不同利率模型下之債券評價分析

張士傑
陳威光

一、前言

投資對保險公司的經營是一項非常重要的課題，保險公司基於政府法令的限制及保險契約給付的義務，投資的策略通常著重於週轉容易而且安全性較高的金融工具，相較於獲利高但風險較大的股票市場，債券自然成爲一種可行的投資工具。通常債券被視爲較保守的投資，原因在於它不像股票價格有非常大的波動，但具有較大的流通性及保證的收益率。就美國的金融市場而言，將近80%新成立的金融機構是透過債券市場進行一般投資及風險規避。而我國債券流通市場近年來亦快速成長，依臺灣證券交易所的證交資料（參1）統計，民國八十一年債券成交值首度超過股票之成交值，高達新台幣10.7兆元。八十三年更高達16兆元，預期我國債券現貨市場將會有顯著的成長。

債券可由公司、中央或縣市政府發行，前者稱爲公司債券、後者稱爲公債。債券可視成一種借貸的契約，於指定的到期日(maturity date)時清償所借貸款項。一般最流通的債券可分成無息債券(zero-coupon bond或pure discount bond)與息票債券(coupon bond)。於債券存續期間內定期支付事先聲明利息的憑證，稱爲息票債券，如果期間不支付利息則稱爲無息債券。發行債券對發行者而言爲籌集資金的方法之一，而對投資者而言可收取比銀行利息爲高的保證報酬率。債券的價格與市場利率呈反向變動，換句話說債券價格反映投資市場的利率變動，因此利率模型的決定及對債券的定價的影響就十分的重要。

較詳細的債券分類、介紹與歷史可見於Little與Rhodes所著的「了解華爾街」一書(Understanding Wall Street)（參2，121-145頁），而本文主要討論的內容爲債券在不同利率模型下的定價理論，希望透過數學模型的建構洞悉債券價格的變動，幫助

本文作者張士傑先生，現任國立政治大學保險系所專作副教授。
陳威光先生，現任國立政治大學金融系所專任副教授。

投資者了解利率變動下債券價格的風險的情形。

二、定價模型的建構

首先我們假設 $V(t)$ 代表時間 t 時契約的價值，即爲債券的價值，並令 $r(t)$ 代表時間 t 時的無風險即期利率 (risk free spot interest rate)，依 Hull（參 3）的定義，即爲無息債券的收益率，$K(t)$ 代表時間 t 的付息款項，因此當 $t=T$ 時 $V(T)=Z$，Z 爲到期日的應付款項總額，我們欲求當 $t<T$ 時的債券價值 $V(t)$，爲避免過於計算複雜，我們僅就不可強制贖回債券討論其結果。

假設我們持有一種附息票的債券，於時間 dt（即自 t 至 $t+dt$）的資產價值變化即爲

$$\frac{dV}{dt}\cdot dt$$

於此時間變化時，收到的息票利息以 $K(t)dt$ 表示，$K(t)$ 可假設爲連續或離散函數，分別代表連續計息或是分期計息的債券，其單位時間資產價值總額增值爲

$$(\frac{dV}{dt}+K(t))\cdot dt$$

在無套利 (arbitrage) 的情形假設下，即無法在不同的金融市場中利用差價買賣債券賺取無風險的利潤，則此時債券單位時間的價值變化總額應與無風險利息給付 $r(t)\cdot V(t)$ 相等，其中 $r(t)$ 代表連續支付的利息，亦稱爲時間 t 的息力 (force of interest)，上述結果可表成微分方程式如下：

$$(\frac{dV}{dt}+K(t))=r(t)\cdot V(t) \tag{1}$$

如果 $K(t)$ 爲連續利息給付，解上述的非同質性常微分方程式 (nonhomogeneous ordinary differential equation)，可得債券到期日前時間 t 的價值爲

$$V(t)=e^{-\int_t^T r(t)dt}\cdot(Z+\int_t^T K(s)e^{\int_s^T r(t)dt}ds) \tag{2}$$

如果息票的支付爲固定期間時，即以一般的年金型式支付，我們將推廣至一般的時間給付，即 $K(t)$ 爲離散函數，K_i 代表 t_i 時的息票價值，假設給付 n 時期的時間點爲 $\{t_i\}_{i=1}^n$，我們可利用 $\delta(x)$ 函數改寫(1)式爲(3)式如下（其中 $\delta(x)=1$，當 $x=0$；當 x 爲其它值時，δ 函數值爲零）：

$$(\frac{dV}{dt}+\sum_{i=1}^n K_i(t)\delta(t-t_i))=r(t)\cdot V(t) \tag{3}$$

解上述的常微分方程式，可得債券於到期日前時間 t 的價值爲

$$V(t)=e^{-\int_t^T r(t)dt}(Z+\sum_{i=1}^n\int_t^T K_i(s)H(t_i-s)e^{\int_s^T r(t)dt}ds) \tag{4}$$

