

國立政治大學金融學系

碩士學位論文

以 Copula-GJR-GARCH 方法探討股票與債券之  
連動性

An evaluation of stock and bond markets with Copula-GJR-  
GARCH model



指導教授：張興華 博士

研究生：羅永健 撰

中華民國 109 年 07 月

## 致謝

2020 年是非常特別的一年，因為 COVID-19 的原因，導致非常多的留學生都無法回到學校和老師以及同學們一起討論，也沒有辦法和他們一起拍畢業照，讓我的研究生階段留下了不小的遺憾。但是就算是不能面對面交談，我的導師、口試委員以及我的同學都給了我很大的幫助。

首先要謝謝我的導師張興華教授，他引導我探索論文地題目並給了我這篇文章的靈感。就算不能面對面報告，他也非常關心我的論文進度，督促我及時地完成畢業論文，讓我可以順利地畢業。同時我也非常感謝口試委員林信助博士與黃星華博士蒞臨指教。兩位教授不吝賜教，給予我的論文寶貴的建議以及修改的意見，讓我的文章更加完善。

另外還要感謝一直給我提供幫助的夥伴們。蕭惟中和陳昱綸不辭辛勞一直在幫助我完成論文的行政流程，準備線上口試的設備調試。如果沒有他們兩位的幫助，我就算寫完了論文，也沒辦法順利口試和畢業吧。因此特別感激兩位好友的協助。還有就是我的宿舍好鄰居何冠廷。雖然他非常忙，但是他在百忙之中一直透過遠端連線幫我解決電腦系統的種種問題，幫我調適我的電腦系統。雖然透過遠端連線很麻煩，而且網路也非常不穩定，但他還是耐心地幫我解決問題。沒有他的幫忙，我就沒有辦法建模分析。

最後再一次對給予我幫助的教授和朋友們以及在疫情期間給予我問候的朋友們由衷的感謝。

羅永健 謹致於

政治大學金融系

中華民國 109 年 07 月

## 中文摘要

資產報酬之間相關係數在金融市場上是非常重要的。無論是資產配置或者是風險控管都需要用到資產間的相關關係。資產間的相關關係並不是線型關係，而是非線形的。因此資產間的動態結構能更好地描述資產間的相關關係。本文以 10 年期美國國庫券期貨、MSCI 全國家世界指數(All Country World Index, ACWI)、MSCI 開發中國家指數 (Emerging Market Index, EM) 以及 MSCI 已開發國家指數 (Developed Markets Index, DM) 為例。利用附加動態條件的 Copula-GJR-GARCH 模型，探討債券報酬與股票指數報酬、以及股票指數報酬間的相關係數結構。最後經本文研究實證結果顯示，上述資產報酬之間的當期的相關係數顯著地受到前一期相關係數的影響。此外，近 10 期的報酬率所包含的資訊也會對當期相關係數有不同程度的影響。

關鍵字：相關係數結構、GJI-GARCH 模型、動態 copula

## Abstract

Owing to their importance in asset allocation strategies and risk management, the comovements between the stock and bond markets have become an increasingly popular issue in financial markets. However, the correlation between assets may change over time. Therefore, the dynamic structure of assets can describe the correlation better. This paper take 10-year us Treasury futures, the MSCI All Country World Index, the MSCI Emerging Market Index and the MSCI Developed Market Index as examples. Using the Copula-GJR-GARCH model with dynamic conditions to discuss the correlation structure between asset returns. Finally, the empirical results in this paper show that the correlation of the above asset returns in the current period is significantly affected by previous period. In addition, the information contained in the return of last 10 period will also affect the correlation of the current period.

