風險管理學報 第一卷 第二期 1999 年 11 月
Journal of Risk Management Vol.1 No.2 Nov.1999
pp.15-40

保本型變額壽險計價之評論: 理論與應用
Reviews on Pricing Variable Life Insurance with Guarantees: Theory and Applications

張士傑* (Shih-Chieh Chang)
郭怡馨** (Yi-Hsin Kuo)

摘要

本研究探討保本型變額人壽保險純保險費的計價，應用財務精算模型評價附有最低保證給付的變額壽險，主要利用金融市場中保本型基金選擇權的財務計價理論，配合人壽保險死亡風險分攤的特性建構計價模型，本文回顧現階段保本型變額人壽保險的文獻發展並介紹此類保險的給付型態，分別利用公式解或數值方法求得躉繳及分期繳型式的保險費率，最終以台灣股價加權指數為此保險參考的投資標的進行數值分析，探討金融環境及保證條件變動下，相對於保本型變額人壽保險費率的敏感程度。

關鍵字: 純保險費、最低保證給付、選擇權、市場價值。

Abstract

This study explores some of the practical applications on evaluation of net premiums for the variable life insurance policies. Actuarial models for pricing purposes are used to valuate the variable life insurance policies with minimum guarantees. Option pricing theory and risk sharing methodology are employed to decide the market value of the premium under a specific reference portfolio. In this article, we review the current developments in this area and introduce the variable life insurance policies with minimum guarantees for researchers and practitioners. Numerical methods and the closed form solutions are employed to obtain the market premiums. Finally, the variable life insurance policies linked with Taiwan stock index are studied for numerical illustrations. Sensitivity analyses of the premiums under plausible scenarios are explored.

Keywords: Net Premium, Minimum Guarantees, Option, Market Value.

* 張士傑(Shih-Chieh Chang)，政治大學風險管理與保險學系專任副教授，Associate Professor, Dept. of Risk Management and Insurance, National Chengchi University, Taipei, Taiwan, R.O.C
** 郭怡馨(Yi-Hsin Kuo)中國人壽保險股份有限公司精算部專員，China Life Insurance, Ltd.

1. 研究背景

由於金融的自由化及國際化、大眾投資報酬意識的加強、年老生活保障需要的提高、電腦資訊的發達、以及所得資產的增加等客觀條件，使壽險保單的設計趨勢需與現實環境相互配合，才能順應國際金融的潮流，掌握市場先機及適切的競爭策略，達到企業永續經營的目標。變額壽險（Variable Life Insurance）即是因應國際金融投資環境所產生的創新保險。

早至 1950 年代變額壽險即已因應市場需求而推出。源起於歐洲壽險市場在高通貨膨脹、高利率水準及金融商品多角化等因素的衝擊下，首先推出變額壽險因應。最早的變額壽險是由歐洲荷蘭 Dewendye 保險公司於 1950 年代中期所出售，此型變額壽險稱為“荷蘭型（Dutch Design）”變額壽險。另一種型式的變額壽險則出現在英國，兩種型式之變額壽險雖皆以給付金額決定於保費投入股票市場之運用實績，但最大的差異在於前者採變動保費；後者為固定保費方式。英國變額壽險的構想是來自美國的教職員退休基金（College Retirement Equity Fund，CREF），於 1957 年底，由倫敦・愛丁堡（London Edinburg）保險公司將此構想引用在養老保險，定名為“Equitas”的變額壽險；此時造成保險業極大的震撼，1960 年代之後，「Eagle Star」、「Guardian」等保險公司均開始著手與信託公司合作，以發售此類保險。

美國於 1952 年開始有變額年金的出售，因美國證券交易委員會（Securities and Exchange Commission，以下簡稱為 SEC）認為該商品應受 1933 年有價證券法（Security Act）及 1940 年投資公司法（Investment Company Act）約束管制，1959 年美國最高法院之判決因採納 SEC 主張，使變額年金發展受到了阻礙，相對地也影響了變額壽險在美國的誕生。直至 1973 年 9 月，美國證券交易委員會曾一度發表規則 3c－4（Rule 3c－4），來排除變額壽險適用 1940 年的投資公司法，但由於共同基金業者的強烈反對，遂於 1975 年收回成命。後於 1976 年 12 月，SEC 宣佈投資公司法規則 6e－2 修正，允許變額壽險的出售。

變額壽險是美國與加拿大的稱法，英國及大部分歐洲國家稱為權益壽險（Equity Life Insurance）或權益結合型壽險（Equity-linked/Unit-linked Life Insurance）。Equity 本來係指每一個人對其共有財產分別持有的一定比率的權利（持分權）或者持有比率（持分）本身而言。而一般人壽所

稱的持分型商品（Equity Based Product），則指在構造上將大眾所投資的資金匯集而形成基金，依照投資運用的成果，將該基金的資產按照各人的持分還給投資人的一切商品而言。眾所周知的投資信託，即具有上述的基本構造。而權益結合型壽險（變額壽險）就是將投資信託的構造依其持分，將運用成果歸屬於保戶。亦即，將各保戶所繳保費的一部分匯集起來，形成一筆基金，而該基金的運用成果則成為保險給付財源，由各保戶按其持分來領取。

變額壽險是具有投資功能的保單，其主要特色在於保險給付並非固定面額，準備金與保險給付依要保人所指定之投資工具其報酬及持分情形之市價計算。其中保險給付於終身險、定期險和養老險中的死亡險部份為死亡給付，於生存險及養老險中的生存滿期金部份為生存給付；而投資工具，則可能是股票及其投資組合、債券及其投資組合、或其金融商品，如基金，其投資的風險全部轉移給被保險人。

對附有最低保證給付的變額壽險，若進一步將給付金額鎖定在保障被保險人所繳的保費、或加計一定利息時，我們稱此保險為“保本型變額壽險”（Equity-linked Life Insurance with Endogenous Minimum Guarantees）。這類型的產品或因法規、或因要保人的風險偏好，在近年來愈來愈受重視與歡迎。然而，不論是附有最低保證給付金額的變額壽險或是保本型變額壽險，保險人在投資風險上，不再是單純的將風險全部轉移給被保險人，其本身因提供最低的保證給付，使其亦涉入投資風險。

如何將附有最低保證給付金額的性質適切地量化於保費計價，而不是一味地將保費加上安全係數（Safety Margin）為我們所研究的課題，本研究主要回顧現階段保本型變額人壽保險的文獻發展，同時介紹此類保險的給付型態，嘗試透過各種不同類型保單的實際運算得到精算計價上的解釋意義。由於附有最低保證給付金額的變額壽險保單之評價，隱含著財務上選擇權的概念，保險給付是隨機過程且其保單價值的揭露是反應指定投資資產中分離帳戶（Separate Account）的市價（Market Value）報酬額，所以明顯地迥異於一般傳統壽險保單之評價。附有最低保證給付金額的變額壽險將實際投資報酬的水準反應在壽險保單上，故屬於「利率敏感型」（Interest-Rate-Sensitive）的壽險保單。此保單對市場利率、指定投資資產的報酬變動情形及最低保證給付金額等精算上的假設將明顯

地影響保單的評價。

本文共分為五節，第一節說明本論文的研究動機與目的。第二節回顧附有最低保證給付金額的變額壽險之計價研究，同時介紹此類保險的給付型態，第三節依據保險給付內容，分別對於不同繳費方式的保單摘要計價模型。第四節以台股指數為例進行數值計算；第五節結語。

2. 文獻回顧

關於附有最低保證給付金額的變額壽險之計價研究，最早見於 Brennan 與 Schwartz（1976）對躉繳及分期繳生死合險保單的研究。其後 Delbaen（1990）對平準化分期繳生死合險保單的進一步探討，Aase 與 Persson（1994）對躉繳及分期繳生存險及定期險保單做更詳細的研討，Ekern 與 Persson（1996）結合選擇權的概念考量更多新型式的保單，Bacinello 與 Ortu（1993a）則進一步將焦點放於保本型變額壽險的計價。

近幾年，許多經濟與財金學者多致力於隨機利率模式的發展與應用；因此，這樣的發展透過 Bacinello 與 Ortu（1993b）、Bacinello 與 Ortu（1994）及 Nielsen 與 Sandmann（1995, 1996）的研究，將其延伸到附有最低保證給付金額的變額壽險計價，準備金提存問題的探討則可見於 Brennan 與 Schwartz（1979），Aase 與 Persson（1994）的研究。Boyle 與 Hardy（1997）則有較詳細的探討。