其中 $H(x)$ 爲單邊 (Heaviside) 函數，定義如下：

$$H(x)=\begin{cases} 0 & 當 x<0 \\ 1 & 當 x\geq 0 \end{cases}$$

我們可得 $\int_{-\infty}^{x}\delta(s)ds=H(x)$ ，依微分的計算可得 $H'(x)=\delta(x)$ 。

㈠固定利率模型

當利率爲固定值時，我們可令 $r(t)=r_0$ 並簡化(4)式得到債券於到期日前時間 t 的價值爲

$$V(t)=e^{-(T-t)r_0}(Z+\sum_{i=1}^{n}\int_t^T K_i(s)H(t_i-s)e^{(T-s)r_0}ds) \tag{5}$$

其中(5)式可視成(2)式的推廣，即令 n 趨近無限時，(2)與(5)式有相同的結果，實例的計算過程將於第四節中討論。

㈡隨機利率模型

上述對 $r(t)$ 爲定值的假設當時間極短時尚能成立，但是較長時期投資者而言，則這種假設與債券價格的振盪事實明顯不合，因債券價格與利率成反方向的變動，因此我們必須放寬對固定利率 $r(t)$ 的假設，進而探討利率爲隨機過程的一般情形，（可參考 Tilley（參4）於美國精算學會 (Society of Actuaries, SOA) 的 V-380 課程中對此主題一般但詳盡的討論），以下我們爲了符號簡單的原因，將利用 r 代表 $r(t)$ 。

對即期利率而言，我們考慮隨機過程所給定的微分方程式表示如下：

$$dr=w(r,t)dX+\mu(r,t)dt,\ dX\sim N(0,dt) \tag{6}$$

其中 $X(t)$ 代表 Gauss-Wiener 過程，上式亦稱爲 *Itô* 隨機微分方程式 (stochastic differential equation, SDE)，此過程單位遞增 dX 的變異數爲 dt ，而期望值爲 0 ，其中 $w(r,t)$ 及 $\mu(r,t)$ 分別代表利率過程 $r(t)$ 中瞬間的擴散係數 (diffusion coefficient) 及位移係數 (drift coefficient) 。上述的隨機模型爲 Vasicek（參5）、Cox, Ingersoll 與 Ross（以下簡稱爲 CIR）（參6），Hull 與 White（參7）所提出隨機模型的一般表示式，將於後討論其發展過程及模型意義價值。我們將利用 Black 及 Scholes（參8）的計價模型（以下簡稱爲 B-S 模型），計算債券的資產價值，我們必須強調此理論基於市場是有效率的假說 (efficient market hypothesis)，具體表現的特徵如下：

- 過去的經驗充份反映於現在的資產價值，並且無額外的資訊。
- 市場對資訊的變化能立即反映。

首先債券價值 V 可視爲利率 r 與時間 t 的函數，我們利用不同到期時間 T_1 與 T_2 的債券 V_1 與 V_2 達到避險 (hedge) 的結果，考慮買進 (long) 一單位 V_1 同時賣出 (short) $\Delta=\frac{\partial V_1}{\partial r}/\frac{\partial V_2}{\partial r}$ 單位的 V_2，或反向操作策略（即考慮賣出一單位 V_1 同時買進 Δ 單位的 V_2），此時投資組合的資產價值爲

$$\Pi=V_1-\Delta V_2 \tag{7}$$

利用 Π 的單位時間變化量及 *Itô* 的結果於 r 與 t 的函數 $V(r,t)$ ，可得

$$d\Pi=\frac{\partial V_1}{\partial t}dt+\frac{\partial V_1}{\partial r}dr+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt-\Delta(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt+\frac{\partial V_2}{\partial r}dr+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt) \tag{8}$$

代入△，將(8)式中 $d\Pi$ 中隨機項的係數爲零，代表此種投資組合的風險爲零，此模型中，投資應隨時做到避險的動作，使契約期間的風險爲零。依套利不存在的假設，即所得到的資產增加量應與無風險的獲利相等，上式可表成

$$d\Pi = r\Pi\, dt \tag{9}$$

利用(7)及(8)式代入(9)式，左右兩邊各取 V_1 與 V_2 的函數可得

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}-rV_1\right)\Big/\frac{\partial V_1}{\partial r}=\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}-rV_2\right)\Big/\frac{\partial V_2}{\partial r} \tag{10}$$