Keywords: correlation structure, GJI-GARCH model, dynamic copula

# 目錄

中文摘要.....	iii
Abstract.....	iv
目錄.....	v
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第壹章 緒論.....	1
第貳章 文獻回顧.....	3
第參章 研究方法.....	7
第一節 研究流程.....	7
第二節 樣本與資料來源.....	8
第三節 研究方法.....	12
第肆章 研究結果.....	20
第一節 資產報酬率的敘述性統計.....	20
第二節 參數估計結果.....	24
第伍章 研究結論.....	35
參考文獻.....	37

## 表目錄

表 3-1：資產報酬間相關係數 .....	11
表 4-1：連續日報酬率之全樣本敘述統計量表 .....	23
表 4-2：Johansen 共整合檢定統計量 .....	24
表 4-3：ARMA(0,1)-GJR-GARCH(1,1)模型之估計結果 .....	25
表 4-4：MSCI EM 不同備選條件平均數模型下 GJR-GARCH(1,1)模型 .....	28
表 4-5：MSCI EM 之 ARMA(1,0)-GJR-GARCH(1,1)模型之估計結果 .....	28
表 4-6：Kolmogorov-Smirnov 檢定結果 .....	29
表 4-7：動態 Copula 模型估計結果 .....	30



## 圖目錄

圖 3-1：研究流程圖 .....	7
圖 3-2：10 年期美國國庫券期貨價格走勢 .....	9
圖 3-3：MSCI 全國家世界指數走勢 .....	9
圖 3-4：MSCI 開發中國家指數走勢 .....	10
圖 3-5：MSCI 已開發國家指數走勢 .....	11
圖 4-1：10 年期美國國庫券期貨報酬率頻率分佈圖 .....	21
圖 4-2：MSCI 全國家世界指數報酬率頻率分佈圖 .....	21
圖 4-3：MSCI 開發中國家指數報酬率頻率分佈圖 .....	22
圖 4-4：MSCI 已開發國家指數報酬率頻率分佈圖 .....	22
圖 4-5：MSCI 開發中國家之 ACF、PACF 圖 .....	26
圖 4-6：Gaussian Copula 估計之相關性結構 .....	32
圖 4-7：Student-t Copula 估計之相關性結構 .....	32
圖 4-8：Cayton Copula 估計之相關性結構 .....	33
圖 4-9：Gumbel Copula 估計之相關性結構 .....	34

## 第壹章 緒論

世界的發展離不開金融市場的發展。如果說經濟的發展是一個生物體，那金融市場就是遍佈體內的血管，資金的流動就是血液的流動。無論是對政府、企業或者個人來說，金融市場的穩定發展提供了資金流動的能量。因此不管是其中的一級市場或者是二級市場都成了經濟社會中不可缺少的一部分。伴隨著金融市場的壯大，越來越多的金融商品透過銀行、保險公司、基金公司、證券公司等金融機構融入到人們生活的每一個角落。其中，股票與債券更是最直接或是間接地與一般投資人接觸的金融商品，例如銀行將資產證券化後的理財產品、基金公司的公募基金、保險機構的保險以及市場上各種各樣的創新型金融商品。在金融市場中，投資人享受收益的同時承受面臨損失的風險。因此，許多金融機構或者是一般投資人都會在自己能承受的風險範圍中最大化收益，又或者是在目標報酬率中最小化風險。因此投資組合的概念出現了，一個高度分散化的投資組合可以分散非系統性風險，剩下系統性風險的部分則可以透過流動性資產進行風險管理。不管是在發行新產品所需要的資產定價、投資組合的建構，或者其他金融機構的風險管理，都需要知道資產之間的相關關係。在正常的金融市場環境中，這種關係可能不會存在大幅度的變化。但是金融市場的發展並不是一帆風順的，歷史上也出現過非常多的危機事件，例如 1637 年鬱金香狂熱、1720 年南海泡沫、1929 年大蕭條、1997 年亞洲金融風暴、2007 年次貸危機以及 2020 年由 COVID-19 所引發的全球金融恐慌，全球股票、黃金、原油暴跌，美國股票市場竟然在短時間內觸發三次熔斷機制。那些原本為負相關的資產在這期間突然相互關聯。不少金融機構、市場投資人僅管原本高度風險分散的投資組合也因此蒙受相關關係改變所



