可信度理論簡介

張士傑
林素華

一、前言

可信度理論爲釐定不同性質危險保費的經驗費率計算方法，被應用來修正保單保費和增加預估費率的精確度，本文除了介紹可信度的概念，並將回顧古典的可信度理論及分析近代的廣義可信度理論和發展的研究結果，一般熟悉的方法是建構線性模式估計損失率，我們亦討論較複雜的半線性(semi-linear)可信度理論及多維(multidimensional)可信度理論，分析並比較各種方法的異同，最後應用可信度理論於實際資料的分析，並說明模型建構過程，最後撰寫電腦程式得到收斂的參數估計數值。

二、簡介可信度理論

可信度(credibility)的概念爲釐訂費率中不可缺少的精算技術，我們定義可信度爲釐定某種危險(risk)費率時對過去經驗所計算損失率的可信程度，依保險理論解釋，保險公司承保大量的危險保單，並且訂定相同的保費，因爲就統計的期望值觀點而言，所收取的保費足以支付投保的危險給付，而保險公司收到大量的保單將分散營運上的危險，避免因同時發生大量的理賠給付導致公司財務破產的可能。

僅是基於某種危險的經驗去訂定單項保費此異於一般保險公司的經營理論，僅利用爲數不多的經驗資料只能代表部份的危險程度，因此我們必須考慮各種保單的差異

本文作者張士傑先生，現任國立政治大學保險系所專任副教授。
林素華小姐，現爲中華民國精算學會副會員，美國 ASA。

性，利用大量的危險損失資料分析損失率 (loss ratio)，方能利用大數法則，達成分散危險的結果，但此種保險的觀念卻往往被混淆而認知不清，主要原因在於當保險公司開發新保單時，起初幾年承保件數不是很多，如果只是利用這些經驗損失資料分析損失率，往往會造成 200 至 300% 的損失率估計誤差，形成保險公司因給付造成的巨大財務損失。

上述情形在國外團體健康保險中時有發生，可參考 Fuhrer(1993) 所討論的記錄，一般的可信度理論利用線性的觀念來分析，即未來的損失率可表成經驗損失率的線性模式，如果可信度爲 50%，若過去無損失的情況之下，未來的損失率將因此而降低 50%，而對過去發生損失兩倍的危險，則會有 50% 的附加結果，一般利用可信度理論所定義的修正損失率 (adjusted loss ratio) 爲：

修正損失率=可信度 × 經驗損失率+（1－可信度）× 期望損失率

而上述所舉例的結果可由此修正損失率的表示式計算得知。

利用可信度的方法有兩種，其中的近代可信度理論爲經驗費率 (experience rating) 的釐定，而古典可信度理論主要是分類表章費率 (manual classification rating) 釐定的標準，以下將分別介紹這些理論。

三、古典可信度理論：有限變動可信度理論 (limited fluctuation credibility theory)

就其發展過程而言，有限變動可信度理論於本世紀初年由美國精算師提出，亦稱爲古典可信度理論，與歐洲發展的可信度方法不盡相同，後者的發展較晚，亦稱爲近代可信度理論，有限變動可信度理論中的可信度可分爲完全可信度 (full credibility) 與部份可信度 (partial credibility)。

如果令 R 爲某種特定危險之下損失率的經驗估計值，r 爲此特定危險的期望損失率，c 爲預期損失率估計值或是考慮所有危險之下的損失率估計值，n 爲此特定危險之下的觀測損失件數而 Z 代表此危險的可信度，損失率的估計值可寫成 $\hat{r}=(1-Z)c+ZR$，代表預期損失率與經驗損失率的加權估計。在給定誤差範圍爲 $k\%$ 的有限變動幅度及準確度爲 $(1-\epsilon)$ 之下，R 的估計值取 r 完全可信度（即 $Z=1$）的意義爲 $P_r[|R-r|\leq k\%\cdot r]\geq 1-\epsilon$，即可利用此特定的危險損失資料估計此危險的損失率。利用大數法則的逼近，在特定 ϵ 與 k 值之下，所須要得到的經驗損失數，我們以 n_F 代表，即當損失數大於 n_F 時，我們即可利用觀測損失資料估計損失率，此時損失率的估計值爲 $\hat{r}=R$。