因兩邊各只爲 V_1 與 V_2 的函數，可令 V 爲服從下式的方程式，其中 $a(r,t)$ 與 T_1 及 T_2 無關，亦與 V 無關的函數。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-rV\right)\Big/\frac{\partial V}{\partial r}=a(r,t) \tag{11}$$

爲計算方便，令 $a(r,t)=w(r,t)\cdot\lambda(r,t)-\mu(r,t)$，將於後討論。歸納上述結果可知，無息債券定價的方程式可於下式表示：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(\mu-\lambda w)\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0 \tag{12}$$

給定的邊界值爲 $V(r,T)=Z$，Z 爲此債券的面值或交割的價值。

息票債券定價的方程式可於下表示：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(\mu-\lambda w)\frac{\partial V}{\partial r}-rV+K(r,t)=0 \tag{13}$$

給定邊界值爲 $V(r,T)=Z$，而對於息票債券而言，如果 $K(r,t)$ 爲離散給付的利息函數，$V(r,t)$ 應服從 $V(r,t_c^-)=V(r,t_c^+)+K_c$。上述所討論的利率隨機模型可表成

$$w(r,t)=\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)} \tag{14}$$

$$\mu(r,t)=\left(-\gamma(t)r+\eta(t)+\lambda(r,t)\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)}\right) \tag{15}$$

其中 α，β，γ，η 與 λ 皆爲時間 t 的函數，λ 亦稱爲風險的市場的價值 (market price of risk)，詳細的討論見於 Wilmott et al.（參 9）。

考慮帶入隨機利率的假設，方程式(12)的解可表成

$$V(r,t)=Z\cdot e^{A(t;T)-rB(t;T)}$$

，其中 $A(t;T)$ 與 $B(r;T)$ 滿足

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\eta(t)B+\frac{1}{2}\beta(t)B^2 \tag{16}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\gamma(t)B+\frac{1}{2}\alpha(t)B^2-1 \tag{17}$$

因考慮 $V(r,T)=Z$ 的邊界值條件，必須滿足 $A(T;T)=0$, $B(T;T)=0$。

爲簡化計算的複雜度，我們假設參數皆爲定數時，其解可表成

$$\frac{2}{\alpha}A=a\psi_2 log(a-B)+(\psi_2-\frac{1}{2}\beta)b log((B+b)/b)+\frac{1}{2}B\beta-a\psi_2 log a, \tag{18}$$

$$B(t;T)=\frac{2(e^{\psi_1(T-t)}-1)}{(\gamma+\psi_1)(e^{\psi_1(T-t)}-1)+2\psi_1}, \tag{19}$$

其中

$$b,a=\frac{\pm\gamma+\sqrt{\gamma^2+2\alpha}}{\alpha},$$

$$\psi_1=\sqrt{\gamma^2+2\alpha}\ ,\ \psi_2=\frac{\eta+a\alpha/2}{a+b}$$

利率的模型對債券定價上佔著十分重要的地位，但隨機利率模型的建構並非容易，有不少的理論研究與實證正在發展，利率的時間結構性在計算債券價值時是非常重要的問題，具有較佳的解析結果往往可減少複雜的計算，以下分別探討不同利率的模型，進一步討論債券的定價模型：

(一) Vasicek 模型

Vasicek 的利率模型中，假設(14)及(15)式中$\alpha=0$，係數皆與時間無關。Vasicek 於 1977 年著文中舉例的利率期間結構 (term structure of interest rates) 為

$$dr=\alpha(\gamma-r)dt+\rho dX,\ \alpha>0 \tag{20}$$

此模型首先由 Merton（參10）提出分析即期利率，初始 Merton 所提出的模型可表為

$$dr=\alpha dt+\rho dX$$

可視為具位移的布朗運動，Vasicek 推廣此類模型稱為 Ornstein-Uhlenbeck 過程，亦稱為彈性隨機漫步 (elastic random walk)，它比一般的 Gauss-Wiener 過程穩定，此過程的瞬間的位移為$\alpha(\gamma-r)$，此作用使長期的利率以速率α趨近於終值γ，瞬間的變異數為ρ^2，使得瞬間利率於γ附近呈現振盪波動，而得到一般的觀測利率數值。

(二) CIR 模型

此模型即在(14)及(15)式中$\beta=0$，係數皆與時間無關。Cox, Ingersoll 及 Ross 等人於 1981 年論文中考慮對數效用 (logarithmic utility) 函數所推導得到的利率期間結構為

$$dr=\alpha(\gamma-r)dt+\rho\sqrt{r}\ dX \tag{21}$$

其中利率增加時，本身的變動隨之增加，上式的表示式可得一般對無息債券計價的偏微分方程式如下：

$$\frac{1}{2}\rho^2 rP_{rr}+[\alpha\gamma-(\alpha+\lambda)r]P_r+P_r-rP=0 \tag{22}$$