導致的非預期損失。資產間相關關係不是固定不變的，因此不管是在正常時期或者是在極端環境中，研究資產間動態相關關係可以幫助金融機構和投資人進行更好地建構或調整投資組合、在極端的金融環境中可以找到合適的避險資產、更加準確地估計當下所面臨的風險大小做好風險管理，以及更準確地為金融商品進行定價。



## 第貳章 文獻回顧

本研究將本文以 10 年期美國國庫券期貨、MSCI 全國家世界指數(All Country World Index, ACWI)、MSCI 開發中國家指數 (Emerging Market Index, EM) 以及 MSCI 已開發國家指數 (Developed Markets Index, DM) 為例，利用附加動態條件的 Copular-GJR-GARCH 模型，探討債券報酬與股票指數報酬、以及不同市場股票指數報酬間的相關係數結構。

一般來說，債券波動度低，因此風險相較於普通股票的風險少，在投資組合中有降低風險同時提供收益率的功能。相反的，股票的風險比較高，在投資組合中扮演者創造超額收益率的角色。隨著開發中國家金融市場逐步開放，投資者可以直接或間接參與開發中國家的二級市場，讓其暴露在更高的風險中尋求更高的報酬。已開發國家金融市場與開發中金融市場的連動性也變得備受關注。另外，資產間的相關性不僅可以用於建構投資組合、風險管理、大宗商品的避險以及資產定價。因此，對於金融機構或者是投資人而言，估計出金融資產的相關性就顯得至關重要。然而過去曾經有學者研究證明資產間的相關性並不是一塵不變而是會受到各種因素的影響而發生變化的。de Goeij and Marquering (2004) 用多元 GARCH 的方法證實，壞消息下的股票市場與債券市場的條件共變數比好消息下的條件共變數高。Connolly, Stivers, and Sun (2005) 的研究發現，在股票市場處於較高隱含波動度和週轉率的時候，股票與債券會呈現出負相關的現象。意味著當股票市場出現危機的時候，股票與債券間的相關關係會從正相關轉變成負相關。此外還有不少學者像是 Campbell, Sunderam, and Viceira (2009)、Baele, Bekaert, and Inghelbrecht (2010) 以及 Panchenko and Wu (2009) 等，應用動態模

型探討股票與債券間的聯動性。除此以外 Guidolin and Timmermann (2006) 發現，相較於一般的線形模型，聯合分配更能擬合債券報酬和股票報酬的動態結構。過去在對債券與股票的動態相關性研究中，大多使用多元 GARCH 估計動態波動度和相關性。然而，不管是多元 GARCH 模型或者是 Guidolin and Timmermann (2006)所建構的聯合分佈模型，都需要假設債券與股票是線性相關並且服從多元常態分或者是 Student-t 分配 (Student-t distribution)。實際上，債券與股票報酬率的分配以及他們間的相關關係都是非常複雜的。像是資產報酬率呈現左偏或右偏且高峰厚尾的分配；資產報酬率之間的一些非線性關係或者是尾部相關的關係等。因此這些假設條件與實際市場情況的不同會導致估計結果的偏差，進而影響到後續決策的正確性。Zakamouline and Koekebakker (2009)更指出，除了一階動差（平均數）和二階動差（變異數），投資人更在乎資產報酬分配的更高階動差，也就是偏度和峰度。因此，本文將參考 Hansen (1994) 應用偏態 t 分配 (Skewed-t distribution) 假設債券報酬率和股票報酬率服從偏態 t 分配 (Skewed-t distribution)，並對債券報酬率和股票報酬率的分配進行擬合。相較於常態分配和 Student-t 分配，偏態 t 分配 (Skewed-t distribution) 能更好的捕捉資產報酬率的偏度和峰度。