以下我們對於上述的理論進行討論，假設保險公司欲估計保險費率，而一般我們用布拉松 (Poisson) 分佈描述損失數的隨機分佈，以 N 代表此保險的理賠數，此分佈的期望值及變異數給定爲

$$E(N)=n,\ Var(N)=n$$

以 X_i 代表第 i 個損失的理賠金額，給定分佈的期望值及變異數爲

$$E(X_i)=m,\ Var(X_i)=\sigma^2,\ 1\leq i\leq N$$

假設損失件數與理賠金額互爲獨立，且個別的理賠金額亦相互獨立之下，損失理賠金

額 $R=\Sigma_{i=1}^{N}X_i$ 的期望值及變異數可依條件機率的性質計算，所得的數值為

$$E(R)=nm,\ Var(R)=n(\sigma^2+m^2)$$

如果給定的有限變動幅度 k=10% 而準確度 ϵ=5% ，則最小的 n 值可寫成

$$P_r(0.9r<R<1.1r)=0.95$$
$$P_r(\frac{-0.1r}{\sqrt{VarR}}<\frac{R-r}{\sqrt{VarR}}<\frac{0.1r}{\sqrt{VarR}})=0.95$$

代入保險理賠的期望值 $r=mn$ 及變異數 $Var(R)=n(\sigma^2+m^2)$ 於上式，可得

$$\frac{0.1r}{\sqrt{VarR}}=1.96\rightarrow\frac{0.1mn}{\sqrt{nm^2(1+\frac{\sigma^2}{m^2})}}=1.96$$

可解得 $n=384[1+(\frac{\sigma}{m})^2]$ ，對任意給定的 k 及 ϵ 而言，我們表示成 $n_F=n_0(1+(\frac{\sigma}{m})^2)$ ，

其中 $n_0=\frac{y^2}{k^2}=\frac{Z^2_{1-\frac{\epsilon}{2}}}{k^2}$ 。一般我們稱 $\frac{\sigma}{m}$ 為變異係數(coefficient of variation)，代表分佈的散度 (dispersion) 與分佈期望值的比值，因此不同的理賠分佈所須的觀測數值隨著危險分佈的變異程度而改變，對於不同的有限變動幅度 k 與準確度 ϵ 所計算的 n_0 列表於下以供參考：

表一　對不同參數 k 與 ϵ 之可信度參數 n_0 取值表

ϵ\k	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01
0.1	30	68	271	1082	27060
0.25	43	96	384	1537	38416
0.01	74	166	663	2654	66358
0.001	120	271	1083	4331	108274

而當觀察損失數低於 n_F 時，則必須考慮利用部份可信度（即 $Z<1$ ），說明在給定的準確程度之內，損失資料不足以估算損失率，必須考慮先前 (prior) 的損失率，對特定 ϵ 與 k 值，我們可依照有限變動的原理給定 $P[|Z(R-r)|<k\%\cdot r]\geq 1-\epsilon$，再次我們利用大數法則標準常態的逼近得到部份可信度的估計值，

$$P_r(Zr-k\%\cdot r<ZR<Zr+k\%\cdot r)=1-\epsilon$$
$$P_r(\frac{-kr}{Z\sqrt{VarR}}<\frac{R-r}{\sqrt{VarR}}<\frac{kr}{Z\sqrt{VarR}})=1-\epsilon$$
$$\frac{kr}{Z\sqrt{VarR}}=Z_{1-\frac{\epsilon}{2}}$$

上述的數值計算可得 $Z=\sqrt{\frac{n}{n_F}}$ ，利用部份可信度得到的損失率估計值則為 $\hat{r}=(1-Z)c+ZR$ 。

四、近代可信度理論：最大準確可信度理論 (greatest accuracy credibility theory)

歐洲發展的近代可信度理論有別於前述有限變動的思維方式，利用貝氏危險理論 (Bayesian risk theory) 中的最小期望平方誤差和危險函數原則估計模型中的參數，即利用過去的損失資料的某種函數值估計損失率，最小化期望平方誤差和函數而求得參數的估計量，如果令$\mu(\theta)$代表所欲估計參數函數值，以 g 表示過去的損失資料的某種函數，因假設參數自某母群體 (population) $\Lambda(\theta)$ 中隨機取樣給定，就貝氏統計觀點而言，即假設過去觀測值為 $\{x_i\}_{i=1}^{t}$ ，其中 t 代表過去觀測的個數，此過程的最適化原則可表示如下：

$$\min_{g(\cdot)} \int [\mu(\theta)-g(x_1,x_2,..x_t)]^2 d\,\Lambda(\theta)=\min_{g(\cdot)} E[\mu(\theta)-g(x_1,x_2,..x_t)]^2 \tag{1}$$