Dothan（參11）考慮利用ρrdX取代$\rho\sqrt{2}dX$，並且不考慮位移來分析無息債券及可贖回債券的價值，Black 及 Scholes（參8）的幾何布朗運動 (Geometric Brownian Motion, GBM) 由 Marsh 及 Rosenfeld（參12）提出分析利率模型，模型如下：

$$dr=\alpha rdt+\rho rdX$$

Brennan 及 Schwartz（參13）則利用下列利率模型：

$$dr=\alpha(\gamma+r)dt+\rho rdX$$

推導可轉換債券的數值計算，其中 GBM 可視成 B-S 模型的特例，即取$\gamma=0$，而 Dothan 模型可視成 GBM 模型的特例，即取$\alpha=0$，上述的 GBM 與 B-S 模型皆將利息的變異數表成當時利率平方的函數。

㈡H & W 模型

Hull 與 White 歸納 Vasicek 與 CIR 模型，表示如下

$$dr=\alpha(\gamma-r)dt+\rho r^{\beta}dX \tag{23}$$

可知 Vasicek 模型中$\beta=0$，而在 CIR 模型中$\beta=\frac{1}{2}$，如果考慮增加參數與時間的相關性，即增加位移項$\theta(t)$，並且令α與ρ爲時間的函數，上式可寫爲

$$dr=[\theta(t)+\alpha(t)(\gamma-r)]dt+\rho(t)r^{\beta}dX \tag{24}$$

當$\beta=0$，$\alpha(t)=0$ 及$\rho(t)$ 爲定值時爲 Ho 及 Lee（參 14）所提出的模型，亦稱爲全收益模型 (whole-yield model)，主要爲分析遠期利率過程 (forward-rate process)，表示如下：

$$dr=\theta(t)dt+\rho dx \tag{25}$$

此外 CIR（參 15）提出模型

$$dr=\rho r^{\frac{3}{2}}\ dX$$

分析利率變化 (variable-rate, VR) 的證券，相同的模型可參考 Constantinides 及 Ingersoll（參 16）考慮附加課稅的債券計價模型。Cox（參 17），Cox 及 Ross（參 18）提出的模型如下：

$$dr=\alpha rdt+\rho r^{\beta}dX$$

稱爲固定變異彈性 (Constant Elasticity of Variance, CEV) 模型，CEV 模型與 Dothan 模型，Brennan-Schwartz 模型及 CIR-VR 模型有相似的關係。

綜合上述所討論的模型，可依 Chan（參 19）的分類如下：（即利用 dr 表成標準模式討論）

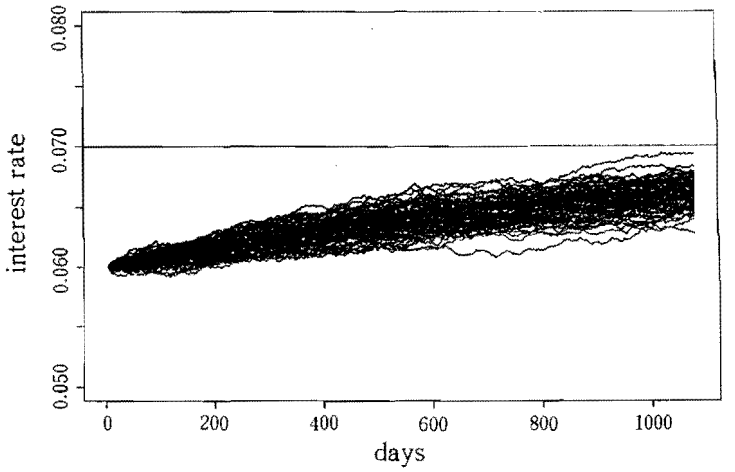
$$dr=\alpha(\gamma+r)dt+\rho r^{\beta}dX,\ dX\sim N(0,dt)$$

模　　型	時間	γ	α	β
Merton	1973		0	0
Vasicek	1977			0
CIR-SR	1981			1/2
Dothan	1978	0	0	1
GBM	1983	0		1
Brenna-Schwartz	1980			1
CIR-VR	1980	0	0	3/2
CEV	1976	0		