然而，本文假設的資產報酬所服從的分配複雜，每個資產報酬所服從的分配可能不同，資產之間的關聯結構也可能存在不對稱。針對這些問題，本文將利用 Sklar (1959) 提出的 Copula 理論，將多維度的聯合分配函數拆解成若干個邊際分配和關聯結構對 (Copula)。Copula 的好處不僅如此，他還不需要像過去的文獻中應用多元 GARCH 一樣需要假設資產都來自於單一分配，在資產報酬的分配的假設上有了更多自由的空間，而且資產間不管是線形、非線性或者是尾部相關的複

雜結構也可以藉由 Copula 進行估計。在 Copula 的概念被提出來之後，Copula 就被廣泛地應用在許多領域中。但是普通 Copula 估計出來的參數只是一個固定的常數，並無法看到這些參數的動態過程。於是 Patton (2006a, 2006b) 將一般的 Copula 理論推廣成條件 Copula，並讓參數加入 AR(1) 的動態過程，建構出相關關係可以隨著時間變動的動態 Copula 模型。第一次將 Copula 的概念應用到金融領域的是 Li (2000)，他利用 Copula 估計擔保債務憑證 (Collateralized Debt Obligation, CDO) 的資產池 (Assets Pool) 內資產的聯合違約風險，並進行訂價。這對金融機構在進行風險管理特別是計算在險價值 (Value at Risk, VaR) 的時候有了很大啟發。因為過去計算 VaR 的方法對資產報酬有非常嚴格的分配假設，如果假設出現偏差，計算出來的 VaR 也會受到很大的影響。其中一個利用 Copula 探討系統性風險的例子，Reboredo and Ugolini (2015) 利用 CoVaR-copula 的方法研究歐洲主權債市場的系統性風險，他發現希臘債務危機發生前所有國家的系統性風險都是相似的，但是希臘債務危機發生後，原本一些非危機國家的系統性風險有小幅度的增加。除了資產定價以及計算 VaR 之外，Copula 還可以探討不同資產報酬間的左尾和右尾的相關關係並用在投資組合避險組合的建構。Sun, Rachev, Fabozzi, and Kalev (2009) 利用高頻資料以非條件 Copula 模型研究 9 個國家股票指數的尾部相關性。Aloui, Hammoudeh, and Nguyen (2013) 利用動態 Copula 模型研究石油和 6 個歐洲中部及東部國家 (Central and Eastern European, CEE) 的相關關係，他發現石油報酬和 6 個 CEE 國家股價報酬成正向關係，其中左尾的相關關係比右尾的相關關係要強，因此 CEE 國家的股票不適合在危機發生的時候用來分散風險。Lai and Tseng (2010) 利用 Mixture Copula 研究中國和世界七大工業國 (G7) 在一般市場環境及極端市場環境下的相關性，發現中國股票

市場不管是在一般環境或者是極端環境下都是 G7 股票市場避險的好地方，在建構全球投資組合或者對於國際投資人來說，中國股票市場可以提供一個相較安全的環境。另外，他們還發現，日本在 2000 年至 2008 年間是美國和德國股票市場的避風港。

本文將分別利用 Gaussian、Student-t、Gumbel、Clayton 等四種 Copula 的動態模型估計債券報酬與股票指數報酬、以及股票指數報酬間的相關係數結構。但直接使用最大概似估計法 (Maximum Likelihood Estimation, MLE) 對不同資產的不同邊際分配和 Copula 函數進行同時估計，有可能會因為模型過於複雜導致結果無法收斂。因此本文將用 Joe and Xu (1996) 提出的兩階段估計法 (Inference Functions for Margins, IFM)。該方法將傳統的估計方法拆成兩個步驟，第一步先用 GJR-GARCH 模型估計資產報酬的邊際分配，第二步則是估計 Copula 模型。這不僅可以降低每次需要估計的模型的複雜程度，節省估計模型的時間，而且實證證明，在大樣本下使用 IFM 法也可以得到有效的估計結果。