為了簡化計算數值上的複雜，我們先考慮 g 為較簡單的線性函數，亦即考慮線性的逼近結果，表成 $g(x_1,...,x_t)=c_0+\sum_{r=1}^{t} c_r E[x_r]$ ，一般又稱為線性可信度 (linearized credibility) 理論，另一種方法的估計量可取同質線性估計量 (homogeneous linear estimator)，即 $c_0=0$ ，詳見 Toutenburg(1982) 對線性模型統計性質的討論，此種線性逼近結果為 $g(x_1,...,x_t)=\sum_{r=1}^{t} c_r x_r$ ，取期望值可得 $E[\mu(\theta)]=\sum_{r=1}^{t} c_r E[x_r]$ ，因限制估計量須具有同質線性結果，此種估計量具有不偏 (unbiased) 的性質。更廣義的 g 函數包括半線性函數或是一般的連續函數，將於後敘述，首先就熟悉的線性函數討論一般的結果，為了便於分析我們先討論於 1975 年發展的 Hachemeister 迴歸模型，然後再分析 1970 年提出較早的 Bühlmann-Straub 模型，由此了解可信度模型發展的過程。

4.1 Hachemeister 迴歸模型

可信度迴歸理論由 Hachemeister 於 1975 年提出，因為面對美國各州損失率預估時受到不同通貨膨漲的影響，損失率必需考慮因時間趨勢的改變而做調整，因此引用迴歸的概念推廣較早發展的 Bühlmann-Straub 模型，首先假設我們欲估計來自同一母體的 q 種危險損失率，以θ_j代表影響第 j 個損失率的結構參數，以$\beta(\theta_j)=\beta_j$代表第 j 種危險的損失率，所觀察的損失數值隨時間變化以 $\hat{Y}_j=(y_{j1},..y_{jt})$ 行向量表示，其中並假設 q 種危險為相互獨立，考慮第 j 種危險時利用過去的經驗損失資料建構迴歸模式，以估計第 j 種危險的損失率為例，即利用 $E(Y_j)=X_j \cdot \beta(\theta_j)=X_j \cdot \beta_j$ 表示此種迴歸關係，模型中參數的假設如下：

（假設 1）：參數$\theta_1, \theta_2,...\theta_q$為取自相同母體$\Theta$中的獨立隨機變數，分別代表不同危險的參數，而$\Lambda(\theta)$代表此參數的分佈。

（假設 2）：$(\theta_1, \bar{Y}_1),(\theta_2, \bar{Y}_2),..(\theta_q, \bar{Y}_q)$ 分別代表相互獨立的損失率向量，損失率向量代表隨時間觀察的數值，為了簡化模型，我們假設對每一種危險的損失率計算時間間隔皆相等。

（假設 3）：β為自參數空間Θ映至 R^s 的函數，代表實際的估計數值，其中 s 為模型中的參數個數，代表實際估計參數的維數，σ^2為自參數空間Θ映至 R^1 的函數，代表觀測損失值的變異數。

簡單的圖示如下：

保單契約	$1.....j....k$
結構參數	$...\theta_j...$
觀測損失值（迴歸項）	$\{Y_{ji}(X_{ji})\}_{i=1}^{t}$

假設1說明於保險理賠研究中欲估計某種危險的損失率時，危險程度利用某種隨機分佈來描述，相同程度的危險所觀測的損失率有相互關係，主要的原因在於面臨相同但未知危險參數θq的影響，第2個假設則說明不同危險程度的損失率無相互關係，第3個假設則說明結構參數與估計變數之間的關係。

於模型中對第j個危險的迴歸式為$E(\tilde{Y}_j \mid \theta_j)=X_j \cdot \beta(\theta_j)=X_j \cdot \beta_j$, $Cov(\tilde{Y}_j \mid \theta_j)=\sigma^2(\theta_j) \cdot P_j^{-1}$，其中$X_j$為已知的設計矩陣(design matrix)，$P_j$為對角的加權矩陣，其中的數值大小分別代表特定時間觀察時平均值的的樣本數，可以寫成 $P_j=\begin{pmatrix} P_{1j} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & P_{tj} \end{pmatrix}_{t\times t}$。