以往對保本型變額壽險的研究，多將持有指定投資資產的單位數設為隨機變數，如此假設在保本型躉繳變額壽險可得到數值解;而保本型的分期繳變額壽險則無數值解，多採用模地卡羅模擬法求解，分期繳保險費的計算是假設保險公司每期以一定額度將所收之分期繳保險費投入保戶所指定的投資資產，每個時點指定投資資產的價值不同，因此每期所投資的單位數也不同，保戶所累積的單位數為隨機變數，無法利用數值方法求得進似解。本研究將保戶所持有的單位數設為常數或已知數，推導保本型分期繳保險費的模式，將單位數設為常數或已知數為依據要保人在要保時所決定欲購買的單位數，計算出精算現值，再於保險期間中分攤成分期繳的保險費，死亡給付或滿期給付時，單位數則為非隨機變數。純保險費的計價過程，首先以連續型態建構模型，為進一步修正模型使其合理化並利用數值方法進行計算，重新以離散的型式（年繳）修正保險費的計價。

3. 純保費之計價

本研究中純保險費計價模式是以 Aase 與 Persson（1994）及 Ekern 與 Persson（1996）為研究架構，為清楚介紹此創新保險，將詳細說明保費計價的基礎、定義及使用的假設，回顧財務經濟學上的套利定價理論及平賭理論來探討指定投資資產的計價結果。同時參考 Bacinello 與 Ortu（1993a）推導保本型變額壽險之純保險費計價模式，配合實際給付及繳費條件修正部份的假設，探討躉繳生存險、躉繳定期險、分期繳生存險及分期繳定期險四種基本險種於附有最低保證給付變額壽險中保本型式之計價。

3.1 定義與假設

「附有最低保證給付金額的變額壽險」是指保險人給予被保險人給付的最低保證，當被保險人所指定的投資工具之收益比保證金額低時，仍可有最低保證金額的給付。最低保證給付金額的型式，可為保證給付固定金額（該固定金額可為單一常數、亦可隨時間固定遞增，或事先約定變動的固定常數型式）、保證給付所繳保險費總額、保證給付所繳保險費再加計一定利息等。若保險人所承諾的最低保證給付金額為被保險人所繳保險費的函數時，這樣附有最低保證給付金額的變額壽險稱為「保本型變額壽險」。

首先對附有最低保證給付金額的變額壽險進行評價分析，再進一步對保本型變額壽險加以探討。本研究中所有的符號、定義方式及公式陳述皆以國際公認精算符號為參考依據，陳述如下：

T :固定的時間長度，於本文指保險期間。
T_x : x歲的人之餘命，亦即尚可存活的時間，為隨機變數。
B_t :於時間點 t 時，無風險債券的市價，$0 \le t \le T$。
${}_0B_t$: B_t於時間點 0 時的市價現值（利用無風險利率做貼現）。

N_t :於時間點 t 時，保單現金價值在指定投資資產中的持分，亦即:持有的單位數，$0 \le t \le T$。
S_t :於時間點 t 時，指定投資資產 1 單位的市價，$0 \le t \le T$。
${}_0S_t$: S_t於時間點 0 時的市價現值(利用無風險利率做貼現)。

r :無風險報酬利率。
± :資產變動的標準差。

b_t :於時間點 t 時，保險給付金額，$0 \le t \le T$ 。

G_t :於時間點 t 時，最低保證的保險金額，$0 \le t \le T$ 。

¢ :保險公司的保證利率。

(EA: x 歲時投保 T 年變額生存險的精算現值，亦即該險種之純躉繳保險費。

$(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\ \ 1}$: x 歲時投保 T 年附有最低保證給付金額/保本型變額生存險的精算現值，亦即該險種之純躉繳保險費。

$\bar{p}_t$:連續型分期繳保險費。

$\bar{P}\left[(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\ \ 1}\right]$: x 歲時投保 T 年附有最低保證給付金額/保本型變額生存險的純保費，該保費繳交次數很頻繁（連續型態）。

$P\left[(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\ \ 1}\right]$: x 歲時投保 T 年附有最低保證給付金額/保本型變額生存險的年繳純保費（繳費期間為 T 年）。

${}_t\bar{V}\left[(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\ \ 1}\right]$: x 歲時投保 T 年附有最低保證給付金額/保本型變額生存險，其於時間點 t 時的保單現金市價（連續型態）。

$(E\bar{A})_{x:\overline{T}|}^{1}$: x 歲時投保 T 年立即給付變額定期險的精算現值，亦即該險種之純躉繳保險費。

$(E\bar{A}^G)_{x:\overline{T}|}^{1}$: x 歲時投保 T 年立即給付附有最低保證給付金額/保本型變額定期險的精算現值，亦即該險種之純躉繳保險費。

$\bar{P}\left[(E\bar{A}^G)_{x:\overline{T}|}^{1}\right]$: x 歲時投保 T 年立即給付附有最低保證給付金額/保本型變額定期險的純保費，該保費繳交次數很頻繁（連續型態）。

$P\left[(E\bar{A}^G)_{x:\overline{T}|}^{1}\right]$: x 歲時投保 T 年立即給付附有最低保證給付金額/保本型變額定期險的年繳純保費（繳費期間為 T 年）。

${}_t\bar{V}\left[(E\bar{A}^G)_{x:\overline{T}|}^{1}\right]$: x 歲時投保 T 年立即給付附有最低保證給付金額/保本型變額定期險，其於時間點 t 時的保單現金市價（連續型態）。

${}_tp_x$: x 歲的人在 t 年後尚生存之機率。

q_x : x 歲的人在 1 年內死亡之機率。

${}_{t|}q_x$: x 歲的人在 x+t 歲與 x+t+1 歲之 1 年內死亡之機率。

«$_x$: x 歲人的死力（Force of Mortality），即瞬間死亡率。

$\bar{a}_{x:\overline{T}|}$:T 年定期的連續生存年金（T-Year Continuous Life Annuity）的精算現值。

$\ddot{a}_{x:\overline{T}|}$:期初付之 T 年定期生存年金（T-Year Temporary Life Annuity-Due）的精算現值。

$\bar{s}_{\overline{T}|,¢}$:利率為 δ 之 T 年定期連續型年金的精算終值。

$\ddot{s}_{\overline{T}|,¢}$:利率為 δ 之 T 年定期的期初年金的精算終值。

假設保險給付為b_*，其中*表示終止時間，亦即$b_T = b_{(t=T_x=T)}$為生存險保單於滿期時被保險人所可得之保險給付值；$b_t = b_{(t=T_x\leq T)}$為定期險保單，若被保險人於保險期間內死亡時，所可得之保險給付值。在本研究中，保險給付b_*可以藉由S_t的函數來測度，其中$b_T = b_T(S_T)$利用S_T的函數，而$b_t = b_t(S_t)$則利用S_t的函數。因為利用$S = \{S_t, t\in[0,T]\}$，所以b_*的值可由$\mathcal{F}$的資訊來決定。為簡單化起見，我們對於生存險保單的保險給付b_T有較詳細的推導，以此為主軸進而探究其他類型之保單；對於定期險的保險給付，則只需依存在生存險保單所導的結果。此乃因生存險保單保障滿期時的生存，其保險給付似歐式選擇權的概念；而定期險保單則因保障保險期間內的死亡，對固定的保險期間而言，其保險給付似連續的歐式選擇權。

折現系統是針對時間點 t 折現於時間點 0 的債券與指定投資資產的現值。

$${}_0B_t = \frac{\ }{B_t} = 1$$

其中B_t視為累積因子，$B_t^{-1} = e^{-rt}$為折現因子。

$${}_0S_t = \frac{\ }{B_t} = S_0 \cdot e \qquad (1)$$

(1)式為模式化指定投資資產的市價，我們利用標準布朗運動（A Standard Brownian Motion/Wiener Process）的假設分析資產的變動，因為假設交易於風險中立的假設，所有資產的報酬率皆為無風險利率，未來股價的現值利用無風險利率折現，為便於表示計價的過程，我們定義

$$\xi_t = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t - \frac{\mu-r}{\sigma} W_t} \quad , \forall t\in[0,T]$$

