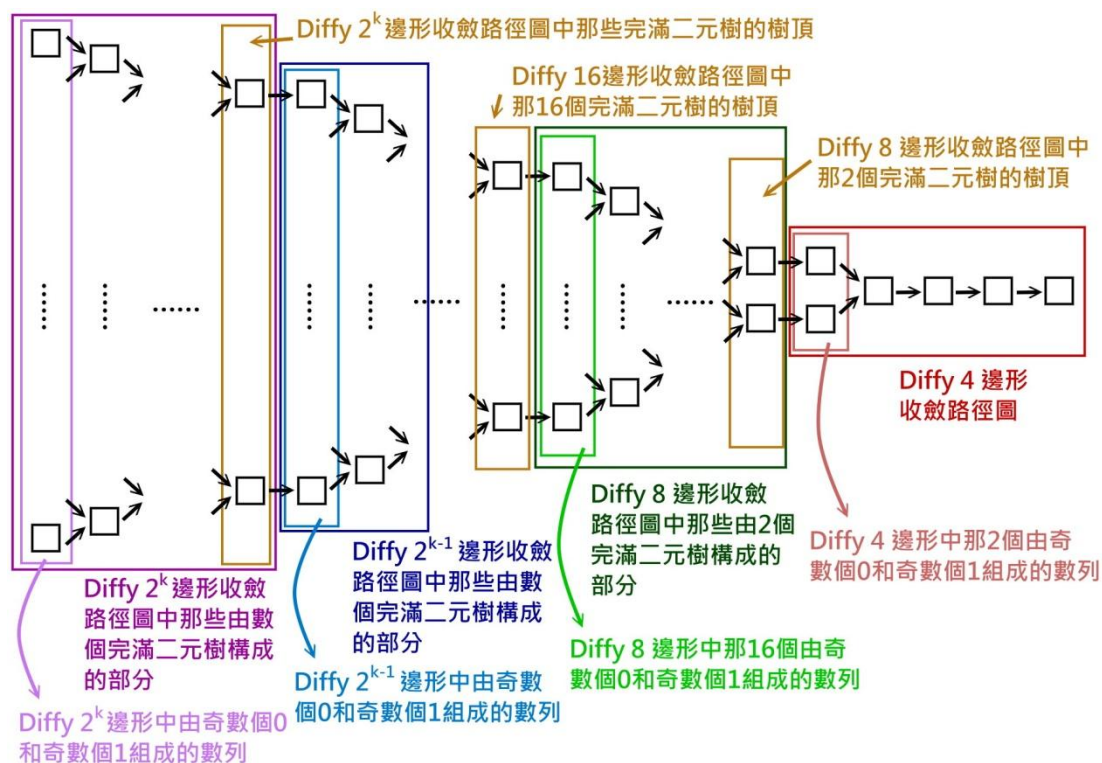
1. 在旋轉視為相同，翻轉視為不同的狀況下，由奇數個 0 組成的 Diffy 四

邊形個數有 $\frac{1}{4}(C_1^4 + C_3^4) = \frac{1}{4}\left(\frac{4!}{1! \times 3!} + \frac{4!}{3! \times 1!}\right) = 2$ 個，剛好等於 Diffy 八邊形收斂路徑圖前面的完滿二元樹個數。

2. 在旋轉視為相同，翻轉視為不同的狀況下，由奇數個 0 組成的 Diffy 八

邊形個數有 $\frac{1}{8}(C_1^8 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^8) = \frac{1}{8}\left(\frac{8!}{1! \times 7!} + \frac{8!}{3! \times 5!} + \frac{8!}{5! \times 3!} + \frac{8!}{7! \times 1!}\right) = 16$ 個，剛好等於 Diffy 十六邊形收斂路徑圖前面的完滿二元樹個數。

這樣看起來，似乎我們的猜測對於 Diffy 四邊形、Diffy 八邊形、Diffy 十六邊形是正確的。那麼接著，我們繪製下圖 5.5 來表示我們對 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的構造之猜想。



(圖 5.5：Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖之猜測)

假設這樣的收斂路徑圖構造是正確的，那麼從 Diffy 2^k 邊形可能數列之個數的角度來看的話，應該也會符合前面所提過的一個遞迴關係式，所以現在我們要把這個遞迴關係式找出來。

令 a_k 是 Diffy 2^k 邊形的數列個數，所以我們現在已經找到了以下關係：

1. $a_2 = 6$
2. $a_3 = 36 = 2 \times 15 + 6 = 2^1 \times (2^4 - 1) + a_2$
3. $a_4 = 4116 = 16 \times 225 + 36 = 2^4 \times (2^8 - 1) + a_3$

那麼，我們現在要試著找出一般項 a_k 的遞迴關係式，也就是前面提過的 $a_k = N \times (2^{H+1} - 1) + a_{k-1}$ ，然後要找出 N 和 H 要如何用 k 來表示。

首先，我們先給一個接下來會使用到的引理。

【引理 5.4】 $C_0^n + C_2^n + \cdots + C_{n-2}^n + C_n^n = C_1^n + C_3^n + \cdots + C_{n-3}^n + C_{n-1}^n = 2^{n-1}$ 。

[證明]

根據引理 4.2 提到的二項式定理，我們有以下式子：

$$(1+x)^n = C_0^n x^0 + C_1^n x^1 + \cdots + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n \quad \circ$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得到 } 2^n = C_0^n + C_1^n + \cdots + C_{n-1}^n + C_n^n \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得到 } 0 = C_0^n - C_1^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n + (-1)^n C_n^n \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 式移項得到 } C_0^n + C_2^n + \cdots + C_{n-2}^n + C_n^n = C_1^n + C_3^n + \cdots + C_{n-3}^n + C_{n-1}^n \quad \cdots \textcircled{3}$$

