國立政治大學應用數學系

碩士學位論文

一個卡特蘭等式的組合證明

A Combinatorial Proof of Catalan Identity

碩士班學生：蔡佳平 撰

指導教授：李陽明 博士

中華民國 109 年 6 月 29 日

DOI:10.6814/NCCU202000716

致謝

能夠順利完成本論文最先要感謝的絕對是恩師李陽明教授，從我碩一修課時就幫我打下很好的基礎，也重燃我對組合學的熱情。在研究及討論的過程中，老師不僅給予學術上的指導，還相當關心我及同門學長姐們的生活狀況，期許我們都能平安健康地畢業。特別是去年老師經歷了小中風，幸好後來復原狀況良好，當時我們都很擔心老師的身體狀況，但老師卻仍然掛念著我們，不希望因為他的身體狀況影響我們的畢業進度，這點令我十分感動，老師對我們的用心我必會深記於心，有幸成為老師的閉門弟子實屬榮幸，祝福老師能常保健康喜樂。

再來要感謝同門的學長姐珮瑄及大維，在行政流程及格式上都幫了我很大的忙，他們不僅是在研究上共同前進的夥伴，也是很棒的朋友。最後感謝系上的老師們、助教芷昀及振偉，他們都是我完成碩士學位路上很重要的幫助者，衷心感謝、銘記於心。

DOI:10.6814/NCCU202000716

中文摘要

本文所探討的是卡特蘭等式以及開票一路領先的問題，並將其結果推廣到高維度的卡特蘭數。假設有甲、乙兩位候選人，其得票數分別為 m 及 n 票，且 m≧n，我們若將開票過程建立在直角座標上，起點由(0,0)開始，將甲得一票記作向量(1,0)，乙得一票記作向量(0,1)，則由甲候選人一路領先的開票方法數，即為直線 y = x 以下的路徑總數。

在本文中，我們利用一種對射函數，將好路徑對應到標準楊氏圖表上的數字填法，再利用勾長公式算出方法數，藉此來得到好路徑的總數，作為卡特蘭等式的一種組合證明。文末也此方法推廣應用到多位候選人的開票一路領先方式，並得到高維度的卡特蘭等式：

$$\mathrm{C}_{m,n} = \frac{\binom{mn}{n,n,n,..,n}}{\prod_{k=1}^{m-1}\binom{n+k}{k}}$$

關鍵詞：卡特蘭數、一路領先、標準楊氏圖表、勾長公式

DOI:10.6814/NCCU202000716

Abstract

In this thesis, we study the Catalan identity and generalize the results to obtain the higher dimensional Catalan identity. Suppose that there are two candidates A and B for an election. A receives m votes and B receives n votes with m≧n. If we consider the ballot as a lattice path on coordinate system, starting from (0,0), where every vote for A is expressed as a vector (1,0) and votes for B are expressed as vectors (0,1). Then the number of ways that A leads all the way equals to the number of paths under the diagonal y=x.

In this paper, we establish a bijection function that corresponds the good paths to the Young tableaux, and calculate the number of Young tableaux by hook formula. Finally, we generalize this method to calculate the higher dimensional Catalan identity:

$$C_{m,n} = \frac{\binom{mn}{n,n,n,..,n}}{\prod_{k=1}^{m-1}\binom{n+k}{k}}$$

Keywords: Catalan identity; Leading all the way; Standard Ferrers diagrams; Hook formula

DOI:10.6814/NCCU202000716

目　次

DOI:10.6814/NCCU202000716

第一章　緒論

第１節　研究動機

卡特蘭等式是用來計算一路領先問題方法數的工具，筆者在高中時期就曾接觸過此問題，當時利用路徑的對稱所得出的答案及其背後的卡特蘭數列令我印象深刻。研究所時修習組合學課程又再次點燃我對離散數學的興趣，便拜於恩師李陽明老師門下，幾次討論後發現老師曾先後指導過多位學長姐關於卡特蘭等式的組合證明，於是決定善用這些基礎，繼續尋找新的研究路徑及推廣的可能。

在查找相關資料的過程中，我們發現卡特蘭等式可以利用標準楊氏圖表來求得，但卻一直沒有找到相關的證明，遂將此定為主題深入研究。在本文中，我們成功找到一個對射函數將好路徑對應到標準楊氏圖表的數字填法，給予完整的證明，並且發現此結論可以推廣到任意維度的好路徑走法，可說是對於此類一路領先的問題，給出了一個完備的解決方式。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第 2 節　楊圖(Ferrers diagrams)與楊表(Young tableaux)

楊圖是一種整數分割的表示形式，由若干個相鄰的方格組成，方格的各列左端對齊，而每列長度由上而下遞減。圖 1-1 即是一個(5,4,2,2)的整數分割形式所對應的楊圖，而本文中主要使用的是(n,n)形式的楊圖（見圖 1-2）。

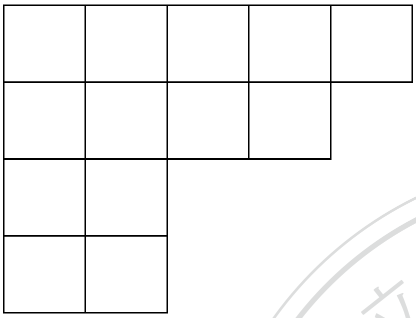


圖 1-1

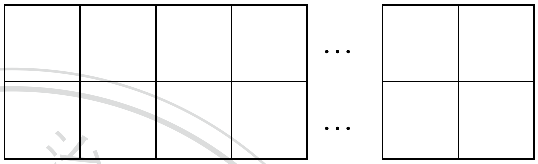


圖 1-2

楊表則是建立在楊圖上的一種數字填法，對於一個 n 個方格的楊圖，將自然數 1 至 n 恰好各一次填入楊圖中，並符合在每一行由上而下遞增，每一列由左而右遞增的條件。圖 1-3 即是一個建立在圖 1-1 的楊圖上的一種楊表。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12	13			