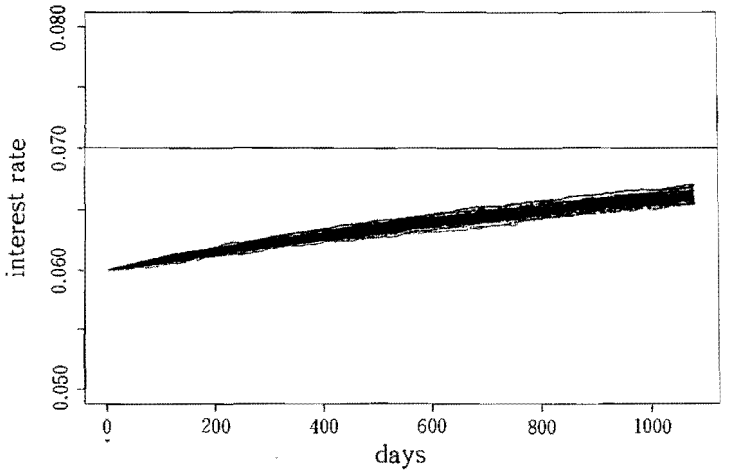
我們模擬 Vasicek 及 CIR 模型的隨機利率模型，給定復歸率$\alpha=0.3$，復歸利率$\gamma=0.07$，變動參數$\rho=0.001$，測量時間爲 $dt=\frac{1}{365}=0.00278$，代表以日爲度量單位的觀測點，初始利率爲 $r(0)=6\%$，我們將對 3 年 1,080 個觀測點模擬 100 個隨機利率過程並繪於圖 1 及 2，並將隨機漫步過程 (random walk) 繪圖於圖三中以比較利率變動情形，即於 Vasicek 模型中取$\alpha=0$，$\rho=0.0192$，$\beta=0$。由圖可知利率過程隨時間的變化情形，模型分別爲：

$$dr=0.3(0.007-r)dt+0.001dX$$
$$dr=0.3(0.007-r)dt+0.001\sqrt{r}\,dX$$
$$dr=0.001dX$$

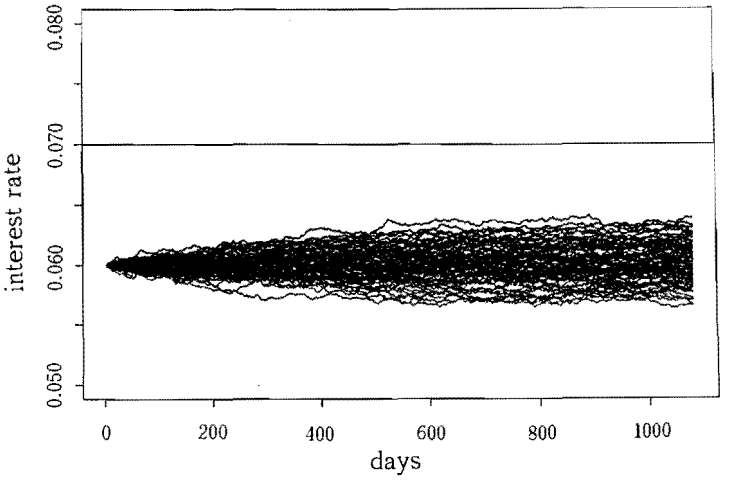
圖一　Vasicek模型利率模擬圖



圖二　CIR模型利率模擬圖



圖三　Random Walk模型利率模擬圖



顯然 Vasicek 與 CIR 模型較隨機漫步模型爲穩定，而 CIR 模型中利率過程的變動又較 Vasicek 模型爲小，較複雜的 H-W 模型將決定於參數函數的給定，於此不做深入討論，於未來實證的研究中將可建構更精確的利率隨機過程。

最後針對給定的邊界值，可解偏微分方程式求得債券的價值，對於較不易得到數值解的利率隨機模式，我們可利用電腦模擬分析求得近似解。

三、其它和債券有關之新金融商品

本節介紹幾種和利率（債券）有關的新金融商品，包括債券期貨 (bond futures)，債券選擇權 (bond option)，利率交換 (interest rate swap)，利率上限 (interest rate cap)，利率下限 (interest rate floor)，利率區間 (interest rate collar) 等，這些衍生性商品的定價和利率模型有密切的關係。

㈠債券期貨 (bond futures)

期貨是一種標準化的遠期契約 (forward contract)，買方和賣方同意在未來特定日期以某一特定價格買入（或賣出）某一特定數量的標的商品 (underlying assets)，如果此一商品是債券，則稱爲債券期貨，如果此一商品爲外匯，則稱爲外匯期貨 (currency futures)，如果此一商品爲農產品，則稱爲農產品期貨，一般則通稱爲商品期貨 (commidty futures) 。債券期貨也有人稱爲利率期貨 (interest rate futures)，因爲債券的價格和利率有關。其實利率期貨的範圍更廣，包括常見的國庫券期貨 (Treasury bills futures)，國庫票券期貨 (Treasury notes futures) ，國庫債券期貨 (Treasury bonds futures)，另外也包括歐洲通貨期貨 (Euro currency futures)，可轉讓定期存單期貨 (certificate of deposite futures)，抵押權期貨 (Mortgages futures) 等等。