因假設參數係自母體中觀測而得，所得到隨機係數(random coefficient)迴歸模型的表示式如下：

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_q \end{pmatrix} + \tilde{\epsilon}, E(\tilde{\epsilon})=\tilde{0},\ Cov(\tilde{\epsilon})=\sigma^2 \cdot \mathrm{P}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix} + \tilde{\delta},\ E(\tilde{\delta})=\tilde{0},\ Cov(\tilde{\delta})=I_{q\times q} \otimes \Gamma \tag{2}$$

$\otimes$代表kronecker乘積，詳細的定義可見Christensen(1987)。

Zehnwirth於1984年的論文中歸納此種模型的分析方式，一般可利用常態假設貝氏理論(normal based bayes theory)及常態假設頻率理論(normal based frequentist theory)，利用上述兩種方法皆可得到相同的最適線性不偏(best linear unbiased, BLU)估計結果，在常態假設的貝氏理論中我們利用最適化貝氏危險函數取得參數的估計值，而在常態假設頻率理論中我們利用混成模型(mixed model)估計參數，詳細的文獻探討可見Hartigan (1969)，Goldberger和Theil(1961)。

參數估計的結果簡述於下：

$$\begin{cases} \hat{\tilde{\beta}}_q = \tilde{\beta}_0+K_j(\tilde{Y}q-X_q\tilde{\beta}_0), \\ Cov[\hat{\tilde{\beta}}_q-\tilde{\beta}_q] = \Gamma - K_q X_q \Gamma \\ K^j = \Gamma X_q'(X_q \Gamma X_q' + \sigma_0^2 P_j^{-1})^{-1} \\ Z_j = (\Gamma^{-1} + \sigma_0^{-2} X_q' P_q X_q)^{-1} \sigma_0^{-2} X_q' P_j X_q \end{cases} \tag{3}$$

其中對上述未知參數的估計為：

$$\left\{\begin{aligned}
&\hat{\beta}_q=(X_q' P_q X_q)^{-1} X_q' P_q X_q\ ,\\
&\hat{\sigma}_0^2=\frac{\Sigma_{j=1}^q(\hat{Y}_j-X_j\hat{\beta}_j)' P_j(\hat{Y}_j-X_j\hat{\beta}_j)}{q(n-s)}\\
&\bar{Z}_j=\frac{Z_j}{\Sigma_{j=1}^q Z_j}\ ,\\
&\hat{\hat{\beta}}_0=\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j\hat{\hat{\beta}}_j\\
&\hat{\Gamma}=\frac{\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j(\hat{\hat{\beta}}_q-\hat{\hat{\beta}}_0)(\hat{\hat{\beta}}_q-\hat{\hat{\beta}}_0)'-\hat{\sigma}_0^2\,\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j(\mathrm{I}-\bar{Z}_j)(X_j' P_j X_j)'}{I-\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j^2}
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

利用(3)-(4)式的遞迴關係式，我們編寫電腦程式計算收斂之 $\{\mu_j\}_{j=1}^q$ 參數估計數值。

4.2 Bühlmann-Straub 模型

Bühlmann-Straub 模型可視成 Hachemeister 模型的簡化， Bühlmann-Straub 模型於1970年提出，古典 Bühlmann(1967, 1969) 模型只考慮一種危險的損失率估計，而 Bühlmann-Straub 模型同時考慮多種不同危險時保單損失率的預估，爲古典 Bühlmann 模型的推廣，但不考慮時間趨勢的影響，即可比照 Hachemeister 的模型，而令 $X_q=I$, $\tilde{\beta}_q=\mu_q$, $\Gamma=\psi$, $P_q=\Sigma_{i=1}^p P_{ij}$, $\bar{Y}_q=\frac{\Sigma_{i=1}^p Y_{ij}}{p}$ ，因爲參數皆爲純量，可簡化迴歸模型的結果如下：

$$\left\{\begin{aligned}
&Z_q=P_{\cdot q}\left(P_{\cdot q}+\frac{\sigma_0^2}{\psi}\right)^{-1},\\
&\tilde{\mu}_q=\mu_0+Z_q(\bar{Y}_{\cdot q}-\mu_0),\\
&\hat{\mu}_q=\frac{\Sigma_{i=1}^n P_{ij}Y_{ij}}{P_{\cdot q}}\\
&\hat{\sigma}_0^2=\frac{\Sigma_{j=1}^q P_{ij}(Y_{ij}-\hat{\mu}_{ij})^2}{q(n-s)},\\
&\hat{\psi}=\frac{\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j(\hat{\mu}_q-\hat{\mu}_0)^2-\hat{\sigma}_0^2\,\Sigma_{j=1}^q\bar{Z}_j(I-\bar{Z}_j)P_{\cdot j}^{-1}}{I-\Sigma_{j=1}^q Z_j^2}
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