圖 1-3

1	3	4	7	12
2	5	6	13	
8	9			
10	11			

圖 1-4

一個楊圖可以填出許多不同的楊表，如上圖 1-4 同樣是建立在圖 1-1 的楊圖上的楊表，但卻與圖 1-3 不同。數字填入的位置不同，產生的楊表就不同。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第 3 節　勾長公式 (Hook Formula)

在一個楊圖中，我們定義每個方格的勾長為其正右方及正下方的方格總數，再加上 1，也就是該方格本身。圖 1-5 中的數字顯示了圖 1-1 的楊圖中，各個方格的勾長。

8	7	4	3	1
6	5	2	1	
3	2			
2	1			

圖 1-5

勾長公式便是用來計算一個楊圖可以填出幾種不同楊表的工具，對於一個 n 個方格的楊圖，其可填出的楊表個數等於 n 階乘除以所有方格勾長的乘積，以圖 1-1 的楊圖為例，共可填出 $\frac{13!}{8\times7\times4\times3\times1\times6\times5\times2\times1\times3\times2\times2\times1}=12870$ 種楊表。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第二章　定義

【定義 2.1】對於一個直角座標上從(0,0)到(n,n)的路徑(Path)，將其定義為

$P_{(n,n)} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{2n}$，其中$P_i = \begin{cases} (1,0)，若第i步向右 \\ (0,1)，若第i步向上 \end{cases}$，$i = 1,2,\ldots,2n$。

此外，以$\wp$來表示所有$P_{(n,n)}$路徑所組成的集合。

圖 2-1 即是一個從(0,0)到(2,2)的路徑，其中$P_1 = P_3 = (1,0)$，$P_2 = P_4 = (0,1)$。

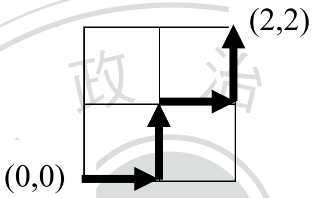


圖 2-1

【定義 2.2】對於一個直角座標上從(0,0)到(n,n)的路徑$P_{(n,n)}$，定義

$R = \{\, i \mid P_i = (1,0)\,, i = 1,2,\ldots,2n\} = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_n\}$，為向右的步數。

$U = \{\, i \mid P_i = (0,1)\,, i = 1,2,\ldots,2n\} = \{u_1 < u_2 < \cdots < u_n\}$，為向上的步數。

以上圖 2-1 的路徑為例，$R = \{1, 3\}$，$U = \{2, 4\}$。

【定義 2.3】對於一個直角座標上從(0,0)到(n,n)的路徑$P_{(n,n)}$，定義

$S_i = \sum_{k=1}^{i} P_k = (x_i, y_i)$，為走完第$i$步後到達的位置。其中$S_{2n}$必定等於(n,n)。

以上圖 2-1 的路徑為例，$S_1 = (1,0)$，$S_2 = (1,1)$，$S_3 = (2,1)$，$S_4 = (2,2)$。

【定義 2.4】對於一個直角座標上從(0,0)到(n,n)的路徑$P_{(n,n)}$，若對於所有的 i = 1,2,…,2n，恆有$x_i \geq y_i$，則稱該路徑$P_{(n,n)}$為一個好路徑(Good Path)。

此外，以$\wp_G$來表示所有$P_{(n,n)}$路徑中好路徑所組成的集合。

在此定義下，圖 2-1 的路徑即為一好路徑。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定義 2.5】定義矩陣$\mathrm{M}_{(n,n)} = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,\dots,n}}$為一個$2 \times \mathrm{n}$的矩陣，其中

$a_{i,j} = 1,2, \dots ,2\mathrm{n}$，且每個自然數恰好各出現一次。

此外，以$\mathcal{M}$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n)}$矩陣所組成的集合。

在此定義下，$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$即為一個$\mathrm{M}_{(2,2)}$矩陣。

【定義 2.6】若一個矩陣$\mathrm{M}_{(n,n)}$滿足：

(1) $\forall i = 1,2$，$a_{i,k} < a_{i,l}$，若 $1 \le k < l \le n$

(2) $\forall j = 1,2, \dots , n$，$a_{1,j} < a_{2,j}$

則稱該矩陣$\mathrm{M}_{(n,n)}$為一個楊氏矩陣(Young Matrix)。

此外，以$\mathcal{M}_Y$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n)}$矩陣中楊氏矩陣所組成的集合。

上述的$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$即為$\mathrm{M}_{(2,2)}$矩陣中的一個楊氏矩陣。

【性質 2.7】若將定義 2.5 中矩陣各個元的位置替換成方格，則可將$\mathrm{M}_{(n,n)}$矩陣看作如圖 1-2 形式的楊圖；而定義 2.6 中所定義的楊氏矩陣，即為該楊圖所能生成的楊表。下圖 2-2 即為$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$矩陣所對應的楊表。

1	3
2	4

圖 2-2

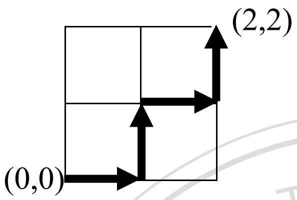
很顯然地，定義 2.6 中所定義的楊氏矩陣與(n,n)形式的楊圖所生成的楊表是一一對應的，因此我們可以透過計算楊表的個數，來得到楊氏矩陣的個數。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定義 2.8】定義一個函數f：$\wp \to \mathcal{M}$，$f\left(P_{(n,n)}\right) = M_{(n,n)}$，$P_{(n,n)} \in \wp$，$M_{(n,n)} \in \mathcal{M}$。