把③式代入①式，得到 $2^n = 2(C_0^n + C_2^n + \cdots + C_{n-2}^n + C_n^n)$ ，

$$\text{故 } C_0^n + C_2^n + \cdots + C_{n-2}^n + C_n^n = 2^{n-1} \quad \circ$$

$$\text{又因為 } \textcircled{3} \text{ 式的關係，得到 } C_1^n + C_3^n + \cdots + C_{n-3}^n + C_{n-1}^n = 2^{n-1} \quad \circ$$

有了引理 5.4 之後，我們可以開始探討遞迴關係式的部分了。

首先，Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖，是由 N 個高度為 H ，節點數為 $2^{H+1} - 1$ 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 2^{k-1} 邊形的路徑圖所構成的，再根據圖 5.5 所示， N 應該要等於「由奇數個 0 和奇數個 1 組成的 Diffy 2^{k-1} 邊形之個數」，所以，

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2^{k-1}} \times (C_1^{2^{k-1}} + C_3^{2^{k-1}} + \cdots + C_{2^{k-1}-3}^{2^{k-1}} + C_{2^{k-1}-1}^{2^{k-1}}) \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \times 2^{2^{k-1}-1} = 2^{2^{k-1}-k} \end{aligned}$$

其中上述算式的第二個等號，是利用了引理 5.4 來得到的。於是，我們成功地把 N 用 k 來表示了

接下來是 H 的部分。首先我們先思考 Diffy 2^k 邊形收斂路徑圖的前面部分的那些完滿二元樹。每一個完滿二元樹的最底部，就是那些由奇數個 1 和奇數個 0 構成的 Diffy 2^k 邊形（可參考圖 5.5 的淺粉紅色框框處），而其總共的個數為

$2^{2^{(k+1)}-1-(k+1)} = 2^{2^k-k-1}$ 個。再來我們已經知道 Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖之中完滿二元樹的個數為 $N = 2^{2^{k-1}-k}$ 個，所以每一個完滿二元樹之中，各自會包含 $(2^{2^k-k-1}) \div (2^{2^{k-1}-k}) = 2^{(2^k-k-1)-(2^{k-1}-k)} = 2^{2^k-2^{k-1}-1} = 2^{2^{k-1}-1}$ 個由奇數個 1 和奇數個 0 構成的 Diffy 2^k 邊形。既然一個完滿二元樹的最底部有 $2^{2^{k-1}-1}$ 個節點，那麼這一個完滿二元樹的高度就會等於 $\log_2(2^{2^{k-1}-1}) = 2^{k-1} - 1$ ，亦即 $H = 2^{k-1} - 1$ 。

至此，我們把一般項 a_k 的遞迴關係式找出來了，我們將其寫成一個定理。

【定理 5.5】 令 a_k 是 Diffy 2^k 邊形的可能的數列個數，其中 $k \geq 2$ ， $k \in \mathbb{N}$ ，而初始項為 $a_2 = 6$ 。則 a_k 具有一個一階線性遞迴關係式，其遞迴關係式為

$$a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)。$$

上述定理 5.5 中的遞迴關係式，除了表達每個 Diffy 2^k 邊形的「數列個數」有遞迴關係之外，連每個 Diffy 2^k 邊形的「運算構造與路徑」也有很密切的關係。

現在，我們有了 a_k 的一階遞迴關係式，那麼最後一步，就是試著把 a_k 的解找出來，也就是把 a_k 寫成一個僅與 k 有關的式子。理論上，對於一個一階遞迴關係式，及給定一個初始值，我們是可以找出 a_k 的唯一解的，但是對於我們現在討論的狀況來說，要直接使用一般解線性遞迴式的方法是非常難以計算的。不過實際上，因為 a_k 是 Diffy 2^k 邊形的可能的數列個數，所以 a_k 的解其實可以直接用引理 3.1 提到的 cycle index 的方法去處理。以下我們將其寫成一個定理。

【定理 5.6】給定一個一階線性遞迴關係式 $a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ ，

其中 $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ ，而初始項為 $a_2 = 6$ 。則 a_k 的唯一解為 $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 。

[證明]

根據引理 3.1，若 Diffy n 邊形僅由 0 和 1 構成，旋轉視為同一種，翻轉視為不同

種，那麼 Diffy n 邊形可能的個數總共有 $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) 2^{n/d}$ 種。

令 $n = 2^k$ ，則 Diffy 2^k 邊形可能的個數

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^k} \sum_{d|2^k} \varphi(d) 2^{2^k/d} \\ &= \frac{1}{2^k} (\varphi(2^0) 2^{2^k} + \varphi(2^1) 2^{2^{k-1}} + \varphi(2^2) 2^{2^{k-2}} + \dots + \varphi(2^k) 2^{2^{k-k}}) \\ &\quad (\because 2^k \text{ 的所有因數只有 } 2^0, 2^1, \dots, 2^k) \\ &= \frac{1}{2^k} (1 \times 2^{2^k} + 2^0 \times 2^{2^{k-1}} + 2^1 \times 2^{2^{k-2}} + \dots + 2^{k-1} \times 2^{2^{k-k}}) \\ &\quad (\because \forall k \in \mathbb{N}, \varphi(2^k) = 2^{k-1}, \text{ 並且 } \varphi(1) = 1) \\ &= 2^{2^k-k} + 2^{2^{k-1}-k} + 2^{2^{k-2}-(k-1)} + \dots + 2^{2^0-1} \\ &= 2^{2^k-k} + (2^{2^{k-1}-k} + 2^{2^{k-2}-(k-1)} + \dots + 2^{2^0-1}) \\ &= 2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)} \end{aligned}$$