# 第參章 研究方法

## 第一節 研究流程

本文以 10 年期美國國庫券期貨、MSCIACWI、MSCIEM 以及 MSCIDM 為例。利用附加動態條件的 Copula-GJR-GARCH 模型，估計債券報酬與股票指數報酬、以及股票指數報酬間的動態相關性。



圖 3-1：研究流程圖



## 第二節 樣本與資料來源

本文選取的資料為：2000/01～2020/04 間美國芝加哥期貨交易所 (Chicago Board of Trade, CBOT) 交易的 10 年期美國國庫券期貨，摩根史坦利資本國際公司 (Morgan Stanley Capital International, MSCI) 編制的全國家世界指數 (All Country World Index, ACWI)、開發中國家指數 (Emerging Market Index, EM) 以及已開發國家指數 (Developed Markets Index, DM) 的日報酬。其中這三個 MSCI 指數統稱 MSCI 世界指數。資料的開始期間為亞洲金融危機後一年，資料期間涵蓋了 2007～2008 年由美國次貸危機引起的全球性的金融風暴、2010 年歐洲主權債務危機以及 2020 年初由 COVID-19 所引發的全球金融恐慌。藉此，本文希望可以得到一個可以更為廣泛使用的相關關係動態模型。

### (一)、 10 年期美國國庫券期貨

美國國債市場是全世界規模最大、交易量最大的國債市場。相對應的，北美也擁有全世界最大的利率期貨市場。參與者的有很多，例如銀行、保險公司、共同基金、養老基金、州政府、地方政府、中央銀行、海外投資者以及個人投資者等。他們用國庫券期貨進行利率風險調整，或者作為資金的避風港。利率期貨的交易量龐大，根據美國期貨業協會 (Futures Industry Association, FIA) 發佈的有關 2019 年衍生性金融商品交易量報告顯示，利率期貨交易量為 47.6 億美元，佔全球衍生性商品的 13.8%。其中 10 年期美國國庫券期貨的交易量佔 9.45%，是 5 年期美國國庫券期貨交易量的 1.5 倍，是高交易量最高的國債期貨。圖 3-2 為 2000/01～2020/04 間 10 年期美國國庫券期貨價格走勢。

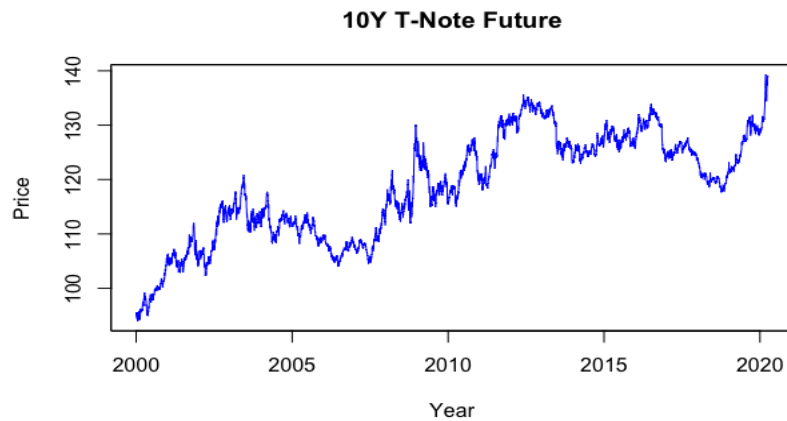


圖 3-2：10 年期美國國庫券期貨價格走勢

## (二)、 MSCI ACWI

該指數包括 23 個已開發國家和 26 個開發中國家市場的大型和中型股票，涵蓋 11 個行業。該指數根據 MSCI 的全球可投資市場指數 (Global Investable Market Index, GIMI) 方法建構而成，反映了不同地區、市值大小、行業等組合情況。隨著各國資本市場開放，越來越多的投資人的投資方向不僅在國內市場，更著眼於國際市場。相比單一國家的股價指數，ACWI 因涵蓋國家範圍多廣可以分散部分國家風險，風險分散程度更強。圖 3-3 為 2000/01~2020/04 間全國家世界指數走勢。