其中$\left\{a_{1,j}\right\}_{j=1,2,\ldots,n} = R$，$a_{1,j} = r_j$；$\left\{a_{2,j}\right\}_{j=1,2,\ldots,n} = U$，$a_{2,j} = u_j$，$j = 1,2,\ldots,n$。

$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$即是圖 2-1 中的路徑，經由此函數所對應到的楊氏矩陣。見下圖 2-3。



$$\xrightarrow{f} \quad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

圖 2-3

在本章中，我們已經給予好路徑以及楊表可做數學操作的定義，也設定好兩者之間的所對應的函數。在下一章中，我們將進一步探討此函數的性質，證明他是有良好定義的(well-defined)，且是一對一映成函數，從而得到好路徑個數會等於楊表個數的結果。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第三章　定理與證明

【定理 3.1】f是有良好定義的(f is well-defined)，換言之，此函數f確實會將$\wp$中的每個路徑送到$\mathcal{M}$中所對應的矩陣，且不會發生一對多的情形。

〔證明 3.1〕

(1) 令$P_{(n,n)}$為$\wp$中的一個路徑，根據定義 2.2，存在此路徑所對應的 R 及 U 集合，

且從定義可知$R, U \subseteq \{1,2,\dots,2n\}$。

而$\forall i = 1,2,\dots,2n$，P_i只會是$(1,0)$或$(0,1)$中的其中一種，因此$R \cap U = \emptyset$。

又$S_{2n} = (\mathrm{n},\mathrm{n}) = (|R|,|U|)$，因此$|R| = |U| = n$。

$\Rightarrow |R| + |U| = 2n = |\{1,2,\dots,2n\}|$

綜合上述三點可知，R 與 U 是$\{1,2,\dots,2n\}$的一種集合分割。

$\Rightarrow R \cup U = \{1,2,\dots,2n\}\ \&\ R \cap U = \emptyset$

$\therefore \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,\dots,n}} = \{a_{1,j}\}_{j=1,2,\dots,n} \cup \{a_{2,j}\}_{j=1,2,\dots,n} = R \cup U = \{1,2,\dots,2n\}$

$\Rightarrow f(P_{n,n}) \in \mathcal{M}$

(2) 若$P'_{(n,n)} = P_{(n,n)}$，則$P'_i = P_i$，$\forall i = 1,2,\dots,2n$。

$\Rightarrow \mathrm{R}' = \mathrm{R}$，$\mathrm{U}' = \mathrm{U}$

$\Rightarrow \{a'_{1,j}\}_{j=1,2,\dots,n} = \{a_{1,j}\}_{j=1,2,\dots,n}$，$\{a'_{2,j}\}_{j=1,2,\dots,n} = \{a_{2,j}\}_{j=1,2,\dots,n}$

$\Rightarrow \{a'_{i,j}\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,\dots,n}} = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,\dots,n}}$

$\Rightarrow\ f\big(P'_{(n,n)}\big) = f(P_{(n,n)})$

由以上兩點得證：f是有良好定義的。

【引理 3.2.1】 對於$\wp$中的任一個路徑$P_{(n,n)}$及其所對應的$M_{(n,n)}$矩陣，

$x_k \geq j$ 若且唯若 $a_{1,j} \leq k$，$k = 1,2,\dots,2n$，$j = 1,2,\dots,n$。

DOI:10.6814/NCCU202000716

〔證明 3.2.1〕

(1)（$x_k \geq j \Rightarrow a_{1,j} \leq k$）

定義$R_k = R \cap \{1,2,\ldots,k\} = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_l\}$

若$x_k \geq j$，則$|R_k| = l \geq j$

$\Rightarrow r_j \leq r_l \leq k$，又$a_{1,j} = r_j$

$\Rightarrow a_{1,j} \leq k$，得證。

(2)（$a_{1,j} \leq k \Rightarrow x_k \geq j$）

若$a_{1,j} \leq k$，則$r_j \in R_k$

$\Rightarrow x_k$=$|R_k| \geq j$，得證。

由以上兩點得證：$x_k \geq j$ 若且唯若 $a_{1,j} \leq k$。

【引理 3.2.2】 對於$\wp$中的任一個路徑$P_{(n,n)}$及其所對應的$M_{(n,n)}$矩陣，$y_k \geq j$ 若且唯若 $a_{2,j} \leq k$，$k = 1,2,\ldots,2n$，$j = 1,2,\ldots,n$。

〔證明 3.2.2〕

同引理 3.2.1。

【引理 3.2.3】 對於$\wp$中的任一個路徑$P_{(n,n)}$及其所對應的$M_{(n,n)}$矩陣，

$x_k < j$ 若且唯若 $a_{1,j} > k$，$k = 1,2,\ldots,2n$，$j = 1,2,\ldots,n$。

$y_k < j$ 若且唯若 $a_{2,j} > k$，$k = 1,2,\ldots,2n$，$j = 1,2,\ldots,n$。

〔證明 3.2.3〕

此即為引理 3.2.1 及引理 3.2.2 的否逆命題，自然得證。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定理 3.3】 $f(\wp_G) \subseteq \mathcal{M}_Y$，換言之，函數 f 會將 $\wp$ 當中的好路徑送到 $\mathcal{M}$ 當中的楊氏矩陣。