可利用上述的遞迴關係計算收斂之參數估計數值，即爲結構參數的不偏估計量，再將此估計量代入，可得到同質估計量，被稱爲最適不偏同質線性可信度估計量 (optimal unbiased homogeneous linearized credibility estimator) ，可參考 Goovaerts(1990) 所著實用精算方法 (effective actuarial methods) 一書的討論。

五、廣義可信度理論

此節將介紹推廣的可信度理論，第一部份將討論線性模型中的自變數經過某種函

數轉換的情形，此種方法稱爲半線性可信度，第二部份我們同時考慮預估損失幅度與發生次數的保險組合 (insurance portfolio)，爲了配合實際的保險損失率預估，我們將不只討論單一危險程度時的損失率大小或發生次數，對於此推廣的結果我們稱爲多維可信度。

5.1 半線性可信度

首先我們考慮結構參數空間 Θ 及有限序列 X_1，X_2，… X_t 構成的損失率隨機變數，給定結構參數後損失率隨機變數爲條件獨立，此與 4.1 節中的模型假設相同，此處考慮給定函數 f_1，f_2，… f_n 取值後的損失觀測值，利用常數項與隨機變數 $f_p(X_r)(p=1, .., n;\ r=1,..,t)$ 的線性組合估計損失率 $\mu_0(\Theta)$，所產生的結構參數定義如下：

$$
\begin{aligned}
&m_p=E[\mu_p(\Theta)]=E[f_p(X_r)],\\
&a_{pq}=E[Cov[f_p(X_r),\ f_q(X_r)|\Theta],\\
&b_{pq}=Cov[\mu_p(\Theta),\ \mu_q(\Theta)],\\
&c_{pq}=Cov[f_p(X_r),\ f_q(X_{r'})],\ r\neq r',\\
&d_{pq}=Cov[f_p(X_r),\ \mu_q(\Theta)]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

對所有的 p 與 q 介於 0 與 n 之間時，上述參數並有如下的關係

$$c_{pq}=a_{pq}+b_{pq},\ d_{pq}=b_{pq},\ p,q=0,..,n \tag{7}$$

上述保險組合中利用最小平方法的估計值爲

$$M=\sum_{p=1}^{n} Z_p=\sum_{r=1}^{t} \frac{1}{t} f_p(X_r)+m_0-\sum_{p=1}^{n} Z_p\cdot m_p$$

其中的可信度 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 滿足線性方程組如下

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n}(c_{pq}+(t-1)d_{pq})Z_p=td_{0q},(q=1,..,n)\\
&\sum_{p=1}^{n}(a_{pq}+tb_{pq})Z_p=tb_{0q},(q=1,..,n)
\end{aligned}
$$

爲簡化結果表示，只考慮 $p=0$ 及 $q=1$ 的情形爲例，參數的不偏估計值則爲

$$
\begin{aligned}
&\hat{m}_0=\frac{1}{kt}X^0_{..}=\frac{1}{kt}\ \Sigma_{j=1}^{k}\Sigma_{r=1}^{t}f_0(X_{jr})\\
&\hat{a_{01}}=\frac{1}{kt}\ \Sigma_{j=1}^{k}\Sigma_{r=1}^{t}(X^0_{jr}-\frac{1}{t}X^0_{j.})(X^1_{jr}-\frac{1}{t}X^1_{j.})\\
&\hat{b_{01}}=\Sigma_{j=1}^{k}(\frac{1}{t}X^0_{j.}-\frac{1}{kt}X^0_{..})(\frac{1}{t}X^1_{j.}-\frac{1}{kt}X^1_{..})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

對一般的 p, q 值可利用此結果估計此保險組合的損失率。

5.2 多維可信度

多維可信度理論由 Jewell(1974) 所提出，因爲在估計損失率時有許多重要變因必須加以入考慮，諸如對汽車保險的損失率預估，常常必需考慮損失幅度 $\{X_{js}\}_{s=1}^{t}$ 與損失頻率 $\{N_{js}\}_{s=1}^{t}$ 兩項因素，其中下標 j 代表不同的保險契約，s 代表不同的年份，在假設給