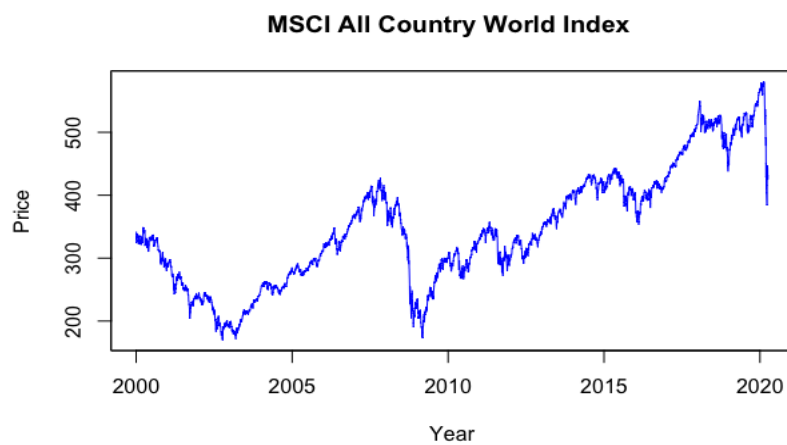


圖 3-3：MSCI 全國家世界指數走勢



### (三)、 MSCI EM

新興市場的成長性大、投資潛力巨大，因此吸引了來自世界各地的投資人。新興市場的報酬率雖然高，但是面臨的風險卻比已開發國家市場大很多。MSCI EM 指數的前十大成分為：中國、韓國、台灣、印度、巴西、南非、俄羅斯、墨西哥以及泰國等股票市場。該指數經過 MSCI 對各國金融市場研究後編制而成，有效地減少發展中國家金融市場不夠透明的情況，幫助投資人更好地進行風險評估、管理投資組合以及獲得其他相關資訊。圖 3-4 為 2000/01~2020/04 間開發中國家指數走勢圖。

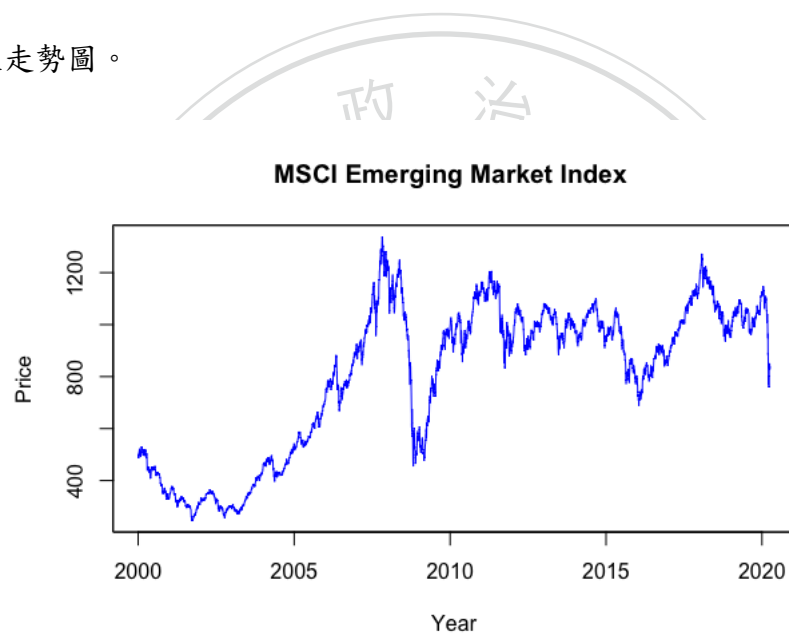


圖 3-4：MSCI 開發中國家指數走勢

### (四)、 MSCI DM

該指數衡量了在全世界擁有也不的大型和中型已開發國家企業的股價表現，並覆蓋了每個國家約 85% 的市值變動。指數的組成部分包括：美國、日本、英國、法國、加拿大、瑞士、德國、澳大利亞、荷蘭及其他 14 個已開發國家。已開發國家金融市場監管制度健全，有完善的經濟調控系統，市場化程度高，資訊流通度高，資本證券化程度高，商品種類繁多因此交易非常活躍，規模龐大。不管是