㈡債券選擇權 (bond options)

選擇權 (opion) 是一種衍生性證券 (derivative security)，持有人有權利在未來某一段期間內，以約定的價格買賣一定數量的標的資產，如果此資產或商品是股票，則稱爲股票選擇權 (stock option)，如果此資產爲股價指數則爲股價指數選擇權 (stock index option)，如果此資產爲債券，則爲債券選擇權 (bond option) 或稱利率選擇權 (interest rate option)。選擇權依權利的種類可分爲買權 (call option) 及賣權 (put option)，買權賦予持有人買入標的資產之權利；而賣權賦予持有人賣出標的資產的權利。此外，選擇權也可以依履約 (exercise) 時間的不同分爲美式選擇權 (American-style option) 及歐式選擇權 (European-style option)。美式選擇權可在到期日前（含）的任何一天履約，而歐式選擇權僅能在到期日履約。目前世界各國交易之選擇以美式占大多數。選擇權和上面所謂的期貨的主要要差別在於選擇權持有人有權利（而沒有義務）去買入某種資產。譬如當股價高於履約價格時，持有人可以以履約價格買入股票，而當股價低於履約價格時，買權持有人便放棄此權利，因此選擇權持有人的損失只限於購買此選擇權的權利金而已，這和期貨不一樣的。和期貨類似，利率選擇權的交易種類有國庫券選擇權 (T-bill option)，公債選擇權 (bond option)，公債期貨選擇權 (option on bond futures) 等等。

㈢利率交換 (interest rate swap)

交換(swap)是一種契約，雙方同意在未來的某個時間內彼此交換利息支付，交換契約主要包括兩種，一種是貨幣交換(currency swap)，另一種便是利率交換(interest rate swap)。最簡單的利率交換稱爲Plain Vanilla Swap，即最原始，最基本的利率交換。利率交換通常是一方有固定利率的債務，另一方有浮動利率的債務，兩方約定彼此交換利息支付的型態，即一方由固定的利率改爲浮動的，另一方由浮動的利率改爲固定的。利率交換的主要目的在於管理及規避利率風險，另一方面雙方也可經由比較利益而降低利息支出。利率交換和利率(債券)選擇權主要不同處在於後者主要在交易所(如芝加哥商品交易所(CME)，芝加哥選擇權交易所(CBOE)交易)，而利率交換只要雙方當事人或公司同意即可進行。此外利率交換也更延伸出所謂的交換選擇權(Swaption)，即標的物爲利率交換契約的選擇權。

㈣利率上限(interest rate cap)，利率下限(interest rate floor)，利率區間(interest rate collar)

利率上限是一種利率契約，賣方同意在未來某時間，當利率高於某約定的利率水準(strike rate)時，賣方支付買方利率高於約定利率的部份。利率上限主要用於規避借款的風險，即鎖定借款的利率在約定的利率水準。相反地，利率下限的賣方同意在未來某個時間，若利率水準低於約定利率，則賣方支付買方利率低於約定利率的部份，利率下限主要用於保證最低的利率收益，譬如保險公司可買一個利率下限，設定最低報酬利率水準，可確保其資金的報酬。此外更有所謂的利率區間(interest rate collar)契約，此種契約乃結合利率上限及利率下限而成，使利率的變動風險介於上限利率及下限利率間。此利率區間契約可由買一個利率上限及賣出一個利率下限構成。此外一些商業銀行也推出利率上限選擇權(caption)及利率下限選擇權(flotation)的契約。

四、債券定價模擬分析

㈠固定利率模型

以下將利用電腦模擬分析10年期的債券價值，假定此債券面值爲1,000元，票面利息爲8.4%，半年結息一次，於到期日時償還的價值爲1,000元，並假設市場上連續計息的無風險利率爲10%，因票面利息低於市場計息的無風險利率，此種債券稱爲折價債券，如果票面利息高於市場計息的無風險利率，此種債券稱爲溢價債券，基於給定的數值，相對於上述所討論常微分方程式的邊界值(即面值)爲Z=1,000，所取的模型參數表示如下：