其中$\frac{\mu-r}{\sigma}$滿足 Novikov 條件。因ξ_t為標準布朗運動的平賭過程且$\xi_0 = 1$，故

$$E(\xi_t) = 1$$

$$Var(\xi_t) = e^{\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2} - 1 \quad < \infty$$

此外，我們定義等價於P的機率測度Q，

$$Q_A = E^P\left[I_A \frac{dQ}{dP}\right] = E^P\left[I_A \xi_T\right] \quad , \ A\in \mathcal{F}$$

$\P_T$為 Q關於 P的 Radon-Nikodym 導數(可參考 Björk, 1998)。

3.2 躉繳純保險費的計價

基本假設如下:

(i)死亡機率函數是連續的（Time-continuous）。此連續的假設是為使計價過程計算上較為方便。

(ii)保險人對於生存及死亡為風險中立。

(iii)金融市場及指定投資資產的模式假設。

(iv)指定投資資產的價值與被保險人的健康狀況獨立，亦即財務風險與死亡風險獨立。

(v) N_t不是隨機變數，但可隨時間的變動給予確定的值。

保險給付包含生存及死亡的不確定性。我們針對這兩個不確定性分別在其所屬的機率空間下模式化，亦即可將$(\Omega, \mathcal{F}, P)$視為乘積空間（Product Space）。我們可以將$\P_T$視為財務風險的計價規則。對生存及死亡的風險則藉由風險中立的假設，將其風險的計價規則視為“1”。因假設財務風險與生存死亡風險為相互獨立，所以在乘積空間下的計價規則為兩者風險的乘積($1 \cdot \P_t = \P_t$)。將$\P_t$做機率測度的轉換後可推得保險給付於時間點 0 時的期望現值為 $E^Q[{}_0 b_T | \mathcal{F}_t]$，同時亦考量生存與死亡風險，可得

(i)生存險保單於時間點 0 時的市價

$$(EA)_{x:\overset{\;1}{\overline{T|}}} = E^Q\left[e^{-rT} \cdot b_T\right] {}_T p_x = {}_T p_x \cdot E^Q\left[{}_0 b_T\right] \tag{2}$$

(ii)定期險保單於時間點 0 時的市價

$$\begin{aligned}(EA)^{1}_{x:\overline{T|}} &= \int_0^T E^Q\left[e^{-rt} \cdot b_t\right] \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^T E^Q\left[{}_0 b_t\right] \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt\end{aligned} \tag{3}$$

a. 生存險躉繳純保費的計價

若被保險人年齡 x 歲，投保附有最低保證給付金額的變額壽險，選擇 T 年期的生存險且滿期的保險給付為$b_T = \max\{ N_T \cdot S_T, G_T \}$，預計算其應繳之合理躉繳純保險費。其中$N_T$為滿期時所累積的單位數，即保險人應給付的單位數；$S_T$為保戶指定投資資產於時間點 T 時 1 單位的價格，所以$N_T \cdot S_T$為滿期時，保戶所指定之投資資產的總價值；而G_T則為保險人所提供的最低保證給付金額。由(2)式，知

$$(EA^G)_{x:\frac{1}{T|}} = {}_Tp_x \cdot E^Q[{}_0b_T] = {}_Tp_x \cdot E^Q[\max(N_T \cdot {}_0S_T, {}_0G_T)] \quad (4)$$

依據 Aase 與 Persson (1994)的結果，對於給定的 u' 與 v'，(4)式可表示成

$$(EA^G)_{x:\frac{1}{T|}} = {}_Tp_x\left[G_T\, e^{-rT}\int_{-\infty}^{u'}\frac{1}{\sqrt{2π}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,du + N_T\, S_0\int_{v'}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2π}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv\right] = {}_Tp_x\left[G_T\, e^{-rT}\,\Phi(u') + N_T\, S_0\,\Phi(-v')\right] \quad (5)$$

以上的計算，只是將滿期的價值貼現至時間點 0 來看，為使公式(5)更一般化，結果如下：

有最低保證給付金額之變額壽險的生存險躉繳純保險費：

$$(EA^G)_{x:\frac{1}{T|}} = {}_Tp_x\left\{G_T\, e^{-rT}\,\Phi[-{}_0d_2(T)] + S_0\, N_T\,\Phi[{}_0d_1(T)]\right\} \quad (6)$$

其中

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2π}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$$

$$_{t}d_1(s) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_s \cdot S_t}{G_s}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\cdot\sqrt{s-t}}\ , \quad s \ge t \quad (7)$$

$$_{t}d_2(s) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_s \cdot S_t}{G_s}\right) + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\cdot\sqrt{s-t}}\ , \quad s \ge t \quad (8)$$

若將保險給付看成最低保證給付金額加上歐式買權，則其結果與(6)式是相同的。我們不強調 Black 與 Scholes(1973)的選擇權計價方法因為 B-S

的計價有著許多限制，如無風險利率需為已知且為常數等限制。一般來說，無風險利率多是套用短期利率，用在一般市場的選擇權交易上，尚可接受，但相較於一般保險保單的設計，保險期間短則 5 年、10 年，長則 20 年、30 年或終身，若無風險利率套用短期利率，似乎不甚妥當，即使考慮長期的無風險利率，也很難找尋適當的值，再加上保險有解約的問題，解約價值是否適用計價過程中的長期無風險利率，尚待考量[1]。為方便做後續的研究發展，諸如將利率利用隨機過程表示，因此我們採用平賭理論與套利定價理論來做為計價的基礎。

上述計算過程是針對附有最低保證給付金額的變額壽險，今進一步考量保本型變額壽險的保費計價模式，將最低保證給付金額鎖定在保證退還所繳保險費，甚或加計利息的保本型態。假設生存險的滿期給付保證 G_T 形式如下：

$$G_T = (EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\;\;1} \cdot e^{\delta T} \tag{9}$$

其中 $\delta \le r$，因為 δ 為保險公司保證的利率，不應比無風險利率高，若比無風險利率高時，則會產生套利機會。此外，當 $\delta = 0$ 時，表示保險公司只保證退還保戶所繳的保險費；當 $\delta > 0$ 時，表示保險公司保證退還所繳保險費並加計利息，而其保證的利息以保證利率 δ 的形式保證。

將其套入(9)式中，可得

$$= {}_Tp_x \left\{ (EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\;\;1} \cdot e^{-(r-\delta)T} \cdot \Phi\left[-{}_0d_2(T)\right] + S_0 \cdot N_T \cdot \Phi\left[{}_0d_1(T)\right] \right\} \tag{10}$$

等式左右皆含有我們所欲解之未知數（生存險躉繳保險費），且在標準常態的累積分配函數中的積分界上亦含有我們所欲解之未知數在其中。故無法解出公式解，必須利用數值方法（如：割線法等）得到結果。

b. 定期險躉繳純保費的計價

若被保險人年齡 x 歲，投保有最低保證給付金額的變額壽險，投保 T 年期的定期險且在保險期間內死亡的保險給付為 $b_T = \max\{ N_T \cdot S_T , G_T \}$，首先將(3)式代換為

$$= \int_0 \left\{ \int_{-\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} \max\left[N_t S_0 e \;\cdots , {}_0G_t \right] f(W_t)\, dW_t \right\} dt \tag{11}$$

---

[1].依 Nielsen 與 Sandmann (1995,1996)的研究，必須給定利率的期間結構模型，未來將對此部份進行後續研究。

其中

$$f(W_T)=\frac{}{\sqrt{2\text{®}T}}e^{\ \ \ } \quad .$$

生存險與定期險不同的地方在於生存險是以滿期時的生存做為保險給付的前提假設，而定期險則是以保險期間內的死亡做為保險給付的前提假設。在連續的觀念下，我們可以將每個時間點 t 視為一個死亡保險契約，若在時間點上被保險人死亡，給付保險金額，則每個時間點的計價方式與生存險相似，只需將給付的前提由生存改為死亡，是故每個時間點 t 都似一個保險期間為瞬間時間的生存險，亦即可視為一個瞬間的死亡保險契約。因此，定期險可以視成連續無數的死亡保險契約，可得下列結果。