在此假設 $k = 2$ ，那麼 Diffy 四邊形可能的個數 = $2^{2^2-2} + \sum_{i=0}^{2-1} 2^{2^i-(i+1)} = 6$ 。

也就是說，經由 cycle index 算出來的這個式子符合「 k 代入 2 會得到 6」這件事。

我們令 $a_k = 2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 接下來我們把這個解代入遞迴關係式

$a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ ，驗證看看是否 $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 這個式

子就是 a_k 的一個解。

$$a_k - a_{k-1} = \left(2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)} \right) - \left(2^{2^{k-1}-(k-1)} + \sum_{i=0}^{k-2} 2^{2^i-(i+1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{2^k-k} - 2^{2^{k-1}-(k-1)} + 2^{2^{k-1}-k} \\
&= 2^{2^k-k} - 2^{2^{k-1}-k} \\
&= (2^{2^{k-1}} - 1)(2^{2^{k-1}-k})
\end{aligned}$$

我們發現， $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 這個式子符合遞迴關係式

$a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ ，因此 $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 就是一個 a_k 的解。

又因為一個一階遞迴關係式與一個初始項可以決定出 a_k 的唯一解，

而且我們又利用 cycle index 實際找出這個式子，代入遞迴關係式而又符合等式，

所以 $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 這個式子就是 $a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ 的

唯一解。

本章節討論至此，我們探討了許多有關於 Diffy 2^k 邊形之間的關聯性，在此整理如下：

1. Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖，是由 $2^{2^{k-1}-k}$ 個高度為 $2^{k-1} - 1$ ，節點數為 $2^{2^{k-1}} - 1$ 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑圖所構成的。也就是說，Diffy 2^k 邊形與 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑圖彼此有所連接。
2. Diffy 2^k 邊形的可能的數列個數具有一個一階線性遞迴關係式

$$a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)，其中 k \geq 2, k \in \mathbb{N}，初始項為$$

$a_2 = 6$ 。也就是說，Diffy 2^k 邊形與 Diffy 2^{k-1} 邊形的數列個數彼此有所關聯。

3. Diffy 2^k 邊形的可能的數列個數有 $2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ ，而這個式子同時也是遞迴關係式 $a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ 的唯一解。

第六章 Diffy 2^k 邊形的分解與其延伸

在第五章，我們探討了 Diffy 2^k 邊形之間的相關性，也就是前章所提及的構造上與數量上之關係，而接下來我們要再針對構造這部分多做研究。在開始之前，我們先提出一個例子做為引導。

【例子 6.1】令 $D_0 = [00101001]$ 為一個 Diffy 八邊形。則它的運算過程為：
 $\rightarrow D_1 = [01111011] \rightarrow D_2 = [10001101] \rightarrow D_3 = [10010110]$
 $\rightarrow D_4 = [10111011] \rightarrow D_5 = [11001100] \rightarrow D_6 = [01010101]$
 $\rightarrow D_7 = [11111111] \rightarrow D_8 = [00000000] \rightarrow D_9 = [00000000]$

這裡要特別注意到，我們在這個例子中，運算過程預先多寫了一個 D_9 這個數列。現在，我們將其構造排成如下圖 6.1 所示，其中我們將每個數列的奇數位置的元素下方畫紅底線，而偶數位置的元素下方畫藍底線，再分別將紅色與藍色獨立出來寫成兩個新的四元數列。上述這一步驟我們稱它為「分解」。

	奇數位置的數列	偶數位置的數列
$D_0 = [00101001]$	[0110]	[0001]
↓		
$D_1 = [01111011]$	[0111]	[1101]
↓		
$D_2 = [10001101]$	[1010]	[0011]
↓		
$D_3 = [10010110]$	[1001]	[0110]
↓		
$D_4 = [10111011]$	[1111]	[0101]
↓		
$D_5 = [11001100]$	[1010]	[1010]
↓		
$D_6 = [01010101]$	[0000]	[1111]
↓		
$D_7 = [11111111]$	[1111]	[1111]
↓		
$D_8 = [00000000]$	[0000]	[0000]
↓		
$D_9 = [00000000]$	[0000]	[0000]

(圖 6.1：將一個八元數列分解成兩個四元數列)

接下來，我們針對以下兩部分進行觀察。

1. 觀察由 D_1 、 D_3 、 D_5 、 D_7 、 D_9 分解出來的那些數列，也就是觀察那些經過奇數次運算的 Diffy 八邊形的數列，可以觀察到這些數列，無論是紅色部分還是藍色部分，恰好都是 Diffy 四邊形的收斂路徑，而且當原本的 Diffy 八邊形收斂為 0 時（也就是 D_9 ），紅色部分與藍色部分也都恰好同時收斂至 0。
2. 觀察由 D_0 、 D_2 、 D_4 、 D_6 、 D_8 分解出來的那些數列，也就是觀察那些經過偶數次運算的 Diffy 八邊形的數列，可以觀察到這些數列，無論是紅色部分還是藍色部分，恰好都是 Diffy 四邊形的收斂路徑，而且當原本的 Diffy 八邊形收斂為 0 時（也就是 D_8 ），紅色部分與藍色部分也都恰好同時收斂至 0。

我們將上述說明畫製成如下圖 6.2。

運算次數	奇數位置的數列	偶數位置的數列
0	[0 1 1 0]	[0 0 0 1]
1	[0 1 1 1]	[1 1 0 1]
2	[1 0 1 0]	[0 0 1 1]
3	[1 0 0 1]	[0 1 1 0]
4	[1 1 1 1]	[0 1 0 1]
5	[1 0 1 0]	[1 0 1 0]
6	[0 0 0 0]	[1 1 1 1]
7	[1 1 1 1]	[1 1 1 1]
8	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]
9	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]