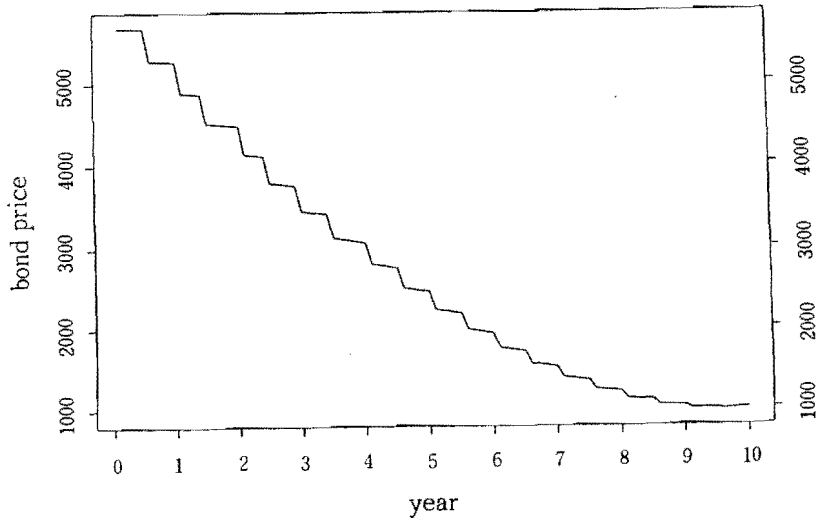
$$r=ln(1+10\%)=0.09531$$
$$K_i(t)=1000\times 4.2\%=42,\ 1\le i\le 20$$
$$t_i=0.5,1,1.5,\ldots 10,\ T=10,\ n=20$$

依(4)計算的息票價值爲

$$V(t)=e^{0.09531(t-10)}(1000+42\sum_{i=1}^{20}(10-t)H(t_i-t)e^{0.09531(10-t_i)})$$

將此附息票債券的價值對時間繪於圖四。

圖四　附息票債券價值時間圖



接下來分析 10 年期的無息債券，購買無息債券的主要優點即不管市場利率如何升降變動，投資者皆可收到固定的到期收益率。如上例，我們亦取債券面值爲 1,000 元，到期日償還價值爲 1,000 元，假設相同連續計息的無風險利率爲 10% ，此時邊界值（即面值）爲 Z=1,000 ，所取的參數表示如下，

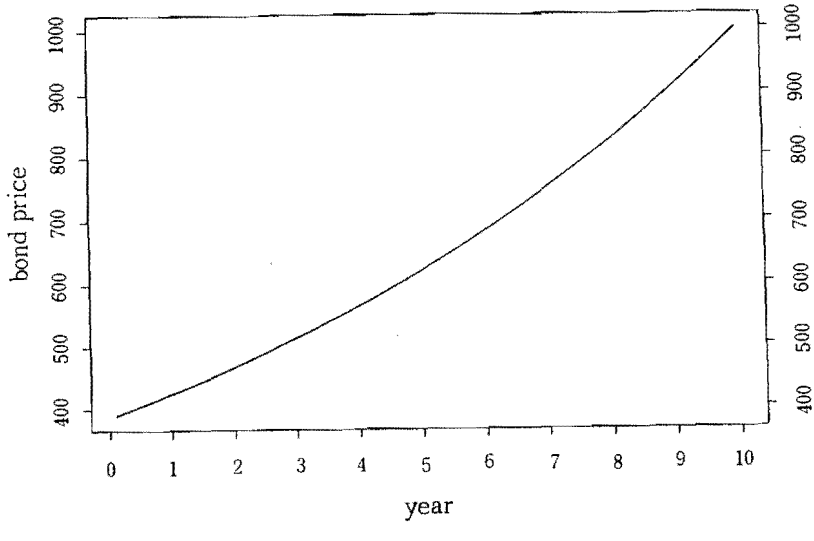
$$r=ln(1+10\%)=0.09531$$
$$T=10,\ n=20$$