有最低保證給付金額之變額壽險的定期險躉繳純保險費：

$$=\int_0 \left\{G_t\cdot e^{-rt}\cdot\Phi\lfloor -{}_0d_2(t)\rfloor+S_0\cdot N_t\cdot\Phi\lfloor {}_0d_1(t)\rfloor\right\}{}_tp_x\cdot\text{«}_{x+t}dt \tag{12}$$

其中

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\text{®}}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$

$${}_t\mathrm{d}_1(\mathrm{s})=\frac{\ell\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{N_s}\cdot\mathrm{S_t}}{\mathrm{G_s}}\right)+\left(\mathrm{r}+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(\mathrm{s}-\mathrm{t})}{\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{s}-\mathrm{t}}}\quad,\quad \mathrm{s}\geq\mathrm{t} \tag{13}$$

$${}_t\mathrm{d}_2(\mathrm{s})=\frac{\ell\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{N_s}\cdot\mathrm{S_t}}{\mathrm{G_s}}\right)+\left(\mathrm{r}-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(\mathrm{s}-\mathrm{t})}{\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{s}-\mathrm{t}}}\quad,\quad \mathrm{s}\geq\mathrm{t} \tag{14}$$

由上式不難看出其與歐式選擇權計價結果的相似，可看成在保險期間中，於每個時點訂定選擇權。在連續的觀念下，好似訂定無數個選擇權的契約。

假設最低保證給付金額為保本型式 G_T 的形式如下：

$$G_t = (E\overline{A}^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|} \cdot e^{\phi t} \tag{15}$$

與(12)式同，只是將生存險的躉繳保險費換為定期險的躉繳保險費，時間點由滿期 T 改為保險期間內的任一時間點 t。可得到

$$= \int_0 \left\{ (EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\, e^{-(r-\phi)t} \Phi\left[-_0 d_2(t)\right] + S_0\, N_t \Phi\left[_0 d_1(t)\right] \right\} {}_t p_x \ll_{x+t}\, dt \tag{16}$$

我們可藉由組合方式設計出多種保單樣式，如有最低保證給付金額之變額壽險的生死合險保單、或將其與一般傳統保單相結合，甚或與沒有最低保證給付金額的變額壽險保單相結合。

3.3 分期繳保險費的計價

對於分期繳保險費的討論皆以非隨機變數的型態為主，此乃因我們假設保戶於指定投資資產所擁有的單位數非隨機變數，被保險人在整個保險期間中所可擁有的單位數是事先就於契約中說明清楚的。舉例而言，在要保時，保戶自行決定開始要投資一個單位於指定投資資產中，則可算出保戶應繳的躉繳保費，再將這個躉繳保費換算成保險期間內每期應繳的保險費，所以該分期繳的保險費並不是隨機變數。

a. 生存險的計價

由於分期繳的保險費並不是隨機變數，所以在平賭測度 Q 下的等價法則（The Principle of Equivalence）將與傳統的等價法則相同。亦即在保險中，分期繳保險費多是以被保險人的生存為繳交的前提。不論是躉繳或是分期繳，因為有相同的保險給付契約，所以保戶所繳交的現值應相等。

假設分期繳保費為 $\overline{p}_t$，不同時間點 t 時所繳交的分期保險費可以不同。但不代表 $\overline{p}_t$ 為隨機變數，亦即可以依保戶不同的需求或保險公司設計的需要而事先決定分期繳的保險費繳交型態，如分期繳保費採每期採一定的比例增加，或採一定的比例減少等方式。目前大多數的分期繳保險費多採用平準的方式，保戶的接受度也較高。但為了計價過程中公式推導的一般化，我們先以 $\overline{p}_t$ 的符號來代表分期繳保險費。

$$(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\;\;1} = \int_0^T \overline{p}_t \cdot e^{-rt}\, {}_t p_x\, dt \tag{17}$$

若保費繳交採用平準化的分期繳方式，我們可以利用精算符號來表示 $\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right]$，則(17)式代換成

$$(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}} = \int_0^T \overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \cdot e^{-rt}\,{}_t p_x\, dt$$

整理後可得

$$\overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] = \frac{(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}}{\int_0^T e^{-rt}\,{}_t p_x\, dt} = \frac{(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}}{\overline{a}_{x:\overline{T}|}}$$

解出生存險的保險給付市價現值後，即可求出附有最低保證給付金額變額壽險之分期繳生存險保險費。

保本型變額壽險的探討上，假設最低保證給付金額 G_T 的形式如下：

$$G_T = \int_0^T \overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \cdot e^{\phi t} dt = \overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \cdot \overline{S}_{\overline{T}|,\phi} \tag{18}$$

將(18)式代入所得之附有最低保證給付金額變額壽險之分期繳生存險保險費公式中，可得

$$(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}} = {}_T p_x \begin{Bmatrix} \overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \bar{s}_T\, e^{-rT}\, \Phi\left[-{}_0 d_2(T)\right] \\ + S_0\, N_T\, \Phi\left[{}_0 d_1(T)\right] \end{Bmatrix}$$

整理後可得保本型變額壽險之分期繳生存險純保險費模式，結果如下：

$$\overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] = \frac{{}_T p_x}{\overline{a}_{x:\overline{T}|}} \begin{Bmatrix} \overline{P}\left[(EA^{G})_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \cdot \overline{S}_{\overline{T}|,\phi} \cdot e^{-rT} \cdot \Phi\left[-{}_0 d_2(T)\right] \\ + S_0 \cdot N_T \cdot \left[{}_0 d_1(T)\right] \end{Bmatrix} \tag{19}$$

b. 定期險的計價

同於生存險的觀念，對於非隨機變數的定期險保險費，我們可以得如下之結果：

$$(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|} = \int_0^T \overline{p}_t \cdot e^{-rt}\,{}_t p_x dt \tag{20}$$

同理若保險費的繳交採用平準化的分期繳方式時，利用精算符號 $\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]$ 表示，則(20)式可代換為

$$(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|} = \int_0^T \overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right] \cdot e^{-rt}\,{}_t p_x dt$$

解出定期險的保險給付的市價現值後，即可求出分期繳保險費。整理後可得

$$\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]=\frac{(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}}{\int_0^T e^{-rt}\,{}_tp_x dt}=\frac{(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}}{\overline{a}_{x:\overline{T}|}}$$

假設最低保證給付金額 G_t 的形式如下：

$$G_t=\int_0^t \overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]\cdot e^{\text{¢} s}ds=\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]\cdot \overline{S}_{\overline{t}|,\text{¢}} \tag{21}$$

將(21)式代入附有最低保證給付金額變額壽險之定期繳保險費公式：

$$\begin{aligned}&(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\\&=\int_0^T\left\{\begin{array}{l}\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]\cdot \overline{S}_{\overline{t}|,\text{¢}}\cdot e^{-rt}\cdot\Phi\left[-_0d_2(t)\right]\\+S_0\cdot N_t\cdot\Phi\left[_0d_1(t)\right]\end{array}\right\}{}_tp_x\cdot \text{«}_{x+t}dt\end{aligned}$$

整理後可得

$$\begin{aligned}&\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]\\&=\frac{\int_0^T\left\{\begin{array}{l}\overline{P}\left[(E\overline{A}^{G})^{1}_{x:\overline{T}|}\right]\cdot \overline{S}_{\overline{t}|,\text{¢}}\cdot e^{-rt}\cdot\Phi\left[-_0d_2(t)\right]\\+S_0\cdot N_t\cdot\Phi\left[_0d_1(t)\right]\end{array}\right\}{}_tp_x\cdot \text{«}_{x+t}dt}{\overline{a}_{x:\overline{T}|}}\end{aligned} \tag{22}$$