〔證明 3.3〕

任意給定一個好路徑 $P_{(n,n)} \in \wp_G$，由定理 3.1，我們已知 $f\big(P_{(n,n)}\big) \in \mathcal{M}$。因此我們只需要再證明其符合定義 2.6 的兩個條件即可。

(1) 在 R 與 U 的定義中，本身就包含了遞增的性質，所以 $M_{(n,n)}$ 矩陣中同一列的遞增性質也會自動成立。

(2) 至於 $M_{(n,n)}$ 矩陣中同一行的遞增性質，即證明 $\forall j = 1,2,\ldots,n$，$a_{1,j} < a_{2,j}$。

$\forall j = 1,2,\ldots,n$，我們考慮 $S_{a_{2,j}} = (x_{a_{2,j}}, y_{a_{2,j}})$，即該路徑中走完第 $a_{2,j}$ 步後所到達的點。$a_{2,j} \in U$ 且是 U 中的第 j 個元，因此 $y_{a_{2,j}} = j$。

$\because P_{(n,n)}$ 是好路徑

$\therefore x_{a_{2,j}} \geq y_{a_{2,j}}$

$\Rightarrow x_{a_{2,j}} \geq j$，又 $P_{a_{2,j}} = (0,1)$

$\therefore x_{a_{2,j}-1} = x_{a_{2,j}} \geq j$，再由引理 3.2

$\Rightarrow a_{1,j} \leq a_{2,j} - 1 < a_{2,j}$，同一行中遞增性質成立。

結合上述兩點的結果，可知 $f\big(P_{(n,n)}\big)$ 滿足定義 2.6 的條件，即 $f\big(P_{(n,n)}\big)$ 是一個楊氏矩陣，便得到我們所要的結果：$f(\wp_G) \subseteq \mathcal{M}_Y$。

【定理 3.4】 $f|_{\wp_G}：\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個一對一函數。

〔證明 3.4〕

設 $f\big(P_{(n,n)}\big) = M_{(n,n)}$、$f\big(P'_{(n,n)}\big) = M'_{(n,n)}$。

若 $P_{(n,n)} \neq P'_{(n,n)}$，則必定存在某個 i，使得 $P_i \neq P'_i$

$\Rightarrow R \neq R'$

$\Rightarrow \{a_{1,j}\}_{j=1,2,\ldots,n} \neq \{a'_{1,j}\}_{j=1,2,\ldots,n}$

DOI:10.6814/NCCU202000716

$\therefore M_{(n,n)} \neq M'_{(n,n)}$

得證 $f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個一對一函數。

【定理 3.5】 $f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個映成函數。

〔證明 3.5〕

任意給定一個$\mathcal{M}_Y$中的楊氏矩陣$M_{(n,n)}$，存在一個路徑$P_{(n,n)}$，其中

$R = \{a_{1,j}\}_{j=1,2,\ldots,n}$，$r_j = a_{1,j}$；$U = \{a_{2,j}\}_{j=1,2,\ldots,n}$，$u_j = a_{2,j}$，$j = 1,2,\ldots,n$

(1) 由定義 2.5 及定義 2.6 (1)，可知R與U是$\{1,2,\ldots,2n\}$的一種集合分割，且R與U中的元素是遞增的。

$\Rightarrow P_{(n,n)}$確實是滿足定義 2.1 的路徑，即$P_{(n,n)} \in \wp$，且$f(P_{(n,n)}) = M_{(n,n)}$。

(2) $\forall k = 1,2,\ldots,2n$

(i) 若$k \in R$，則存在某個 l 使得$a_{1,l} = k$，$l \leq n$。

$\because a_{2,l} > a_{1,l} = k$，由引理 3.2.3

$\Longrightarrow y_k < l = x_k$

(ii) 若$k \in U$，則存在某個 l 使得$a_{2,l} = k$，$l \leq n$。

$\because a_{1,l} < a_{2,l} = k$，由引理 3.2.1

$\Longrightarrow x_k \geq l = y_k$

由(i)與(ii)可得，$\forall k = 1,2,\ldots,2n$，$x_k \geq y_k$。即$P_{(n,n)} \in \wp_G$

結合上述兩點的結果，對於任意給定的$M_{(n,n)} \in \mathcal{M}_Y$，皆可找到一個$P_{(n,n)} \in \wp_G$使得 $f(P_{(n,n)}) = M_{(n,n)}$。

得證：$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個映成函數。

DOI:10.6814/NCCU202000716

綜合定理 3.1 至定理 3.5，我們可知$f|_{\wp_G}$是一個從$\wp_G$到$\mathcal{M}_Y$的對射函數，則可得到此章節中最重要的結論：$|\wp_G| = |\mathcal{M}_Y|$。利用此結果，我們可以透過勾長公式來計算楊氏矩陣的個數，進而求得$\wp$中的好路徑個數。

對於一個直角座標上從(0,0)到(n,n)的路徑，其好路徑個數等於$\mathrm{M}_{(n,n)}$中楊氏矩陣的個數，下圖 3-1 是$\mathrm{M}_{(n,n)}$矩陣所對應的楊圖，方格中的數字是該方格的勾長。

n+1	n	n-1	n-2	…	3	2
n	n-1	n-2	n-3	…	2	1

圖 3-1

由勾長公式可知，圖 3-1 中的楊圖，共可填出 $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ 種楊表。

又 $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$，即得到我們熟悉的卡特蘭數列，算出從(0,0)到(n,n)中的好路徑總數。

在本章中，我們順利完成了一種卡特蘭等式的組合證明，並求出二維平面中好路徑的個數，在下一章中，我們要將此結果推廣到三維的立體空間，並運用相同的技巧來求出空間中好路徑的個數。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第四章　三維空間的好路徑