依(2)及(4)計算的無息票債券價值爲

$$V(t)=e^{0.09531(t-10)}(1000)$$

及無息債券價值對時間的變化繪於圖五。

圖五　無息債券價值時間圖



㈡隨機利率模型

如果利率利用隨機過程來描述，並給定模型中的參數滿足方程式(13)及(14)爲

$$\alpha=10^{-9},\ \beta=0,\ \gamma=-0.3,\ \eta=0.021,\ \lambda=0$$

即所考慮的利率滿足隨機方程式如下：

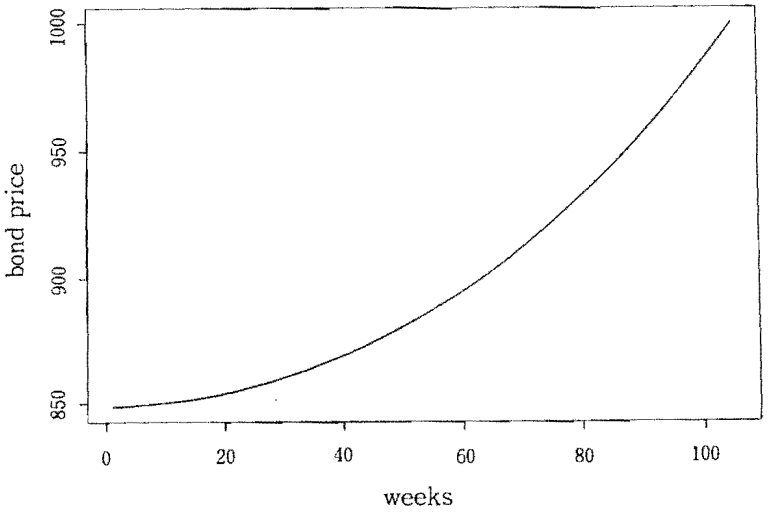
$$dr=0.001\cdot\sqrt{r}dX+(0.3\cdot r+0.021)dt \tag{26}$$

爲簡化計算，只考慮無息債券的定價，則可得到規避風險之下市場債券價值爲滿足(16)及(17)式的一般解，

$$V(r,t)=Z\cdot\exp(A(t;T)-r\cdot B(t;T)),\ 0\le t\le T$$

所得結果對時間繪於圖六，我們也對可能的參數值計算其可能的價值。一般對參數的給定必須根據先前的資料的估計，如此方能得到合理的結果，而當參數與時間有關時，計算將非常複雜，在此並不詳細推導。

圖六　無息債券價值時間圖



五、結語

資金運用一向是保險業非常重要的課題，而與利率有關的金融商品債券，及其衍生產品更是不可缺少的投資工具，因此，保險業須更具專業性的了解這些金融商品的定價、及有效地處理財務投資中衍生的現金流量問題，如此方能在掌握先機的情形下作出最適當的策略。本文對債券定價的模型進行理論及模擬的討論。實際的參數估計將需根據對市場結構的長期觀察及分析而得到。此外模型中對市場的各種假設是否合理，亦是我們欲探討及修正的目標。找出一個準確及易理解的利率模型及不同模型下，債券衍生性產品的定價將是未來主要的研究方向。

參考文獻：

1. 吳成俊，政府公債期貨契約規格之探討，證交資料，臺灣證券交易所證交資料社發行，404:17-39, 1995.
2. J.B. Little and L. Rhodes. Understanding Wall Street. Liberty Hall Press, 3rd edition, 1991.
3. J. Hull. Options, Futures, and other Dervative securities. Prentice-Hall International Editions, 1973.
4. J.A. Tilley. An Actuarial Layman's Guide to Building Stochastic Interest Rate Generators. Course V-380 Study Note, Society of Actuaries, 1992.
5. O.A. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5:177-188, 1977.
6. J.C. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. The relationship between forward prices and futures prices. Journal of Financial Economics, 9:321-346, 1981.
7. J. Hull and A. White. Pricing interest-rate-derivative securities. The Review of Financial Studies, 3(4):573-92, 1990.
8. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economics, 81:637-59, 1973.
9. P. Wilmott, S.D. Howison, and J. N. Dewynne. The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Oxford Financial Press, 1995.
10. R.C. Merton. Theory of rational option pricing. Bell Journal Economic Management Science, 4, 1973.
11. L.U. Dothan. On the term structure of interest rates. Journal of Financial Economics, 6:59-69, 1978.
12. T.A. March and E.R. Rosenfeld. Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices. Journal of Finance, 38:635-646, 1983.
13. M.J. Brennan and E.S. Schwartz. A continuous time approach to the pricing of bonds. Journal of Finance, 35:661-673 1979.
14. T.S.Y. Ho and S.B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. The Journal of Finance, XLI(5):1011-29, 1986.
15. J.C. Cox and J. Ingersoll. An analysis of variable rate loan contracts. Journal of Finance, 35, 1980.
16. G.M. Constantinides and J.E. Ingersoll. Optimal bond trading with personal taxes. Journal of Finance Economics, 13:299-335, 1984.
17. J.C. Cox. Notes on option pricing i: constant elasticity of variance diffusions. In Working paper, Standford University, 1975.
18. J.C. Cox and S.A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processer. Journal of Financial Economics, 3, 1976.
19. K.C. Chan, A. Karolyi, F.A. Longstaff, and A.B. Sanders. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. The Journal of Finance, XIVII(3), 1992.