定結構參數 Θ_j 之下，損失幅度與損失頻率兩項因素在不同時間爲相互獨立，我們欲估計損失率 $\mu(\Theta_j)=E[X_{js}\mid\Theta_j]$，主要的方法爲利用損失幅度 X_{js} 與損失頻率 N_{js} 兩項變因的線性函數極小化期望均平方函數 (mean squares error function)，其中欲估計的線性函數給定爲 $M_j^a=a_0+a_1N_{j1}+b_1X_{j1}+\ldots,\ a_nN_{jn}+b_nX_{jn}$，所定義的期望均平方函數爲 $E[\{\mu(\Theta_j)-M_j^a\}^2]$。

Sundt(1987) 應用此種迴歸模型於挪威汽車保險損失率的研究，他考慮多種類型的車種，考慮危險曝露時間內的損失金額除以所收取的保費爲因變數，並收集汽車的重量、引擎馬力、汽缸容量及價格的技術性資訊爲自變數，如此可建構迴歸模型中已知的設計矩陣，再利用迴歸模式分析相互的關係，而此種迴歸方法應取決於結構參數的選定，即須針對不同的車種危險程度分別考慮。

六、可信度理論的發展

如同產險精算基礎 (Fundations of Casualty Actuarial Science) 書中對可信度的評論："可信度概念的建立是產險精算師於產險精算領域中最重要而且偉大的貢獻"，而在簡介可信度的理論之後，我們來回顧發展近一世紀的研究過程，可信度最早的論文由 Mowbray 於 1914 年及 Whitney 於 1918 年分別提出，而一般實用的動機也可從這兩篇文章一窺究竟。

Bühlmann (1967,1969) 在早期發展中奠定最大準確可信度理論的根基，他定義可信度估計量爲極小化貝氏危險的估計量，並且考慮不同加權時的分析方法，發展成日後非常重要的 Bühlmann-Straub 模型；Jewell 接下來於 1974 年提出貝氏可信度理論，並針對不同的參數結構建立階級 (hierarchical) 式的可信度模型，對於不同結構參數的研究見於 De Vylder(1978, 1981, 1984)，Norberg(1970, 1980, 1982) 及 Sundt(1979)；考慮附加保費及因時間更新估計損失率的方法見於 Gerber 及 Jones(1975), Gerber(1980), Sundt(1987) 和 Centeno De Lourdes(1989)。

推廣的半線性可信度理論由 De Vylder 於 1976 年提出，Witting 並於 1987 年利用線性馬可夫 (Markov) 性質討論只與相鄰時間有關的損失率估計，而實際運用此種模型分析損失率的過程可見於 Sundt(1987)，因此篇文章僅就部份主題加以介紹，進一步的閱讀可參考相關文獻。

七、實例計算與結語

於此節中我們將應用可信度理論於實際資料，我們參考 Zehnwirth(1984) 的論文引用 Oakenfull 等人 (1982) 的觀察資料，Oakenfull 等人考慮栽種自相同品種的 n 種穀物資料，欲利用取樣的穀物資訊估計此穀物蟲害的平均損失率，因此利用隨機布拉松密度 (random-intensity Poisson) 模型分析不同群組穀物的損失率，雖然此例子應用於農業研究，我們可容易推廣至一般的產物或團體健康保險。我們可模擬此結果於產險損失率的研究，相對於第 i 群組穀物的損失率 λ_i，我們考慮爲第 i 種危險程度的損失率，建構模型所假設的條件如下：

（假設 1）：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 分別代表自母體中選取的損失率。

（假設 2）：給定損失率爲 λ_i，損失的件數 x_i 爲布拉松分佈，如果令 e_i 代表已知個別

危險程度下的曝露數，則損失件數 x_i 的期望值爲 $e_i\lambda_i$ 。

所觀察的數值如下：

表二 經驗數值表

群組(group)	曝露數(exposure)	損失件數(No. of Claims)
1	55	13
2	55	0
3	55	0
4	50	2
5	50	0
6	40	3
7	40	3
8	40	2
9	30	0
10	25	0
總 數	440	23

可將損失率資料模型建構成觀測 (observation) 和系統 (system) 方程式，分別代表觀測數值的結果和隨機參數的假設：

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \tilde{\epsilon},\ Cov(\tilde{\epsilon}) = \lambda_0 \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + \tilde{\delta},\ Cov(\tilde{\delta}) = \sigma_\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

利用迴歸模式計算的損失率估計值爲 $\tilde{\lambda}=\lambda_0+Z_i(\hat{\lambda}_i-\lambda_0)$ ，其中對參數的預估如下：