【定義 4.1】對於一個立體座標上從(0,0,0)到(n,n,n)的路徑，將其定義為

$$P_{(n,n,n)} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{3n}\text{，其中}P_i = \begin{cases}(1,0,0)\text{，若第}i\text{步向}x\text{方向}\\(0,1,0)\text{，若第}i\text{步向}y\text{方向，}\\(0,0,1)\text{，若第}i\text{步向}z\text{方向}\end{cases}$$

$i\ =\ 1,2,\dots,3n$。

此外，以$\wp$來表示所有$P_{(n,n,n)}$路徑所組成的集合。

【定義 4.2】對於一個立體座標上的路徑$P_{(n,n,n)}$，定義

$V_1 = \{\, i \mid P_i = (1,0,0)\,, i = 1,2,\dots,3n\} = \{v_{1,1} < v_{1,2} < \cdots < v_{1,n}\}$

$V_2 = \{\, i \mid P_i = (0,1,0)\,, i = 1,2,\dots,3n\} = \{v_{2,1} < v_{2,2} < \cdots < v_{2,n}\}$

$V_3 = \{\, i \mid P_i = (0,0,1)\,, i = 1,2,\dots,3n\} = \{v_{3,1} < v_{3,2} < \cdots < v_{3,n}\}$

分別為向 x、y、z 方向的步數。

【定義 4.3】對於一個立體座標上的路徑$P_{(n,n,n)}$，定義

$S_i = \sum_{k=1}^{i} P_k = (x_i, y_i, z_i)$，為走完第$i$步後到達的位置。

【定義 4.4】對於一個立體座標上的路徑$P_{(n,n,n)}$，若對於所有的 i = 1,2,…,3n，恆有$x_i \geq y_i \geq z_i$，則稱該路徑$P_{(n,n,n)}$為一個好路徑。

此外，以$\wp_G$來表示所有$P_{(n,n,n)}$路徑中好路徑所組成的集合。

【定義 4.5】定義矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n)} = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2,\dots,n}}$為一個$3 \times \mathrm{n}$的矩陣，其中

$a_{i,j} = 1,2,\dots,3\mathrm{n}$，且每個自然數恰好各出現一次。

此外，以$\mathcal{M}$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n,n)}$矩陣所組成的集合。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定義 4.6】若一個矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n)}$滿足：

(1) $\forall i = 1,2,3$，$a_{i,k} < a_{i,l}$，若 $1 \le k < l \le n$

(2) $\forall j = 1,2,\ldots,n$，$a_{1,j} < a_{2,j} < a_{3,j}$

則稱該矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n)}$為一個楊氏矩陣。

此外，以$\mathcal{M}_Y$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n,n)}$矩陣中楊氏矩陣所組成的集合。

【定義 4.7】定義一個函數f：$\wp \to \mathcal{M}$，$f\left(P_{(n,n,n)}\right) = M_{(n,n,n)}$，$P_{(n,n,n)} \in \wp$，$M_{(n,n,n)} \in \mathcal{M}$。其中$\left\{a_{i,j}\right\}_{j=1,2,\ldots,n} = V_i$，$a_{i,j} = v_{i,j}$，$i = 1,2,3$，$j = 1,2,\ldots,n$。

仿造第三章當中的作法，我們可以依次證明f是有良好定義的(見定理 3.1)、$f(\wp_G) \subseteq \mathcal{M}_Y$（見定理 3.3）、$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個一對一函數（見定理 3.4）及$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個映成函數(見定理 3.5)，因而得到我們所期望的結果：

【定理 4.8】$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個對射函數。

〔證明 4.8〕

同定理 3.1～定理 3.5。

DOI:10.6814/NCCU202000716

綜合本章的結果，我們可以再次利用勾長公式來計算三維空間中的好路徑個數，對於一個立體座標上從(0,0,0)到(n,n,n)的路徑，其好路徑個數等於$M_{(n,n,n)}$中楊氏矩陣的個數，下圖 4-1 是$M_{(n,n,n)}$矩陣所對應的楊圖，方格中的數字是該方格的勾長。

n+2	n+1	n	n-1	…	4	3
n+1	n	n-1	n-2	…	3	2
n	n-1	n-2	n-3	…	2	1

圖 4-1

由勾長公式可知，圖 4-1 中的楊圖，共可填出

$$\frac{(3n)!}{\frac{(n+2)!}{2!}\times\frac{(n+1)!}{1!}\times n!}=\frac{(3n)!\times 1!\times 2!}{n!\times(n+1)!\times(n+2)!}=\frac{\binom{3n}{n,n,n}}{\binom{n+1}{1}\times\binom{n+2}{2}}$$ 種楊表，此即為三維空間中的卡特蘭數。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【例子 4.9】 下圖 4-2 是一個三維空間中的路徑$P_{(4,4,4)} \in \wp$，其中第 1、2、6、7 步向x方向；第 3、4、9、10 步向 y 方向；第 5、8、11、12 向 z 方向，始終保持著$x_i \geq y_i \geq z_i$的關係，根據定義 4.4，可知 P 是一個好路徑，即$P \in \wp_G$。