運算次數	奇數位置的數列	偶數位置的數列
0	[0 1 1 0]	[0 0 0 1]
1	[0 1 1 1]	[1 1 0 1]
2	[1 0 1 0]	[0 0 1 1]
3	[1 0 0 1]	[0 1 1 0]
4	[1 1 1 1]	[0 1 0 1]
5	[1 0 1 0]	[1 0 1 0]
6	[0 0 0 0]	[1 1 1 1]
7	[1 1 1 1]	[1 1 1 1]
8	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]
9	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]

(圖 6.2：分別對經過奇數次運算與經過偶數次運算的數列做討論)

在上面的例子中，我們將一個 Diffy 八邊形的收斂路徑，拆解成了兩組（上述例題中的紅色部分及藍色部分），共計四條 Diffy 四邊形的收斂路徑。我們將例題中的這個過程稱為「Diffy 多邊形的分解」。

例子 6.1 中所展示的，就是 Diffy 八邊形的分解過程，這個過程可以使一個 Diffy 八邊形分解成 4 個 Diffy 四邊形。那麼，是不是給定任何的 Diffy 八邊形都可以做到分解這件事呢？答案是可以的。我們將其寫成一個定理並證明之。

【定理 6.2】令 $D_0 = [a_{0,1} \ a_{0,2} \ a_{0,3} \ a_{0,4} \ a_{0,5} \ a_{0,6} \ a_{0,7} \ a_{0,8}]$ 為一個 Diffy 八邊形，其中所有元素皆為 0 或 1。現在假設以下三點：

1. $D_i = [a_{i,1} \ a_{i,2} \ a_{i,3} \ a_{i,4} \ a_{i,5} \ a_{i,6} \ a_{i,7} \ a_{i,8}]$ ，代表 D_0 經過 i 次相減取絕對值的運算後所形成的數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。
2. $X_i = [a_{i,1} \ a_{i,3} \ a_{i,5} \ a_{i,7}]$ ，代表由 D_i 這個數列中取出位在奇數位置的數字所形成的一個子數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。
3. $Y_i = [a_{i,2} \ a_{i,4} \ a_{i,6} \ a_{i,8}]$ ，代表由 D_i 這個數列中取出位在偶數位置的數字所形成的一個子數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。

則 $X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_8$ 、 $Y_0 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_4 \rightarrow Y_6 \rightarrow Y_8$ 、 $X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_5 \rightarrow X_7 \rightarrow X_9$ 、 $Y_1 \rightarrow Y_3 \rightarrow Y_5 \rightarrow Y_7 \rightarrow Y_9$ 這四條路徑皆為 Diffy 四邊形的收斂路徑，且當隨著 D_i 收斂至 0 的時候，這四條 Diffy 四邊形的收斂路徑也同時收斂至 0。

[證明]

首先我們考慮 $X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_8$ 這條路徑。

根據引理 3.2，因為所有的數皆為 0 或 1，

所以做相減取絕對值的計算等同於做相加再同餘 2 的運算。

接著，我們觀察 X_2 中的 $a_{2,1}$ 這個數字，它是由 X_1 中的 $a_{1,1}$ 和 $a_{1,2}$ 計算得到的，

$$\text{即 } a_{2,1} \equiv a_{1,1} + a_{1,2} \pmod{2},$$

其中 $a_{1,1} \equiv a_{0,1} + a_{0,2} \pmod{2}$ ， $a_{1,2} \equiv a_{0,2} + a_{0,3} \pmod{2}$ ，故

$$a_{2,1} \equiv (a_{0,1} + a_{0,2}) + (a_{0,2} + a_{0,3}) \equiv a_{0,1} + 2 \times a_{0,2} + a_{0,3} \equiv a_{0,1} + a_{0,3} \pmod{2}$$

由上面的計算可知道， X_2 中的 $a_{2,1}$ ，就是 X_0 中的 $a_{0,1}$ 和 $a_{0,3}$ 做運算後得到的。

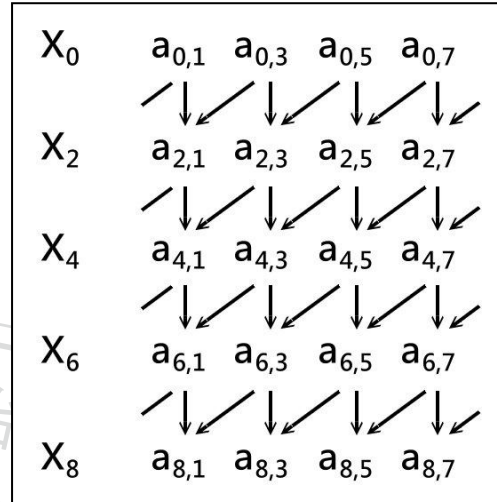
同理可知，我們也可以證明出 $a_{2,3} \equiv a_{0,3} + a_{0,5} \pmod{2}$ 、

$a_{2,5} \equiv a_{0,5} + a_{0,7} \pmod{2}$ 、 $a_{2,7} \equiv a_{0,7} + a_{0,1} \pmod{2}$ 。

最後我們發現了， X_2 其實可以直接由 X_0 做相減取絕對值的運算後得到。而如果我們繼續對之後的數列做相同的驗證，也可以證明出 X_4 可以直接由 X_2 得到、 X_6 可以直接由 X_4 得到、 X_8 可以直接由 X_6 得到。

所以 $X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_8$ 確實是一條

Diffy 四邊形的收斂路徑。



最後，以上的證明方法都可以直接套用在 $Y_0 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_4 \rightarrow Y_6 \rightarrow Y_8$ 、