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{x_i}{e_i}, \\ \hat{\lambda}_0 = \Sigma_{i=1}^{n}\bar{Z}i, \\ \bar{Z}i = \frac{Z_i}{\Sigma_{i=1}^{n} Z_i}, \\ \hat{\sigma}_\lambda^2 = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{Z}_i(\hat{\lambda}_i-\hat{\lambda}_0)^2-\lambda_0\Sigma_{i=1}^{n}\bar{Z}_i(1-\bar{Z}_i)e_i^{-1}}{(1-\Sigma_{i=1}^{n}\bar{Z}_i)} \end{cases} \tag{11}$$

給定 σ_λ^2, λ_0 的初始估計值即可利用上列(11)式的遞迴關係計算各參數估計數值，最後得到收斂的結果，所撰寫的S-PLUS程式見於附錄，參數結果將列於下表，所得結果與Zehnwirth(1984)論文的結果大致吻合。

表三　數值結果

群組	$\hat{Z}_i$	$\hat{\lambda}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$s.e.(\tilde{\lambda}_i)$
1	0.8325838	0.2364	0.204967	0.027187
2	0.8325838	0.0000	0.008174	0.027187
3	0.8325838	0.0000	0.008174	0.027187
4	0.8188745	0.0400	0.041599	0.028279
5	0.8188745	0.0000	0.008844	0.028279
6	0.7834010	0.0750	0.069331	0.030924
7	0.7834010	0.0750	0.069331	0.030924
8	0.7834010	0.0500	0.049746	0.030924
9	0.7306485	0.0000	0.013152	0.034485
10	0.6933002	0.0000	0.014976	0.036798

所得的收斂數值爲 $\hat{\lambda}=0.04882992$, $\hat{\sigma}_0^2=0.0044152$ ，上表中的標準差估計值以 $s.e.(\hat{\lambda}_0)=(\sum_{i=1}^{10}\hat{Z}_i)^{-\frac{1}{2}}$, $s.e.(\hat{\lambda}_i)=(\hat{\lambda}_0\hat{Z}_i e_i^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ 計算而得，由表中的結果，我們可以發現只利用各別群組的經驗資料估計損失率，則 $\hat{\lambda}_2=\hat{\lambda}_3=\hat{\lambda}_5=\hat{\lambda}_9=\hat{\lambda}_{10}$。若僅就此資料分析，則將得到第2,3,5,9,10群值的損失率爲 0 ，若就可信度的理論分析，即考慮全部的經驗資料，可得到 $\hat{\lambda}_2=\hat{\lambda}_3=0.008174$, $\hat{\lambda}_5=0.008844$, $\hat{\lambda}_9=0.013152$, $\hat{\lambda}_{10}=0.014976$ ，代表分別考慮全體資料時的個別危險損失估計，而針對曝露數的不同得到較爲合理的損失率預估，相對地 $s.e.(\hat{x}_i)$ 提供了誤差的測量，因爲同時考慮10個群組的資料分析，估計各別損失率時可減少因個別過少的經驗資料而造成的偏差，而得到比較合理的估計損失率數值。

未來將利用已發展詳盡的可信度理論於國內的產險費率分析，以期建立精確合理的保險費率，相信借助歐美先進精算技術必能帶動國內產險的研究，同時也期望在可信度理論中有關半線性或非線性可信度理論能有更新的突破和模型建構後電腦程式的撰寫。

參考文獻：

1.Bühlmann, H.(1967), "Experience Rating and Credibility", ASTIN Bulltin, 4, 3, 199-207.

2.Bühlmann, H.(1969), " Experience Rating and Credibility", ASTIN Bulltin, 5, 2, 157-165.

3.Centeno De Lourdes, M.(1989), "The model with Premium Calculated according to the Variance Principle", Insurance: Mathematics and Economics, 8,3-10.

4.Christensen, R.(1987), Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models, Springer-Verlag, New York.

5.De Vylder, F.(1976), "Optimal semilinear credibility", Mitteilungen der VSVM, 76, 17-40.

6.De Vylder, F.(1978), "Parameter Estimation in Credibility Theory", ASTIN Bulltin, 10,1, 99-112.