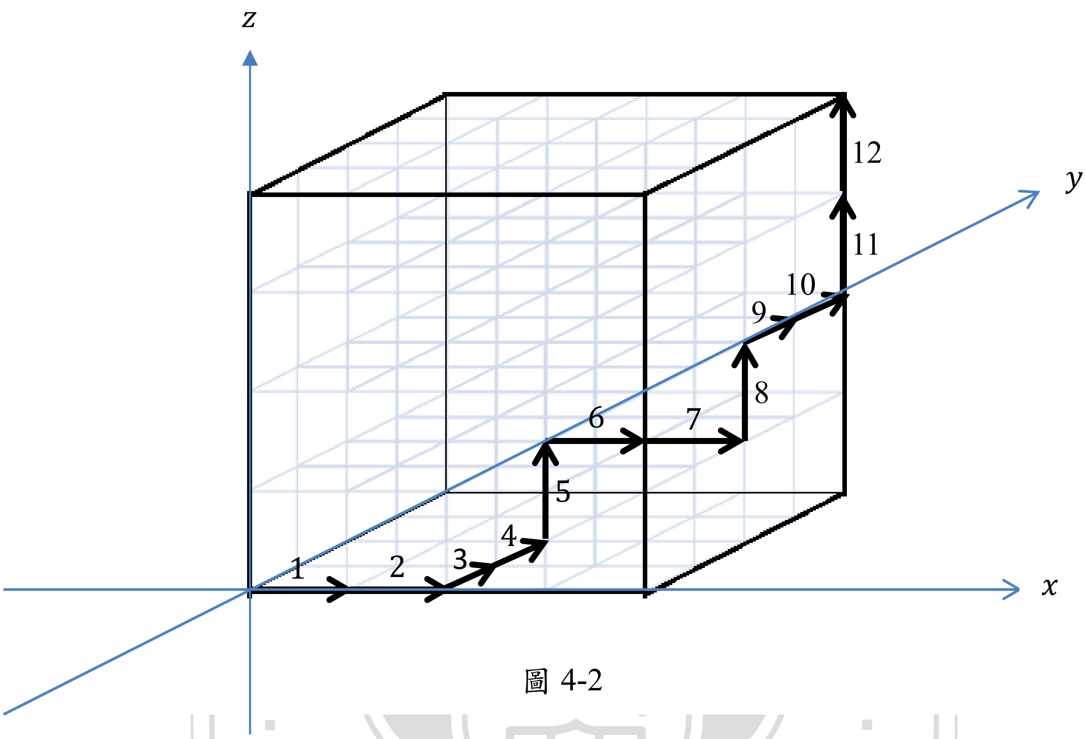


圖 4-2

在此路徑 P 中，V_1為向x方向的步數所形成的集合，即 $V_1 = \{1,2,6,7\}$，同理$V_2 = \{3,4,9,10\}$、$V_3 = \{5,8,11,12\}$，接著利用定義 4.7 的函數f，可得

$$P \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

此矩陣滿足定義 4.6 的條件，為一個楊氏矩陣，即 $f(P) \subseteq \mathcal{M}_Y$。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第五章　m 維空間的好路徑

【定義 5.1】對於一個 m 維座標上從(0,0,0,…,0)到(n,n,n,…,n)的路徑，將其定義為$P_{(n,n,n,\dots,n)} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{m\times n}$，其中$P_i = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$，$u_k = 1$，$u_l = 0$ 當 $l \neq k$，若第 i 步向x_k方向，$i = 1,2,\dots,m\times n$，$k = 1,2,\dots,m$。
此外，以$\wp$來表示所有$P_{(n,n,n,\dots,n)}$路徑所組成的集合。

【定義 5.2】對於一個 m 維座標上的路徑$P_{(n,n,n,\dots,n)}$
定義$V_k = \{ i \,|\, 第i步向x_k方向，i = 1,2,\dots,mn\} = \{v_{k,1} < v_{k,2} < \cdots < v_{k,n}\}$
為向x_k方向的步數，$k = 1,2,\dots,m$。

【定義 5.3】對於一個 m 維座標上的路徑$P_{(n,n,n,\dots,n)}$
定義$S_i = \sum_{k=1}^{i} P_k = (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{m,i})$，為走完第$i$步後到達的位置。

【定義 5.4】對於一個 m 維座標上的路徑$P_{(n,n,n,\dots,n)}$
若對於所有的 $i = 1,2,\dots,mn$，恆有$x_{1,i} \geq x_{2,i} \geq x_{3,i} \geq \cdots \geq x_{m,i}$，則稱該路徑$P_{(n,n,n,\dots,n)}$為一個好路徑。
此外，以$\wp_G$來表示所有$P_{(n,n,n,\dots,n)}$路徑中好路徑所組成的集合。

【定義 5.5】定義矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n,\dots,n)} = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$為一個 $m\times n$的矩陣，其中$a_{i,j} = 1,2,\dots,mn$，且每個自然數恰好各出現一次。
此外，以$\mathcal{M}$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n,n,\dots,n)}$矩陣所組成的集合。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定義 5.6】若一個矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n,\ldots,n)}$滿足：

(1) $\forall i = 1,2,\ldots,m$，$a_{i,1} < a_{i,2} < \cdots < a_{i,n}$

(2) $\forall j = 1,2,\ldots,n$，$a_{1,j} < a_{2,j} < \ldots < a_{m,j}$

則稱該矩陣$\mathrm{M}_{(n,n,n,\ldots,n)}$為一個楊氏矩陣。

此外，以$\mathcal{M}_Y$來表示所有$\mathrm{M}_{(n,n,n,\ldots,n)}$矩陣中楊氏矩陣所組成的集合。

【定義 5.7】定義一個函數f：$\wp \to \mathcal{M}$，$f\big(P_{(n,n,n,\ldots,n)}\big) = M_{(n,n,n,\ldots,n)}$，$P_{(n,n,n,\ldots,n)} \in \wp$，$M_{(n,n,n,\ldots,n)} \in \mathcal{M}$。