此結果與躉繳中的生存險與定期險相同。

4. 實例分析

理論上常用連續型態的假設，但是某些模型假設並不完全適用，諸如：保險費繳交為連續的假設，明顯不適合用在年繳的保單計算，我們將利用離散型式進行計價分析。為使保本型變額壽險的公式能直接利用數值方法逼近而不需利用模擬法或其他的方法，離散型的使用更有其需要性，如此可避免雙重積分的困難。在進行實例分析前，先針對躉繳的生存險、定期險及分期繳的生存險、定期險之保單分別修正並說明結果。

a. 躉繳生存險

在躉繳生存險中，因為計價只針對滿期定點貼現，我們可根據(9)式的保本型式及(7)式、(8)式、(10)式的計價結果。

b. 躉繳定期險

在躉繳定期險中，我們將再進一步做些假設，使其調整為

離散型模式。我們將原先死亡率分配為連續型，亦即死亡立即做保險給付動作的假設，修正為死亡率分配是離散型，且所有的死亡保險給付皆在年底給付的假設，則原來連續無數張的似歐式選擇權契約可轉換為 T 張契約即可，如此可以大幅降低運算量的需求。若保本型式如(15)式，則躉繳定期險保險費於(13)式、(14)式及(16)式轉換如下：

$$G_t = (EA^G)^{1}_{x:\overline{T}|} \cdot e^{\text{¢}(t+1)} \text{ ， } \text{¢} < r$$

$$(EA^G)^{1}_{x:\overline{T}|} = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \begin{array}{l} (EA^G)^{1}_{x:\overline{T}|}\, e^{-(r-\text{¢})\cdot(t+1)} \Phi\left[-{}_0 d_2(t+1)\right] \\ + S_0\, N_t \Phi\left[{}_0 d_1(t+1)\right] \end{array} \right\} \cdot {}_{t|}q_x \tag{23}$$

其中

$${}_0 d_1(t+1) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_t \cdot S_0}{(EA^G)^{1}_{x:\overline{T}|} \cdot e^{\text{¢}(t+1)}}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\pm^2\right)(t+1)}{\pm \cdot \sqrt{t+1}}$$

$${}_0 d_2(t+1) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_t \cdot S_0}{(EA^G)^{1}_{x:\overline{T}|} \cdot e^{\text{¢}(t+1)}}\right) + \left(r - \dfrac{1}{2}\pm^2\right)(t+1)}{\pm \cdot \sqrt{t+1}}$$

$${}_{t|}q_x = {}_t p_x \cdot q_{x+t}$$

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots\cdots p_{x+t-1} \,.$$

c. 分期繳生存險

在分期繳生存險中，我們亦將改變假設使保險費計價能更簡化，以降低運算的困難度。我們將連續的繳費型態改為離散型，且繳交的時間點為每年年初繳費，這樣的轉換不只使運算較為簡單，同時亦使該假設較符合實際社會狀況。(18)式中保本的型式也由連續型式改為離散型式，以配合年繳保險費的假設。分期繳生存險的保費計價將由(19)式轉換成：

$$G_T = P\left[(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\;\;1}\right] \cdot \ddot{S}_{\overline{T}|,\text{¢}} \text{ ， } \text{¢} < r$$

$$P\left[(EA^G)_{x:\overline{T}|}^{\;\;1}\right] \tag{24}$$

$$= \frac{{}_T p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}} \left\{ P\left[(EA^G)_{x:\frac{1}{\overline{T}|}}\right] \ddot{S}_{\overline{T}|,\text{¢}}\ e^{-rT}\ \Phi\left[-{}_0 d_2(T)\right] + S_0\ N_T\ \Phi\left[{}_0 d_1(T)\right] \right\}$$

其中

$${}_0 d_1(T) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_T \cdot S_0}{(EA^G)_{x:\frac{1}{\overline{T}|}} \cdot e^{\text{¢}\, T}} \right) + \left(r + \dfrac{1}{2} \pm^2 \right) \cdot T}{\pm \cdot \sqrt{T}}$$

$${}_0 d_2(T) = \frac{\ell n\left(\dfrac{N_T \cdot S_0}{(EA^G)_{x:\frac{1}{\overline{T}|}} \cdot e^{\text{¢}\, T}} \right) + \left(r - \dfrac{1}{2} \pm^2 \right) \cdot T}{\pm \cdot \sqrt{T}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{T}|} = \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x \cdot e^{-rt}$$

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots\cdots p_{x+t-1}$$

$$\ddot{S}_{\overline{T}|,\,\text{¢}} = \sum_{t=1}^{T} (1+\text{¢})^t .$$

d. 分期繳定期險

在分期繳定期險中，我們將合併躉繳定期險與分期繳生存險的重新假設，將死亡率分配修正為離散型、保險期間內的死亡於每年底做保險給付、繳費型態也調整為年繳的離散型式及（21）式的連續保本型式更改為配合年繳的離散型式等假設。則分期繳定期險的保險費計價由(22)式轉換為：

$$G_t = P\left[(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\right] \cdot \ddot{S}_{\overline{t}|,\text{¢}} \quad , \quad \text{¢} < r$$

$$P\left[(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\right] \tag{25}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{T}|}} \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \begin{array}{l} P\left[(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\right] \cdot \ddot{S}_{\overline{t}|,\text{¢}} \cdot e^{-r(t+1)} \cdot \Phi\left[-{}_0 d_2(t+1)\right] \\ + S_0 \cdot N_t \cdot \Phi\left[{}_0 d_1(t+1)\right] \end{array} \right\} {}_{t|}q_x$$

其中 $P\left[(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\right]$

$$ {}_0d_1(t+1)=\frac{\ell n\left(\dfrac{N_t\cdot S_0}{(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\cdot e^{\text{¢}\,t}}\right)+\left(r+\dfrac{1}{2}\pm^2\right)(t+1)}{\pm\cdot\sqrt{t+1}} $$

$$ {}_0d_2(t+1)=\frac{\ell n\left(\dfrac{N_t\cdot S_0}{(EA^G)^{\,1}_{x:\overline{T}|}\cdot e^{\text{¢}\,t}}\right)+\left(r-\dfrac{1}{2}\pm^2\right)(t+1)}{\pm\cdot\sqrt{t+1}} $$

$$ {}_{t|}q_x={}_tp_x\cdot q_{x+t}=p_x\cdot p_{x+1}\cdots\cdot p_{x+t-1}\cdot q_{x+t} $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{T}|}=\sum_{t=0}^{T-1}{}_tp_x\cdot e^{-rt} $$

$$ \ddot{S}_{\overline{t}|,\,\text{¢}}=\sum_{i=1}^{t+1}(1+\text{¢})^{i}\ . $$

透過離散型模式的修正後可利用適當數值方法計算結果，以台股指數為例的保本型變額壽險，可利用 Mathematica 3.0 的數值分析軟體進行數值分析。

我們以台灣經濟環境為精算假設基礎，對保險費計價公式中變數給予適當的值。營業保費中的附加費用並不在我們考量的範圍，假設如下：

(i) 財務理論上金融市場為完備的假設。

(ii) 保險人在死亡率的態度上是風險中立的，亦即保險人可藉由大數法則來分散其死亡風險。

(iii) 生存率與死亡率以 1989 TSO 為主。

(iv) 被保險人為男性 40 歲，即 x=40。

(v)保險期間為 10 年，即 T=10。

(vi) 指定投資資產為台股指數，假設現今台股指數為 8,000 點，假設其價值為 S_0=8,000。

(vii) 單位數以 1 單位為計價標準，即單位數於投保時已由要保人決定，為一常數，單位數並不隨時間而改變，換言之 N_t=N=8,000（$t\in[0,T]$）。

(viii) 市場上無風險利率為 6.0%即 r = 6.0%。

(ix) 保險公司所提供的保證利率為 3.0%，即 δ = 3.0%。

(x)利用民國 81 年至民國 87 年的台股指數資料，計算每年的標準差再取

其平均，其值為 24.0%，因此取σ = 24.0%。

無風險利率(r)、保證利率(δ)及投資資產的波動性(σ)等三項假設對保險費計價的影響相較其他精算假設更形重要，為比較彼此間對保險費計價的影響程度，實證分析將以躉繳或分期繳的生存險或定期險四種基本保單為研究對象。以變數間彼此的互動為主軸，進而研討保險費變動的情形，為避免套利機會的產生，在做實證分析時應注意保險公司的保證利率需小於市場上的無風險利率，我們將無風險利率(r)的變動值範圍設在(1% ~ 15%)的 15 個等間距離中、保證利率(δ)設於(1% ~ 10%)的 10 等間距離中，而指定投資資產的波動性(σ)則定於(5% ~ 90%)的 14 個不等間距離。