7.De Vylder, F.(1981), "Practical Credibility Theory with Emphasis on Optimal Parameter Estimation", ASTIN Bulltin, 12, 2, 115-131.
8.De Vylder, F.(1984), "Practical Models in Credibility Theory, Including Parameter Estimation", F. De Vylder et al.(eds.), Premium Calculation in Insurance, Reidel, Dordrecht.
9.Foundations of Casualty Actuarial Science (1990), 2nd edition, Casualty Actuarial Society.
10.Fuhrer, C.S.(1993), Credibility Theory, Record, SOA, Vol19, No. 1B. pp. 863-882.
11.Gerber, H.U.(1980), "Credibility for Esscher Premium", Mitteilungen der VSVM, 80, 3, 307-312.
12.Gerber, H.U. and Jones, D.A.(1975), "Credibility formulas of the updating type", in "credibility, theory andapplication", Proceedings of the Berkeley Actuarial Research Conference on credibility, Academic Press, New York, 89-109.
13.Goldberger, A.S.and Theil, H.(1961), "On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics", In tern. Economic Review, 2, pp.65-78.
14.Goovaerts, M.J.(1990), Effective Actuarial Methods, North Holland, New York.
15.artigan, J.A.(1969), "Linear Bayesian Methods", J.R.S.S.B., 35, pp.379-421.
16.Mowbray, A.H.(1914), "How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium", Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1, 24-30.
17.Norberg, R.(1979), "The Credibility Approach to Experience Rating", Scandinavian Actuarial Journal, 1979, 73-80.
18.Norberg, R.(1980), "Empirical Bayes Credibility", Scandinavian Actuarial Journal, 1980, 177-194.
19.Norberg, R.(1982), "On Optimal Parameter Estimation in Credibility", Insurance: Mathematics and Economics, 1, 2, 73-80.
20.Oakenfull, E., Salbe, I. and Zehnwirth, B.(1984), "A Note on the Estimation of Mean Intensity of Insect Infestation", Biometrics.
21.S-PLUS Programmer's Manual, (1989), Version 3.2, StatSci, MathSoft Inc. Seattle, Washington.
22.Sundt, B.(1979), "On Choice of Statistics in Credibility Estimation", Scandinavian Actuarial Journal, 1979, 115-123.
23.Sundt, B.(1987), "Credibility and old Estimates", Insurance: Mathematics and Economics, 6, 189-194.
24.Toutenburg, H.(1982), Prior Information in Linear Models, John Wiley & Sons, New York.
25.Whitney, A.W.(1918), "The Theory of Experience Rating", Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 4, 274-292.
26.Witting, G.(1987), "The linear Markov Property in credibility theory", ASTIN Bulletin, 17, 71-84.

27.Zehnwirth, B.(1984), "Credibility: Estimation of Structural Parameters", F. De Vylder et al. (eds.), Premium Calculation in Insurance, Reidel, Dordrecht.

附錄： S-PLUS 程式 > po

```
>po
function(sigma, lambda)
{
        e <- c(55, 55, 55, 50, 50, 40, 40, 40, 30, 25)
        x <- c(13, 0, 0, 2, 0, 3, 3, 2, 0, 0)
        est <- x/e
        z <- seq(1:10)
        vars <- seq(1:10)
        for(i in 1:10) {
                z[i] <- (e[i] * sigma)/(e[i] * sigma + lambda)
        }
        barz <- z/sum(z)
        lambda <- sum(barz * est)
        sigma <- (sum(barz * (est - lambda)^2) - lambda * sum(barz * (1 -
                barz) * (e^-1)))/(1 - sum(barz^2))
        final <- lambda + z * (est - lambda)
        for(i in 1:10) {
                vars[i] <- (lambda * z[i] * e[i]^-1)^(1/2)
}
        cat("The solution: ", "\n")
        cat("sigma=", sigma, "\n", "lambda=", lambda, "\n")
        list(sigma = sigma, lambda = lambda, z = z, final = final, vars =
                vars)
}
po(0.004415239,0.04882997)
The solution:
sigma=
0.00441523170848654
lambda= 0.0488299249584169
$sigma:
[1] 0.004415232
$lambda:
[1] 0.04882992

$z:
[1] 0.8325838 0.8325838 0.8325838 0.8188745 0.8188745 0.7834010 0.7834010
[8] 0.7834010 0.7306485 0.6933002

$final:
[1] 0.204967453 0.008174921 0.008174921 0.041599325 0.008844344 0.069331589
[7] 0.069331589 0.049746563 0.013152415 0.014976130

$vars:
[1] 0.02718790 0.02718790 0.02718790 0.02827917 0.02827917 0.03092467
[7] 0.03092467 0.03092467 0.03448551 0.03679880
```