$X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_5 \rightarrow X_7 \rightarrow X_9$ 、 $Y_1 \rightarrow Y_3 \rightarrow Y_5 \rightarrow Y_7 \rightarrow Y_9$ 這另外三條路徑上，

而且都可以證明出這三條路徑亦是 Diffy 四邊形的收斂路徑。

現在如果假設 D_i 已收斂至 0，則由 D_i 分解出來的 X_i 與 Y_i 也理所當然地為 0，

故這四條 Diffy 四邊形的收斂路徑最後也會收斂至 0。

現在我們已經證明了，任意一個 Diffy 八邊形，都可以分解成 4 個 Diffy 四邊形。那麼我們自然就會有一個猜測：是否任意一個 Diffy 十六邊形，都可以分解成數個 Diffy 八邊形呢？如果可以，那是否任意一個 Diffy 2^k 邊形，都可以分解成數個 Diffy 2^{k-1} 邊形呢？事實上這個問題的答案也是正確的，我們將這個結果與證明過程寫成定理，其敘述與定理 6.2 有非常多的相似之處。

【定理 6.3】令 $D_0 = [a_{0,1} \ a_{0,2} \ \cdots \ a_{0,2^{k-1}} \ a_{0,2^k}]$ 為一個 Diffy 2^k 邊形，其中所有元素皆為 0 或 1。現在假設以下三點：

1. $D_i = [a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,2^{k-1}} \ a_{i,2^k}]$ ，代表 D_0 經過 i 次相減取絕對值的運算後所形成的數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。
2. $X_i = [a_{i,1} \ a_{i,3} \ \cdots \ a_{i,2^{k-3}} \ a_{i,2^{k-1}}]$ ，代表由 D_i 這個數列中取出位在奇數位置的數字所形成的一個子數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。
3. $Y_i = [a_{i,2} \ a_{i,4} \ \cdots \ a_{i,2^{k-2}} \ a_{i,2^k}]$ ，代表由 D_i 這個數列中取出位在偶數位置的數字所形成的一個子數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。

則 $X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{2^{k-2}} \rightarrow X_{2^k}$ 、 $Y_0 \rightarrow Y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{2^{k-2}} \rightarrow Y_{2^k}$ 、
 $X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{2^{k-1}} \rightarrow X_{2^{k+1}}$ 、 $Y_1 \rightarrow Y_3 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{2^{k-1}} \rightarrow Y_{2^{k+1}}$ 這四條路徑皆為 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑，且當隨著 D_i 收斂至 0 的時候，這四條 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑也同時收斂至 0。

[證明]

我們可以使用如同定理 6.2 的證明過程。我們考慮 X_2 中的 $a_{2,1}$ ，則 $a_{2,1} \equiv (a_{0,1} + a_{0,2}) + (a_{0,2} + a_{0,3}) \equiv a_{0,1} + 2 \times a_{0,2} + a_{0,3} \equiv a_{0,1} + a_{0,3} \pmod{2}$ 也就是說， X_2 中的 $a_{2,1}$ ，就是 X_0 中的 $a_{0,1}$ 和 $a_{0,3}$ 做運算後得到的。

同理可知，我們也可以證明出 $a_{2,3} \equiv a_{0,3} + a_{0,5} \pmod{2}$ 、 \cdots 、

$a_{2,2^{k-3}} \equiv a_{0,2^{k-3}} + a_{0,2^{k-1}} \pmod{2}$ 、 $a_{2,2^{k-1}} \equiv a_{0,2^{k-1}} + a_{0,1} \pmod{2}$ 。

所以， X_2 其實可以直接由 X_0 做相減取絕對值的運算後得到。

同樣地，我們可以證明出 X_4 可以直接由 X_2 得到、 X_6 可以直接由 X_4 得到、 \cdots 、

$X_{2^{k-4}}$ 可以直接由 $X_{2^{k-2}}$ 得到、 X_{2^k} 可以直接由 $X_{2^{k-2}}$ 得到。

所以 $X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{2^{k-2}} \rightarrow X_{2^k}$ 確實是一條 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑。

再來，以上的證明方法全都可以套用在另外三條路徑上，

而且都可以證明這三條路徑亦是 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑。

現在如果假設 D_i 已收斂至 0，則由 D_i 分解出來的 X_i 與 Y_i 也理所當然地為 0，

故這四條 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑最後也會收斂至 0。

【定理 6.4】給定任意一個由 0 和 1 所組成的 Diffy 2^k 邊形，它必定可以分解成 4^u 個 Diffy 2^{k-u} 邊形，其中 $u \in \mathbb{N}$ ， $1 \leq u \leq k - 2$ 。

[證明]

根據定理 6.3，任意一個 Diffy 2^k 邊形，都可以分解成 4 個 Diffy 2^{k-1} 邊形。

接著，這 4 個 Diffy 2^{k-1} 邊形，每一個都可以再各自分解成 4 個 Diffy 2^{k-2} 邊形，也就是總共可以分解出 16 個 Diffy 2^{k-2} 邊形。

依此類推，當我們重複進行分解，運行了 u 次之後，

就可以分解出共計 4^u 個 Diffy 2^{k-u} 邊形。

至此，我們已經證明了，任何的 Diffy 2^k 邊形都可以進行分解，把它分解成數個邊數為 2 的冪次的 Diffy 多邊形。而這個分解的動作，也可以看成是一種化簡的行為。對於一個邊數較多的 Diffy 多邊形，要分析它的構造或是性質可能會比較複雜，但如果它的邊數為 2 的冪次，則可以根據定理 6.4，將其分解成數個邊數較少、結構較為簡單的 Diffy 多邊形，然後對簡單的 Diffy 多邊形進行研究，而這些簡單的 Diffy 多邊形所具有的性質，最後都可以做統合，回推到原本較複雜的 Diffy 多邊形上面，得知到原本複雜的 Diffy 多邊形亦具有相同的特性。