我們針對四種保單分別探討：

a. 躉繳生存險

表 1 躉繳生存險純保險費（給定 **r**&δ，σ = 24.0%）

σ =0.24		δ（保險公司的保證利率）										
		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
r（無風險利率）	0.01	11374.40	15608.78									
	0.02	9896.63	11374.40	15608.78								
	0.03	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78							
	0.04	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78						
	0.05	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78					
	0.06	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78				
	0.07	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78			
	0.08	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78		
	0.09	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78	
	0.10	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78
	0.11	7679.24	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40
	0.12	7651.30	7679.24	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63
	0.13	7631.60	7651.30	7679.24	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68
	0.14	7617.83	7631.60	7651.30	7679.24	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01	8638.11
	0.15	7608.31	7617.83	7631.60	7651.30	7679.24	7718.55	7773.58	7850.40	7957.77	8108.79	8324.01

表 1 的實證結果可得基本假設下躉繳生存險保險費為 9,115.68 元。保險人保本的承諾可能會執行，因此這類保險的保本才有存在的意義。若保單不為保本型式而純為單純的變額壽險（風險完全由要保人承擔），則該保單的價值因為含有生存率而使得保險費低於 8,000 元。保本所需的成本比生存率減少的成本為多，因此保費超過 8,000 元。

可歸納以下結果:

(i) 固定無風險利率時，保險費增量隨著保證利率的增加而增加；可發現保證利率每增加 1%,保險費並非等距增加,而是增加的幅度愈來愈大，即保險費隨著保證利率的增加而更高，因保證利率的增加，加大了保險人保本的承諾，而使得保險費的成本漸增，每增加 1%保本的實現機

會愈來愈大，使保險費愈高。

(ii) 固定保證利率後，保險費隨著無風險利率的增加而遞減；且將表縱看時，可發現風險利率每增加 1%，保險費亦並非等距遞減，而是遞減的幅度愈來愈大，亦即保險費隨著無風險利率的增加而更低。因無風險的利率愈大，保本的貼現成本愈小，保險費就愈低。

(iii) 無風險利率與保證利率的差相同時，其所計算出來的價格相同。此結果可透過公式及積分式的積分界中得知。

(iv) 無風險利率等於保證利率時，保險費幾乎是指定投資資產的兩倍，造成保本被執行的機率大增，成本也就較高。

表 2 可歸納結果如下:

(i) 固定無風險利率時，保險費隨著台股指數標準差的增加而快速增加；將表橫看時，保險費增加的幅度愈來愈大，即保險費隨著標準差的增加而愈高。

(ii) 固定台股指數標準差後，保險費隨著無風險利率的增加而遞減；且將表縱看時,可發現風險利率每增加 1%,保險費遞減的幅度愈形加深，亦即保險費隨著無風險利率的增加而愈低，乃因無風險的利率愈大，保本的貼現成本愈小，保險費就愈低。

表 2 躉繳生存險純保險費（給定 **r** & σ，$\delta=3\%$）

$\delta=0.03$		σ（台股指數標準差）												
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.7	0.8	0.9
r（無風險利率）	0.03	8142.30	9472.68	11268.67	13500.98	15608.78	19330.63	22963.85	27088.92	31701.12	36781.39	48192.69	60869.74	74172.34	87375.88
	0.04	7708.58	8299.13	9199.86	10328.92	11374.40	13157.52	14824.05	16638.13	18581.68	20633.64	24964.66	29416.47	33765.80	37812.65
	0.05	7615.29	7913.33	8471.06	9207.19	9896.63	11068.76	12151.82	13314.16	14539.88	15812.74	18433.05	21041.96	23516.98	25759.96
	0.06	7593.88	7741.07	8102.73	8619.20	9115.68	9967.67	10755.12	11596.29	12477.17	13384.44	15227.44	17030.09	18711.84	20213.05
	0.07	7589.92	7658.79	7893.86	8266.32	8638.11	9287.66	9892.48	10539.11	11214.83	11908.17	13306.35	14659.45	15908.61	17012.98
	0.08	7589.39	7619.65	7769.77	8040.43	8324.01	8832.08	9311.35	9826.18	10364.84	10917.08	12026.89	13094.28	14073.12	14933.00
	0.09	7589.34	7601.76	7694.94	7890.93	8108.79	8511.81	8898.80	9317.86	9757.98	10209.81	11117.26	11987.38	12782.07	13477.29
	0.10	7589.34	7594.07	7649.93	7790.36	7957.77	8279.71	8595.82	8941.83	9307.44	9683.99	10441.43	11167.25	11828.78	12406.03
	0.11	7589.34	7591.00	7623.24	7722.32	7850.40	8108.18	8368.11	8656.50	8963.68	9281.56	9923.23	10538.95	11099.83	11588.65
	0.12	7589.34	7589.88	7607.76	7676.37	7773.58	7979.79	8194.24	8436.04	8696.14	8966.98	9516.51	10045.44	10527.64	10947.81
	0.13	7589.34	7589.50	7599.03	7645.55	7718.55	7882.95	8060.05	8263.45	8484.84	8717.12	9191.56	9650.31	10069.34	10434.71
	0.14	7589.34	7589.38	7594.27	7625.09	7679.24	7809.62	7955.71	8127.09	8316.13	8516.25	8928.32	9329.16	9696.37	10017.02
	0.15	7589.34	7589.35	7591.75	7611.70	7651.30	7754.00	7874.22	8018.62	8180.33	8353.26	8712.75	9064.99	9388.93	9672.41

表 3 可歸納結果如下:

(i) 固定台股指數標準差時，保險費隨著保證利率的增加而增加；將表橫看時，可發現保險費的增加幅度愈來愈大，即保險費隨著保證利率的增加而愈高。因保證利率的增加，加大保險人保本承諾的成本，進而使得保險費的成本漸形迅速增加，其每增加 1%保證利率，保本承諾被執行的機會愈來愈大，使保險費愈高。

(ii) 固定保證利率後，保險費隨著台股指數標準差的增加而增加，今將表縱看時，同樣可發現標準差愈大時，保險費增加的幅度愈大，亦即保險費隨著標準差的增加而愈顯高。

表 3 躉繳生存險純保險費（給定 σ & δ，**r** = 6%）

r = 0.06		δ（保險公司的保證利率）						
		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
σ（台股指數標準差）	0.05	7589.34	7589.39	7589.92	7593.88	7615.29	7708.58	8142.30
	0.10	7601.76	7619.65	7658.79	7741.07	7913.33	8299.13	9472.68
	0.15	7694.94	7769.77	7893.86	8102.73	8471.06	9199.86	11268.67
	0.20	7890.93	8040.43	8266.32	8619.20	9207.19	10328.92	13500.98
	0.24	8108.79	8324.01	8638.11	9115.68	9896.63	11374.40	15608.78
	0.30	8511.81	8832.08	9287.66	9967.67	11068.76	13157.52	19330.63
	0.35	8898.80	9311.35	9892.48	10755.12	12151.82	14824.05	22963.85
	0.40	9317.86	9826.18	10539.11	11596.29	13314.16	16638.13	27088.92
	0.45	9757.98	10364.84	11214.83	12477.17	14539.88	18581.68	31701.12
	0.50	10209.81	10917.08	11908.17	13384.44	15812.74	20633.64	36781.39
	0.60	11117.26	12026.89	13306.35	15227.44	18433.05	24964.66	48192.69
	0.70	11987.38	13094.28	14659.45	17030.09	21041.96	29416.47	60869.74
	0.80	12782.07	14073.12	15908.61	18711.84	23516.98	33765.80	74172.34
	0.90	13477.29	14933.00	17012.98	20213.05	25759.96	37812.65	87375.88

b. 躉繳定期險

表 4 實證結果可得基本假設的躉繳定期險保險費約 410.672 元。我們可觀察到所有的值皆在 410 元到 416 元間，超過 410 元的情形多是在台股指數標準差超過 50%，很多值在小數點第四位以後才有差別，此乃因就 40 歲男性而言，40 歲至 50 歲間死亡率很小，在小數點後第三位才有值，所以在與財務成本相乘後其值隨之變得很小。