其中$\{a_{i,j}\}_{j=1,2,\ldots,n} = V_i$，$a_{i,j} = v_{i,j}$，$i = 1,2,3,\ldots,m$，$j = 1,2,\ldots,n$。

接著，我們繼續依照第三章的流程，來證明$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個對射函數，並藉此得到兩個集合的元素個數相同，即$|\wp_G| = |\mathcal{M}_Y|$。

【定理 5.8】 f是有良好定義的(f is well-defined)。

〔證明 5.8〕

(1) 令$P_{(n,n,n,\ldots,n)}$為$\wp$中的一個路徑，根據定義 5.2，存在此路徑所對應的V_k集合，

從定義可知$V_k \subseteq \{1,2,\ldots,mn\}$，$k = 1,2,\ldots,m$。

且路徑中每一步只會往一個方向，因此$V_k \cap V_l = \emptyset$，當$k \neq l$。

又$S_{mn} = (\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n},\ldots,\mathrm{n}) = (|V_1|,|V_2|,\ldots,|V_m|) \Rightarrow |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_m| = n$。

$\Rightarrow |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_m| = mn = |\{1,2,\ldots,mn\}|$

綜合上述三點可知，$V_{k,k=1,2,\ldots,m}$是$\{1,2,\ldots,mn\}$的一種集合分割。

$$\therefore \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} = \bigcup_{i=1}^{m} \{a_{i,j}\}_{j=1,2,\ldots,n} = \bigcup_{k=1}^{m} V_k = \{1,2,\ldots,mn\}$$

$\Rightarrow f(P_{(n,n,n,\ldots,n)}) \in \mathcal{M}$

DOI:10.6814/NCCU202000716

(2) 若$P'_{(n,n,n,\dots,n)} = P_{(n,n,n,\dots,n)}$，則$P'_i = P_i$，$\forall i = 1,2,\dots,mn$。

$\Rightarrow V_k{}' = V_k$，$k = 1,2,\dots,m$。

$\Rightarrow \{a'_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,n} = \{a_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,n}$，$i = 1,2,\dots,m$。

$\Rightarrow \{a'_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} = \{a_{i,j}\}_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$

$\Rightarrow f\big(P'_{(n,n,n,\dots,n)}\big) = f(P_{(n,n,n,\dots,n)})$

由以上兩點得證：f是有良好定義的。

【定理 5.9】 $f(\wp_G) \subseteq \mathcal{M}_Y$。

〔證明 5.9〕

任意給定一個好路徑$P_{(n,n,n,\dots,n)} \in \wp_G$，由定理 5.8，我們已知$f\big(P_{(n,n,n,\dots,n)}\big) \in \mathcal{M}$。因此只需再證明其符合定義 5.6 即可。

(1) 在 V_k的定義中，本身就包含了遞增的性質，所以$M_{(n,n,n,\dots,n)}$矩陣中同一列的遞增性也會自動成立。

(2) 至於同一行的遞增性，即證明$\forall j = 1,2,\dots,n$，$a_{k,j} < a_{l,j}$當$k < l$。

$\forall j = 1,2,\dots,n$，我們考慮$S_{a_{l,j}} = (x_{1,a_{l,j}}, x_{2,a_{l,j}}, \dots, x_{\mathrm{m},a_{l,j}})$，即該路徑中走完第$a_{l,j}$步後所到達的點。$a_{l,j} \in V_l$且是$V_l$中的第 j 個元，因此$x_{l,a_{l,j}} = j$。

$\because P_{(n,n,n,\dots,n)}$是好路徑

$\therefore x_{k,a_{l,j}} \geq x_{l,a_{l,j}}$

$\Rightarrow x_{k,a_{l,j}} \geq j$，又 $a_{l,j} \in V_l$

$\therefore x_{k,a_{l,j}-1} = x_{k,a_{l,j}} \geq j$

$\Rightarrow a_{k,j} \leq a_{l,j} - 1 < a_{l,j}$，同一行中遞增性成立。

結合上述兩點的結果，可知$f\big(P_{(n,n,n,\dots,n)}\big)$滿足定義 5.6 的條件，即$f\big(P_{(n,n,n,\dots,n)}\big)$是一個楊氏矩陣，便得到我們所要的結果：$f(\wp_G) \subseteq \mathcal{M}_Y$。

DOI:10.6814/NCCU202000716

【定理 5.10】 $f|_{\wp_G}：\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個一對一函數。

〔證明 5.10〕

設$f\left(P_{(n,n,n,\ldots,n)}\right) = M_{(n,n,n,\ldots,n)}$、$f\left(P'_{(n,n,n,\ldots,n)}\right) = M'_{(n,n,n,\ldots,n)}$。

若$P_{(n,n,n,\ldots,n)} \neq P'_{(n,n,n,\ldots,n)}$，則必定存在某個 i ，使得$P_i \neq P'_i$

$\Rightarrow$ 若 $i \in V_k$ 則 $i \notin V_k{}'$

$\Rightarrow V_k \neq V_k{}'$

$\Rightarrow \{a_{k,j}\}_{j=1,2,\ldots,n} \neq \{a'_{k,j}\}_{j=1,2,\ldots,n}$

$\therefore M_{(n,n,n,\ldots,n)} \neq M'_{(n,n,n,\ldots,n)}$

得證 $f|_{\wp_G}：\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個一對一函數。

【定理 5.11】 $f|_{\wp_G}：\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個映成函數。

〔證明 5.11〕

任意給定一個$\mathcal{M}_Y$中的楊氏矩陣$M_{(n,n,n,\ldots,n)}$，存在一個路徑$P_{(n,n,n,\ldots,n)}$，其中