而對於 Diffy 2^k 邊形來說，因為 Diffy 2^k 邊形彼此間的「構造」具有很強的相似性，彼此間的「數量」也具有一個明確的遞迴式，所以不難想像 Diffy 2^k 邊形可以做分解，可以先觀察 Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖中局部的小部分，然後再回推到整個 Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖上。

接下來我們思考，既然 Diffy 2^k 邊形可以做分解，那麼我們稍做延伸，對於一般的 Diffy n 邊形（這裡的邊數將不限於 2 的冪次），是不是也可以做分解呢？答案是肯定的，但並不是隨意地分解都能夠成功，以下我們來看一個例子。

【例子 6.5】令 $D_0 = [011011111101]$ 為一個 Diffy 十二邊形。則它的前 12 步的運算過程為：

$$\begin{aligned} \rightarrow D_1 &= [101100000111] \rightarrow D_2 = [110100001000] \\ \rightarrow D_3 &= [011100011001] \rightarrow D_4 = [100100101011] \\ \rightarrow D_5 &= [101101111100] \rightarrow D_6 = [110110000101] \\ \rightarrow D_7 &= [011010001110] \rightarrow D_8 = [101110010010] \\ \rightarrow D_9 &= [110010110111] \rightarrow D_{10} = [010111011000] \\ \rightarrow D_{11} &= [111001101000] \rightarrow D_{12} = [001010111001] \end{aligned}$$

我們觀察發現， $D_4 = D_8 = D_{12}$ ，也就是說它在第 4 步時進入循環，其循環長度為 4。這時，可參考下圖 6.3。如果我們使用與之前相同的分解方式，以及使用同樣定義的符號 X_i 與 Y_i ，去分解出四個 Diffy 六邊形的話，那麼我們發現，

$$\begin{aligned} X_0 \rightarrow X_2 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6 \rightarrow X_8 \rightarrow X_{10} \rightarrow X_{12} \quad , \quad Y_0 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_4 \rightarrow Y_6 \rightarrow Y_8 \rightarrow Y_{10} \rightarrow Y_{12} \quad , \\ X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_5 \rightarrow X_7 \rightarrow X_9 \rightarrow X_{11} \quad , \quad Y_1 \rightarrow Y_3 \rightarrow Y_5 \rightarrow Y_7 \rightarrow Y_9 \rightarrow Y_{11} \end{aligned}$$

這四條路徑都是 Diffy 六邊形的運算過程，其中 $X_0 = X_4 = X_8 = X_{12}$ 、
 $Y_4 = Y_8 = Y_{12}$ 、 $X_3 = X_7 = X_{11}$ 、 $Y_5 = Y_9$ 。

也就是說在這 4 條 Diffy 六邊形的運算過程中，出現了與 Diffy 十二邊形相似的循環狀況，當原本的 Diffy 十二邊形進入長度為 4 的循環之後，這 4 個 Diffy 六邊形也開始進入循環，而他們的循環長度皆為 2。



(圖 6.3 : Diffy 十二邊形分解成 4 個 Diffy 六邊形的狀況)

現在我們使用與以前相似的分解方式，嘗試將這個 Diffy 十二邊形分解出數個 Diffy 四邊形。我們令每個數列最左邊的數字所在的位置為第一個序位，而最右邊的數字則為第十二個序位。現在我們將每個數列之中，所有第 1、4、7、10 序位的元素下方畫紅底線（也就是那些序位是除 3 餘 1 的位置），所有第 2、5、8、11 序位的元素下方畫藍底線（也就是那些序位是除 3 餘 2 的位置），所有第 3、6、9、12 序位的元素下方畫綠底線（也就是那些序位是除 3 餘 0 的位置），再分別將三種顏色獨立出來寫成三個新的四元數列。接著，我們觀察以下三個部分：

1. 觀察那些從「經過 t 次運算的 Diffy 十二邊形的數列」中分解出來的 Diffy 四邊形的數列，其中的 $t \equiv 0 \pmod{3}$ ，也就是觀察 D_0 、 D_3 、 D_6 、 D_9 、 D_{12} 。
2. 同 1，但其中的 $t \equiv 1 \pmod{3}$ ，也就是觀察 D_1 、 D_4 、 D_7 、 D_{10} 。
3. 同 1，但其中的 $t \equiv 2 \pmod{3}$ ，也就是觀察 D_2 、 D_5 、 D_8 、 D_{11} 。

經過分解之後，我們可以找出 9 條路徑，可參考下圖 6.4。但是，這 9 條路徑全部都不是 Diffy 四邊形的收斂路徑，也就是說，我們給的這個 Diffy 十二邊形的例子，無法分解成數個 Diffy 四邊形。



(圖 6.4：Diffy 十二邊形分解成 9 個 Diffy 四邊形的狀況)

在例子 6.5 中，探討了一個 Diffy 十二邊形的分解可行性，發現了它可以分解出 4 個 Diffy 六邊形，但不能分解出 9 個 Diffy 四邊形。實際上，Diffy 十二邊形還可以做另一種例子 6.5 中未提及的分解方式，就是把它分解成 16 個 Diffy 三角形，只要使用類似的方法就可以做到。

那麼，給定一個任意的 Diffy n 邊形， $n \geq 3$ ，要如何去判斷這個 Diffy n 邊形可以怎麼分解呢？以下我們將這個答案與證明寫成定理。

【定理 6.6】令 $D_0 = [a_{0,1} \ a_{0,2} \ \cdots \ a_{0,n-1} \ a_{0,n}]$ 為一個 Diffy n 邊形，其中所有元素皆為 0 或 1。現在假設以下兩點：