表 4 躉繳定期險純保險費（給定 r & δ，σ = 24.0%）

σ =0.24		δ（保險公司的保證利率）										
		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
r（無風險利率）	0.01	410.67207	410.67214									
	0.02	410.67204	410.67207	410.67214								
	0.03	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214							
	0.04	410.67201	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214						
	0.05	410.67201	410.67201	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214					
	0.06	410.67200	410.67201	410.67201	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214				
	0.07	410.67200	410.67200	410.67201	410.67201	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214			
	0.08	410.67200	410.67200	410.67200	410.67201	410.67201	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214		
	0.09	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67201	410.67200	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214	
	0.10	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67202	410.67204	410.67207	410.67214
	0.11	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67202	410.67204	410.67207
	0.12	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67202	410.67204
	0.13	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67202
	0.14	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200
	0.15	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200	410.67200

c. 分期繳生存險

表 5 分期繳生存險純保險費（給定 r & δ，$\sigma = 24.0\%$）

σ =0.24		δ（保險公司的保證利率）										
		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
r（無風險利率）	0.01	1424.92	1906.72									
	0.02	1285.43	1480.51	1969.72								
	0.03	1220.28	1335.09	1534.34	2024.37							
	0.04	1189.06	1266.86	1384.16	1586.20	2070.97						
	0.05	1177.10	1233.89	1313.30	1432.51	1635.95	2110.22					
	0.06	1177.53	1220.89	1278.79	1359.50	1480.02	1683.53	2143.04				
	0.07	1186.65	1220.76	1264.89	1323.69	1405.38	1526.62	1728.93	2170.48			
	0.08	1202.26	1229.61	1264.26	1309.04	1368.53	1450.86	1572.24	1772.20	2193.56		
	0.09	1222.92	1245.16	1272.90	1308.00	1353.27	1413.24	1495.88	1616.85	1813.43	2213.25	
	0.10	1247.67	1265.92	1288.43	1316.48	1351.92	1397.53	1457.78	1540.41	1660.44	1852.74	2230.37
	0.11	1275.82	1290.89	1309.31	1332.02	1360.30	1395.97	1441.78	1502.09	1584.40	1703.01	1890.28
	0.12	1306.85	1319.32	1334.49	1353.04	1375.89	1404.31	1440.11	1485.97	1546.15	1627.84	1744.60
	0.13	1340.35	1350.68	1363.21	1378.44	1397.07	1420.00	1448.49	1484.30	1530.07	1589.92	1670.72
	0.14	1375.99	1384.55	1394.90	1407.45	1422.72	1441.37	1464.32	1492.78	1528.51	1574.05	1633.37
	0.15	1413.50	1420.58	1429.13	1439.48	1452.02	1467.27	1485.90	1508.80	1537.17	1572.70	1617.88

表 5 實證結果中基本假設的分期繳生存險保險費為 1,359.5 元，結果可歸納如下:

(i) 固定無風險利率時，保險費隨著保證利率的增加而增加，此現象與躉繳生存險相同。

(ii) 固定保證利率時，保險費並不再單純地隨著無風險利率的增加而減少，而是先減少再增加。此現象明顯與躉繳生存險及定期險的保險費隨無風險利率增加而減少不同，且減少的速度愈形漸快。

(iii) 當無風險利率等於保證利率時，兩者的影響不似躉繳生存險中的相互抵消，而是保證利率對保險費的影響較大。保證利率在分子中因累積因子的存在而產生具有保證利率的累積效果，再加上無風險利率在分子與分母中對保險費相互作反向變動，更減低了與保證利率相抵消的效果。在無風險利率與保證利率相等的情況下，隨著保證利率的增加，分期繳生存險的保險費愈來愈高。

表 6 的結果歸納如下:

(i) 固定無風險利率時，保險費隨著台股指數標準差的增加而快速遞增。將表橫看時，保險費增加的幅度愈來愈大，亦即保險費隨著標準差的增加而愈顯昂貴。此乃因標準差愈大時，若指定投資資產價值走勢是正向時，保險人沒有財務風險；但若指定投資資產價值的波動呈負向走勢，則愈形加深了保險人的保本成本，使得保險費的成本增大許多，保險費的金額也就漸形增加。

(ii) 固定台股指數標準差後，保險費增量隨著無風險利率的增加先遞增再遞減。值得注意的是在表中，每種台股指數標準差的情境皆存在最小保險費的值，且產生點皆在不同的無風險利率下。且將表縱看時，可發現風險利率每增加 1%，保險費增量由負變成正，亦即該增量先遞減至 0 再遞增。

表 6 分期繳生存險純保險費（給定 **r** & σ，$\delta=3\%$）

δ =0.03		σ（台股指數標準差）													
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.7	0.8	0.9
r（無風險利率）	0.03	969.29	1156.69	1407.95	1723.12	2024.37	2564.64	3101.37	3720.68	4424.31	5211.62	7021.32	9090.18	11319.54	13586.69
	0.04	953.43	1063.40	1217.73	1408.63	1586.20	1892.96	2184.76	2508.07	2860.83	3240.13	4062.52	4936.81	5817.80	6660.65
	0.05	972.60	1046.56	1159.57	1301.28	1432.51	1656.29	1865.39	2092.94	2336.68	2593.94	3136.74	3694.39	4238.97	4745.47
	0.06	1003.26	1054.33	1141.81	1254.57	1359.50	1537.77	1702.93	1880.88	2069.43	2266.22	2674.51	3085.13	3478.32	3837.63
	0.07	1039.39	1074.45	1143.68	1236.42	1323.69	1472.23	1609.38	1756.33	1910.98	2071.21	2399.87	2725.56	3033.19	3310.88
	0.08	1078.46	1102.06	1157.22	1234.82	1309.04	1436.11	1553.48	1678.91	1810.35	1945.87	2221.64	2492.00	2744.81	2970.94
	0.09	1119.24	1134.70	1178.57	1244.05	1308.00	1418.54	1520.97	1630.37	1744.77	1862.34	2100.24	2331.65	2546.39	2737.13
	0.10	1161.09	1170.92	1205.54	1260.96	1316.48	1413.67	1504.26	1601.13	1702.35	1806.20	2015.53	2217.97	2404.73	2569.72
	0.11	1203.73	1209.78	1236.78	1283.63	1332.02	1418.07	1498.91	1585.61	1676.26	1769.19	1956.08	2136.07	2301.37	2446.81
	0.12	1247.02	1250.62	1271.35	1310.82	1353.04	1429.53	1502.13	1580.32	1662.22	1746.21	1914.91	2076.92	2225.23	2355.29
	0.13	1290.89	1292.95	1308.60	1341.65	1378.44	1446.58	1512.05	1582.95	1657.43	1733.90	1887.48	2034.73	2169.21	2286.84
	0.14	1335.31	1336.44	1348.01	1375.47	1407.45	1468.18	1527.36	1591.91	1659.97	1729.98	1870.72	2005.58	2128.54	2235.91
	0.15	1380.22	1380.82	1389.20	1411.79	1439.48	1493.55	1547.13	1606.04	1668.45	1732.83	1862.46	1986.71	2099.92	2198.65

d. 分期繳定期險

表 7 實證結果得基本假設的分期繳定期險保險費為 53.9478 元，結果摘要如下:

(i) 固定無風險利率時，保險費隨著保證利率的增加而增加，且其增量亦是遞增的，此現象與躉繳生存險相同。因為在固定無風險利率時，保證利率的變動對保險費的影響很小；而在固定保證利率時，無風險利率的變動對保險費的影響相對很大。

(ii) 當固定保證利率時，保險費隨著無風險利率之增加而增加。一般而言，我們的觀念都是貼現利率愈大，保險費愈便宜。

(iii) 當無風險利率等於保證利率時，兩者的影響不似躉繳生存險中的相

互抵消，在保本項中，貼現因子因分子分母同乘累積因子而只剩 e^{-r}，相較於保證利率項而言，無風險利率對保險費的影響程度相形較小。

表 8 結果歸納如下:

(i) 固定無風險利率時，保險費隨著台股指數標準差的增加而快速遞增。將表橫看時，保險費增加的幅度愈來愈大，亦即保險費隨著標準差的增加而愈高。

(ii) 固定台股指數標準差後，保險費隨著無風險利率的增加而增加。

表 7 分期繳定期險純保險費（給定 r & δ，$\sigma = 24.0\%$）

σ =0.24		δ（保險公司的保證利率）										
		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
r（無風險利率）	0.01	43.791648	43.791650									
	0.02	45.731814	45.731816	45.731818								
	0.03	47.718737	47.718738	47.718739	47.718741							
	0.04	49.751235	49.751236	49.751237	49.751238	49.751240						
	0.05	51.828024	51.828025	51.828026	51.828027	51.828028	51.828030					
	0.06	53.947715	53.947716	53.947716	53.947717	53.947718	53.947719	53.947721				
	0.07	56.108826	56.108826	56.108826	56.108827	56.108827	56.108828	56.108830	56.108831			
	0.08	58.309786	58.309786	58.309786	58.309787	58.309787	58.309788	58.309789	58.309790	58.309792		
	0.09	60.548948	60.548948	60.548948	60.548948	60.548949	60.548949	60.548950	60.548951	60.548952	60.548953	
	0.10	62.824593	62.824593	62.824593	62.824593	62.824594	62.824594	62.824594	62.824595	62.824596	62.824597	62.824599
	0.11	65.134942	65.134942	65.134942	65.134942	65.134942	65.134942	65.134943	65.134943	65.134944	65.134944	65.134945
	0.12	67.478161	67.478161	67.478161	67.478162	67.478162	67.478162	67.478162	67.478162	67.478163	67.478163	67.478164
	0.13	69.852376	69.852376	69.852376	69.852377	69.852377	69.852377	69.852377	69.852377	69.852377	69.852378	69.852378
	0.14	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255677	72.255678	72.255678
	0.15	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127	74.686127

表 8 分期繳定期險純保險費（給定 **r** & σ，$\delta = 3\%$）

δ =0.03		σ（台股指數標準差）													
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.7	0.8	0.9
r（無風險利率）	0.03	47.71873	47.71873	47.71873	47.71873	47.71874	47.71899	47.72037	47.72475	47.73435	47.75109	47.80964	47.90017	48.01425	48.14086
	0.04	49.75123	49.75123	49.75123	49.75123	49.75124	49.75144	49.75263	49.75657	49.76544	49.78122	49.83762	49.92631	50.03934	50.16575
	0.05	51.82802	51.82802	51.82802	51.82802	51.82803	51.82819	51.82921	51.83273	51.84090	51.85573	51.90989	51.99658	52.10833	52.23431
	0.06	53.94771	53.94771	53.94771	53.94771	53.94772	53.94785	53.94872	53.95185	53.95934	53.97322	54.02508	54.10962	54.21988	54.34520
	0.07	56.10883	56.10883	56.10883	56.10883	56.10883	56.10893	56.10967	56.11244	56.11928	56.13222	56.18174	56.26398	56.37255	56.49699
	0.08	58.30979	58.30979	58.30979	58.30979	58.30979	58.30987	58.31049	58.31293	58.31914	58.33118	58.37832	58.45813	58.56482	58.68816
	0.09	60.54895	60.54895	60.54895	60.54895	60.54895	60.54901	60.54953	60.55167	60.55729	60.56843	60.61318	60.69045	60.79508	60.91711
	0.10	62.82459	62.82459	62.82459	62.82459	62.82459	62.82464	62.82507	62.82694	62.83200	62.84228	62.88463	62.95926	63.06165	63.18217
	0.11	65.13494	65.13494	65.13494	65.13494	65.13494	65.13498	65.13534	65.13695	65.14149	65.15094	65.19090	65.26280	65.36280	65.48161
	0.12	67.47816	67.47816	67.47816	67.47816	67.47816	67.47819	67.47848	67.47987	67.48393	67.49258	67.53017	67.59929	67.69675	67.81366
	0.13	69.85238	69.85238	69.85238	69.85238	69.85238	69.85240	69.85264	69.85383	69.85743	69.86533	69.90059	69.96686	70.06165	70.17649
	0.14	72.25568	72.25568	72.25568	72.25568	72.25568	72.25569	72.25589	72.25690	72.26009	72.26727	72.30024	72.36363	72.45564	72.56823
	0.15	74.68613	74.68613	74.68613	74.68613	74.68613	74.68614	74.68629	74.68716	74.68997	74.69646	74.72721	74.78769	74.87681	74.98701

綜合表 1-表 8 的結果可歸納以下的結論，於躉繳的保單，不論是生存險或定期險，其保險費對市場上無風險利率、保險人保證的利率及台股指數的波動程度等重要濟經或精算假設的敏感性結果大致相同。無風險利率與保險費呈反向變動；而保證利率及台股指數標準差與保險費則呈正向關係。然而，於定期險中，因死亡率極小的影響，且持有 1 單位的情形下，造成保險費在對變數執行敏感度程度分析時，其變動很微小。

無風險利率多以保單設計當時的市場經濟環境而定，為事先決定的值。因保險人給保戶的保證利率與保戶所指定的投資資產皆與躉繳保險費呈正向關係，保險人可以提高保證利率，選擇標準差較低的指定投資資產；或保險人以降低保證利率，選擇標準差較高的指定投資資產得到相同的計價結果。無論如何選擇，風險仍存在，只是在保險人與要保人間相互轉稼。

不論是生存險或定期險的分期繳保單，在固定台股指數標準差與保證利率時，無風險利率的變動對保險費的影響和一般的觀念不同。一般多認為當無風險利率與保險費呈負向關係，亦即當無風險利率愈高時，保險費愈便宜；無風險利率愈低時，保險費愈貴。而於分期繳生存險中，保險費隨著無風險利率的上升，保險費會先遞減再遞增，且於不同的保證利率或台股指數標準差的情境下，皆存在最低保險費的值。於分期繳定期險中，保險費則是隨無風險利率的上升而增加。此現象完全因分期保本型態在公式中產生與無風險利率相抵消或部份抵消的效果。

躉繳與分期繳定期險亦有明顯不同處：在躉繳中，保險費對無風險利率、台股指數標準差及保證利率的敏感度在各情境的假設下變化不大，其差距多在小數點四、五位以下甚至更小。於分期繳中，保險費對台股指數標準差及保證利率的敏感度亦只有些微影響，其差距多在小數點五、六位以下甚至更小；但保險費卻對無風險利率的敏感程度相對地大許多（差距在 1.9~2.5 元間）。

5. 結語

附有最低保證給付的變額壽險會使保險人涉入財務風險，此由保險人準備金的計算涉入市價的保費即可了解。指定投資資產隨時間的變動會明顯影響準備金的提存，而準備金是保險公司資產負債表中最大的負債項目，財務處理上必須特別重視，如何使保險人因附有最低保證給付或是因保本的承諾而產生的財務風險降低到最小，是非常重要的課題。既然稱為市價準備金提存，就可知保險人應為其所參與的財務風險進行避險的處理。避險的交易策略該如何進行、多久執行一次等，將是後續研究的課題。

參考文獻

1. Aase, K.K. and S.A. Persson, 1994, Pricing of Unit-linked Life Insurance Policies, *Scandinavian Actuarial Journal,* 1, 26-52.
2. Bacinello, A.R. and F. Ortu, 1993a, Pricing Equity-linked Life Insurance with Endogenous Minimum Guarantees, *Insurance: Mathematics and Economics,* 13, 245-257.
3. Bacinello, A.R. and F. Ortu, 1993b, Pricing Guaranteed Securities-linked Life Insurance under Interest Rate Risk, *Actuarial Approach for Financial Risks*, 35-55.
4. Bacinello, A.R. and F. Ortu, 1994, Single and Periodic Premiums for Guaranteed Equity-linked Life Insurance under Interest Rate Risk: the ‘Log-normal＋Vasicek’ Case, Financial Modeling, L. Peccati and M. Viren（Eds.）, Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 1-25.
5. Björk, T., 1998, Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press.
6. Black, F. and M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
7. Boyle, P.P. and E.S. Schwartz, 1997, Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-linked Contracts, *Journal of Risk and Insurance,* 44, 639-680.
8. Brennan, M. J. and E.S. Schwartz, 1976, The Pricing of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee, *Journal of Financial Economics,* 3, 195-213.

9. Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, 1979, Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee, *Journal of Business,* 52, 63-93.
10. Ekern, S. and S.A. Persson, 1996, Exotic Unit-linked Life Insurance Contracts, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory,* 21, 35-63.
11. Nielsen, J.A. and K. Sandmann, 1995, Equity-linked Life insurance: A Model with Stochastic Interest Rates, *Insurance: Mathematics and Economics,* 16, 225-253.
12. Nielsen, J.A. and K. Sandmann, 1996, Uniqueness of the Fair Premium for Equity-linked Life Insurance Contracts, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory,* 21, 65-102.