$V_k = \{a_{k,j}\}_{j=1,2,\ldots,n}$，$v_{k,j} = a_{k,j}$，$k = 1,2,\ldots,m$，$j = 1,2,\ldots,n$。

(1) 由定義 5.5 及定義 5.6 (1)，可知 $V_{k,k=1,2,\ldots,m}$ 是$\{1,2,\ldots,mn\}$的一種集合分割，

且V_k中的元素是遞增的。

$\Rightarrow P_{(n,n,n,\ldots,n)}$確實是滿足定義 5.1 的路徑，即$P_{(n,n,n,\ldots,n)} \in \wp$，

且$f\left(P_{(n,n,n,\ldots,n)}\right) = M_{(n,n,n,\ldots,n)}$。

(2) $\forall i = 1,2,\ldots,mn$，$\forall\, 1 \leq k < l \leq n$

(i) 若$x_{l,i} = 0$，由定義可知$x_{k,i} \geq 0$

則$x_{k,i} \geq x_{l,i}$。

DOI:10.6814/NCCU202000716

(ii) 若$x_{l,i} = j \geq 1$，則$v_{l,j} = a_{l,j} \leq i$。

因為$M_{(n,n,n,\dots,n)}$是楊氏矩陣，可得$a_{k,j} < a_{l,j} \leq i$

$\Rightarrow x_{k,i} \geq j = x_{l,i}$。

由(i)與(ii)可得，$\forall i = 1,2,\dots,mn$，$\forall\, 1 \leq k < l \leq n$，皆有$x_{k,i} \geq x_{l,i}$。

即$P_{(n,n,n,\dots,n)} \in \wp_G$。

結合上述兩點的結果，對於任意給定的$M_{(n,n,n,\dots,n)} \in \mathcal{M}_Y$，皆可找到一個

$P_{(n,n,n,\dots,n)} \in \wp_G$使得$f\left(P_{(n,n,n,\dots,n)}\right) = M_{(n,n,n,\dots,n)}$。

得證：$f|_{\wp_G}$：$\wp_G \to \mathcal{M}_Y$ 是一個映成函數。

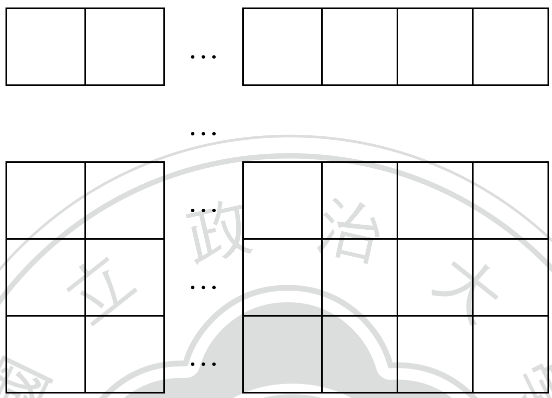
自此，我們已證明完畢無論多少維度的好路徑都可以經由一個對射函數將其對應到一個楊氏矩陣，因此可以透過勾長公式計算楊氏矩陣的個數，進而得到高維度的卡特蘭數列。

DOI:10.6814/NCCU202000716

第六章 結論

本論文成功構造了一個函數將任意維度的好路徑對應到一個楊氏矩陣，並證明了此函數是一個對射函數，因此兩集合的元素個數相等，再利用勾長公式來求得楊氏矩陣的個數，得出廣義的卡特蘭數列。

若我們將 m 維度的卡特蘭數列訂為$C_{m,n}$，代表在 m 維座標上從(0,0,0,…,0)到(n,n,n,…,n)的好路徑個數，利用本論文結果，即相當於計算以下楊圖所能填出的楊表個數（見圖 6-1）。



尺寸為 m×n

圖 6-1

楊圖 6-1 中，各方格的勾長如下：

m+n-1	m+n-2	…	m+3	m+2	m+1	m
		…				
n+2	n+1	…	6	5	4	3
n+1	n	…	5	4	3	2
n	n-1	…	4	3	2	1

圖 6-2

DOI:10.6814/NCCU202000716

利用勾長公式可求得：

$$\mathrm{C}_{m,n}=\frac{(mn)!}{n!\times\frac{(n+1)!}{1!}\times\frac{(n+2)!}{2!}\times\ldots\times\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}}$$

$$=\frac{\binom{mn}{n,n,n,..,n}}{\binom{n+1}{1}\binom{n+2}{2}\ldots\binom{n+m-1}{m-1}}$$

$$=\frac{\binom{mn}{n,n,n,..,n}}{\prod_{k=1}^{m-1}\binom{n+k}{k}}$$

此即為廣義卡特蘭數列的通式。

本篇論文著重在研究從(0,0,0,…,0)到(n,n,n,…,n)這種超立方體的好路徑個數，然而此方法應該也能應用到高維度長方體的情況，只是所對應的楊圖便不再是完整的長方形圖表，在楊氏矩陣的定義及證明都需要做相應的調整，最終的結果也難以化簡成通式，剩餘部分就留待未來再做更進一步的研究。

DOI:10.6814/NCCU202000716

參考文獻

[1] Griffiths, M., & Lord, N. (2011). The hook-length formula and generalised Catalan numbers. *The Mathematical Gazette*, *95*(532), 23-30.

[2] Krattenthaler, C. (1995). Bijective proofs of the hook formulas for the number of standard Young tableaux, ordinary and shifted. *The Electronic Journal of Combinatorics*, *2*(1), R13.

[3] 楊蘭芬，一個有關開票的問題，政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士論文(2009)，台北市。

[4] 韓淑惠，開票一路領先的對射證明，政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士論文(2011)，台北市。

DOI:10.6814/NCCU202000716