1. $D_i = [a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,n-1} \ a_{i,n}]$ ，代表 D_0 經過 i 次相減取絕對值的運算後所形成的數列，其中 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。
2. 令 $m \in \mathbb{N}$ 為一個 2 的冪次方，且 $m|n$ 。定義

$$X_{i,t} = [a_{i,t} \ a_{i,t+m} \ a_{i,t+2m} \ \cdots \ a_{i,t+(j-1)m} \ a_{i,t+jm}] , \text{ 其中 } t \leq m, t \in \mathbb{N},$$

$$j \leq \frac{n}{m} - 1, j \in \mathbb{N} . \text{ 則 } X_{i,t} \text{ 是一個由 Diffy } n \text{ 邊形分解出來的 Diffy } \frac{n}{m} \text{ 邊形。}$$

我們找出以下 m^2 條路徑：

$$\begin{aligned} X_{0,t} &\rightarrow X_{m,t} \rightarrow X_{2m,t} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{jm,t} \rightarrow X_{(j+1)m,t} , \\ X_{1,t} &\rightarrow X_{1+m,t} \rightarrow X_{1+2m,t} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{1+jm,t} \rightarrow X_{1+(j+1)m,t} , \\ &\dots\dots \\ X_{m-1,t} &\rightarrow X_{(m-1)+m,t} \rightarrow X_{(m-1)+2m,t} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{(m-1)+jm,t} \rightarrow X_{(m-1)+(j+1)m,t} \end{aligned}$$

其中 $t \leq m, t \in \mathbb{N}$ 。則我們有以下結論：

- i. 這 m^2 條路徑皆為 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形的路徑。
- ii. 如果 D_i 最後將收斂至 0，則當 D_i 收斂至 0 的同時，這 m^2 條 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形的路徑也將會同時收斂至 0。
- iii. 如果 D_i 最後將進入循環，則當 D_i 進入循環的同時，這 m^2 條 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形的路徑也將會同時進入循環。

[證明]

如同我們在定理 6.2 及定理 6.3 的證明類似。

首先我們先考慮 $X_{0,1} \rightarrow X_{m,1} \rightarrow X_{2m,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{jm,1} \rightarrow X_{(j+1)m,1}$ 這條路徑。

考慮 $X_{m,1}$ 中的 $a_{m,1}$ 這個元素。

我們試著證明 $a_{m,1}$ 是由 $X_{0,1}$ 中的 $a_{0,1}$ 和 $a_{0,1+m}$ 做相減取絕對值後得到的。

回到最初的 $D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \cdots$ 這條路徑上，則我們有以下式子：

$$\begin{aligned}
a_{m,1} &\equiv a_{m-1,1} + a_{m-1,2} \pmod{2} \\
&\equiv (a_{m-2,1} + a_{m-2,2}) + (a_{m-2,2} + a_{m-2,3}) \pmod{2} \\
&\equiv a_{m-2,1} + 2 \times a_{m-2,2} + a_{m-2,3} \pmod{2} \\
&\equiv a_{m-3,1} + 3 \times a_{m-3,2} + 3 \times a_{m-3,3} + a_{m-3,4} \pmod{2} \\
&\equiv \dots \\
&\equiv C_0^m a_{0,1} + C_1^m a_{0,2} + \dots + C_{m-1}^m a_{0,1+(m-1)} + C_m^m a_{0,1+m} \pmod{2} \\
&\equiv a_{0,1} + a_{0,1+m} \pmod{2}
\end{aligned}$$

(根據定理 4.4 及定理 4.5，因為 m 是 2 的幕次方，所以當 $i \neq 0, m$ 時，

C_i^m 必為偶數)

至此我們證明了 $X_{m,1}$ 中的 $a_{m,1}$ 是由 $X_{0,1}$ 中的 $a_{0,1}$ 和 $a_{0,1+m}$ 做相減取絕對後得到的。

⇒ 同樣地我們可以證明 $a_{m,1+m} \equiv a_{0,1+m} + a_{0,1+2m} \pmod{2}$ 。

⇒ 同樣地證明了 $X_{m,1}$ 中的 $a_{m,1+m}$ 是由 $X_{0,1}$ 中的 $a_{0,1+m}$ 和 $a_{0,1+2m}$ 做相減取絕對後得到的。

⇒ 依此類推， $X_{m,1}$ 中的每一個元素，都是由 $X_{0,1}$ 中的兩個元素做相減取絕對後得到的。

⇒ $X_{m,1}$ 可以直接由 $X_{0,1}$ 做相減取絕對後得到，即 $X_{0,1} \rightarrow X_{m,1}$ 這條路徑成立。

⇒ 使用同樣的證明方法，可以證明出 $X_{2m,1}$ 可以由 $X_{m,1}$ 得到、 $X_{3m,1}$ 可以由 $X_{2m,1}$ 得到、……、 $X_{(j+1)m,1}$ 可以由 $X_{jm,1}$ 得到。

⇒ $X_{0,1} \rightarrow X_{m,1} \rightarrow X_{2m,1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{jm,1} \rightarrow X_{(j+1)m,1}$ 這條路徑成立，也就是

說這一條路徑就是 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形的路徑。

⇒ 再來，將這個證明方法套用在所有 m^2 條路徑上，其結果亦成立。

⇒ 這 m^2 條路徑皆為 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形的路徑。

若假設 D_i 最終將收斂至 0，則由 D_i 分解出來的那 m^2 條路徑也理所當然地會收斂至 0；若假設 D_i 最終將進入循環，則由 D_i 分解出來的那 m^2 條路徑也理所當然地會進入循環。