對全世的機構投資者或者是個人投資者來說都是一個非常重要的市場。圖 3-5 為 2000/01~2020/04 間已開發國家指數走勢。

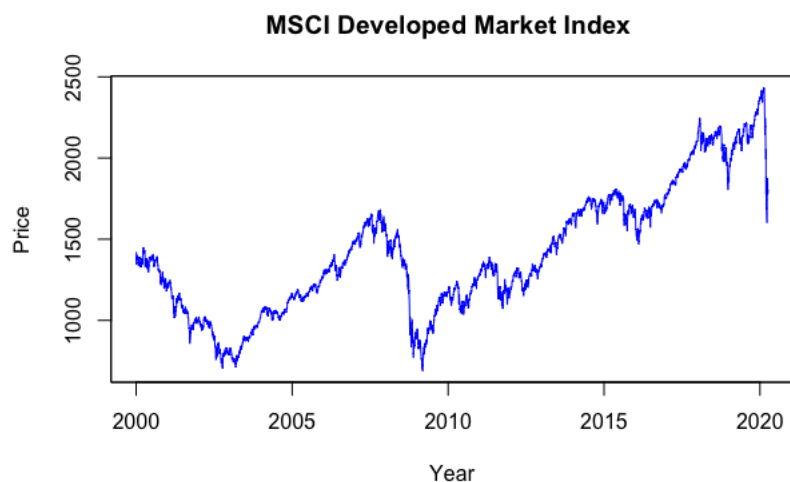


圖 3-5：MSCI 已開發國家指數走勢

從以上三張圖中發現 ACWI 和 DM 的走勢十分相似。如表 3-1 所示，其報酬率的相關性也很高。這是因為 ACWI 中包括 DM 和 EM 的成份，其中大部分成份股來自於已開發國家。因此在研究股價指數報酬間相關關係動態結構的時候只研究 DM 和 EM 之間的關係。

表 3-1：資產報酬間相關係數

	10Y T-Note Future	MSCI ACWI	MSCI EM	MSCI DM
10Y T-Note Future	-	-0.3093	-0.2022	-0.3117
MSCI ACWI	-0.3093	-	0.7329	0.9966
MSCI EM	-0.2022	0.7329	-	0.6787
MSCI DM	-0.3117	0.9966	0.6787	-

### 第三節 研究方法

本文將採用 IFM 的方法，將邊際分配函數與 Copula 函數分開進行估計，以下將介紹擬合資產報酬邊際分配所用的 GIR-GARCH 模型，以及 Gaussian、Student-t、Gumbel 以及 Clayton 等五種 Copula 函數的動態模型。

#### (一)、 邊際分配模型

資產報酬的邊際分配模型分成條件平均數方程以及條件變異數方程兩個部分。考慮到資產之間可能存在共整合關係，因此本文將參考 Kroner and Sultan (1993) 以及 Hsu, Tseng, and Wang (2008) 提出對資產原始價格時間序列進行 Johansen 共整合檢定，若存在共整合關係則在條件平均數方程中加入誤差修正項 (error correction term)，否則改用 MA(1) 項代替。本文分別對四種資產原始價格之間進行 Johansen 共整合檢定，結果顯示 Johansen trace test 統計量並不顯著，說明資產的原始價格之間不存在共整合關係，因此本文將先使用 MA(1) 項作為條件平均數的方程。