【定理 6.7】給定一個 Diffy n 邊形，其中所有元素皆為 0 或 1。令 $m|n$ ，則這個 Diffy n 邊形可以分解成 m^2 個 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形，若且唯若 m 是 2 的冪次方。

定理 6.6 完整敘述了任意一個 Diffy n 邊形的分解流程，而定理 6.7 則根據定理 6.6 簡單地敘述一個 Diffy n 邊形的分解條件及結果，只要邊數有 2 的冪次方的因數存在，那麼這個 Diffy n 邊形就可以做到分解的動作。而這兩個定理也說明了，為何在例子 6.5 中，Diffy 十二邊形可分解出 4 個 Diffy 六邊形，但是不能分解出 9 個 Diffy 四邊形，因為前者的 $m = 2$ ，為 2 的冪次方，而後者的 $m = 3$ ，並不是 2 的冪次方。

另外一提，定理 6.4 也可以用定理 6.7 做解釋。定理 6.4 提到 Diffy 2^k 邊形可以分解成 4^u 個 Diffy 2^{k-u} 邊形，只要引用定理 6.7，令 $m = 2^u$ 即可。

我們再舉個簡短的例子，Diffy 二十四邊形，可以分解成 2^2 個 Diffy 十二邊形、 4^2 個 Diffy 六邊形、 8^2 個 Diffy 三角形，但是不能分解成 3^2 個 Diffy 八邊形、 6^2 個 Diffy 四邊形。至於那些可以分解的狀況，要如何做分解，只須引用定理 6.6 的流程就可以做到分解的動作。

第七章 結論與未來展望

在論文的最後，我們將本文中所有重要的結論條列如下：

1. 任意一個 Diffy n 邊形，經過多次相減取絕對值的運算，以及利用縮放相似性質後，必定會形成一個僅由 0 和 1 所構成的 Diffy n 邊形。
2. 任意一個僅由 0 和 1 所構成的 Diffy 2^k 邊形，必定會在至多 2^k 次運算內收斂至 0。
3. Diffy 2^k 邊形的收斂路徑圖，是由 $2^{2^{k-1}-k}$ 個高度為 $2^{k-1} - 1$ ，節點數為 $2^{2^{k-1}} - 1$ 的完滿二元樹，加上一個 Diffy 2^{k-1} 邊形的收斂路徑圖所構成的。
4. Diffy 2^k 邊形的可能的數列個數具有一個一階線性遞迴關係式 $a_k = a_{k-1} + (2^{2^{k-1}-k}) \times (2^{2^{k-1}} - 1)$ ，其中 $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ ，初始項為 $a_2 = 6$ 。而該遞迴關係式的解為 $a_k = 2^{2^k-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^i-(i+1)}$ 。
5. 任何一個僅由 0 和 1 所構成的 Diffy 2^k 邊形，都可以分解成 4^u 個 Diffy 2^{k-u} 邊形，其中 $u \in \mathbb{N}, 1 \leq u \leq k-2$ 。
6. 令 $m|n$ ，則任何一個僅由 0 和 1 所構成的 Diffy n 邊形，都可以分解成 m^2 個 Diffy $\frac{n}{m}$ 邊形，若且唯若 m 是 2 的幕次方。

上面條列的重要結論中，第一點是所有 Diffy n 邊形都擁有的最基礎的運算結果，第二點到第五點都是有關於 Diffy 2^k 邊形的性質，至於第六點則是延伸了第五點，將「分解」的特性套用到了部分的 Diffy n 邊形。

本論文有很大的篇幅著重於 Diffy 2^k 邊形的研究，而在第六章的最後一部分

才開始對一般的 Diffy n 邊形進行些微的論述。我們認為，「分解」這個行為也許可以幫助其他邊數的 Diffy n 邊形做一些簡化，然後再對簡化過的事物進行探討。

舉個例子，Diffy 二十邊形可以分解成 16 個 Diffy 五邊形，那麼我們可不可以只分析 Diffy 五邊形，然後再把得出的結果回推到 Diffy 二十邊形呢？又或者像第五章一樣，我們可以找出 Diffy 二十邊形的路徑圖與 Diffy 五邊形的路徑圖彼此間的關聯性呢？那數量上的關聯性呢？如果能做到這樣的事，那麼研究邊數較多的 Diffy 多邊形，可能就會變得稍微容易一些。

另外還有一類，就是邊數不包含 2 的冪次方的因數的那些 Diffy 多邊形（也可以說是邊數為奇數的那些 Diffy 多邊形），它們無法做到任何的分解，那麼這一類的 Diffy 多邊形要如何下手做分析呢？也許這是一個十分困難的問題。

以上這些問題，雖然在第六章的最後有稍微觸及一些，但是其背後要走的路程可能還非常的遠。

最後，本篇論文至此，留下了一些未來可以再繼續研究的方向。

參考文獻

- [1] M. Burmester, R. Forcade and E. Jacobs, Circles of Numbers. Glasgow Mathematical Journal, 19:115-119. (July 1978)
- [2] P. T. Bateman, Cycles of Differences of Integers. Journal of Number Theory, volume 13, 255-261. (May 1981)
- [3] 王偉名, Diffy 六邊形之探討(A Study about Diffy Hexagon). National Chengchi University, (2014)
- [4] 林亨峰, 迪菲七邊形(Diffy Heptagon). National Chengchi University, (2013)
- [5] 黃信弼, Diffy Pentagon. National Chengchi University, (2012)
- [6] 蔡秀芬, 迪菲方塊(Diffy Box). National Chengchi University, (2008)