條件變異數則採用 Glosten, Jagannathan, and Runkle (1993) 提出 GJR-GARCH 模型。該模型可以有效的補捉存在於市場中的槓桿效果 (Leverage Effect), 也就是波動度的非對稱性。資產報酬的這種性質往往體現在市場負向資訊對報酬波動的影響力比正向資訊更大。另外，正如前文所提到的金融資產報酬的不對稱、高峰而且厚尾的現象不能被傳統的常態分配或者是 t 分配完整地擬合報酬的偏態參數和峰態參數。因此本文將採用 Hansen (1994) 提出的偏態 t 分配作為模型標準化殘差的邊際分配，藉此提高了分配形狀的彈性。

綜上所述，本文將邊際分配設定為標準化殘差服從偏態 t 分配的 GJR-

GARCH(1,1) 模型，令  $s_t$  和  $f_t$  分別為股票指數第  $t$  期的報酬率和美國國庫券期貨第  $t$  期的報酬率。 $s_t$  和  $f_t$  的條件平均數方程以及條件變異數方程如下所示：

$$s_t = a_{s,0} + \varepsilon_{s,t} + a_{s,1}\varepsilon_{s,t-1} \quad (3.1)$$

$$f_t = a_{f,0} + \varepsilon_{f,t} + a_{f,1}\varepsilon_{f,t-1}$$

$$\sigma_{s,t}^2 = \omega_s + \beta_{2,s}\sigma_{s,t-1}^2 + a_s\varepsilon_{s,t-1}^2 + \gamma_s I_{s,t-1}\varepsilon_{s,t-1}^2 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{f,t}^2 = \omega_f + \beta_{2,f}\sigma_{f,t-1}^2 + a_f\varepsilon_{f,t-1}^2 + \gamma_f I_{f,t-1}\varepsilon_{f,t-1}^2$$

$$Z_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_{i,t}}, Z_{i,t} | \Omega_{t-1} \sim ST(Z_{i,t} | \eta_i, \varphi_i), \text{ for } i = s, f \quad (3.3)$$

其中， $\varepsilon_t$  代表殘差項， $\sigma_t^2$  代表條件變異數； $I_{t-1}$  代表特徵函數 (Indicator function)：當  $\varepsilon_{t-1} < 0$  時， $I_{t-1} = 1$ ；反之當  $\varepsilon_{t-1} \geq 0$  時， $I_{t-1} = 0$ ； $\Omega_{t-1}$  代表  $t-1$  期以前所有可以獲取的資訊集合； $Z_t$  代表標準化殘差，其他的  $a_0$ 、 $\omega$ 、 $\beta$ 、 $a$ 、 $\gamma$ 、 $\eta$ 、 $\varphi$  都是待估參數。

另外，變準化殘差所服從的偏態  $t$  分配的機率密度函數如下：

$$ST(Z | \eta, \varphi) = \begin{cases} bc(1 + \frac{1}{\eta-2}(\frac{bZ+a}{1-\varphi})^2)^{-\frac{\eta+1}{2}}, & Z < \frac{-a}{b} \\ bc(1 + \frac{1}{\eta-2}(\frac{bZ+a}{1+\varphi})^2)^{-\frac{\eta+1}{2}}, & Z \geq \frac{-a}{b} \end{cases} \quad (3.4)$$

其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  則定義為：

$$a = 4c\varphi\left(\frac{\eta-2}{\eta-1}\right), b^2 = 1 + 3\varphi^2 - a^2, c = \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma(\frac{\eta}{2})} \quad (3.5)$$

其中， $\eta$  為峰態參數， $\varphi$  為偏態參數。當偏態參數  $\varphi=0$  的時候，偏態  $t$  分配則會轉變成一般對稱的 Student- $t$  分配；當峰態參數  $\eta$  趨近於無窮大的時候，偏態  $t$  分配將轉變成標準常態分配。

## (二)、Copula 理論

Copula 是一個非常重要的模型，他的概念最早由 Sklar (1959) 以法文期刊提

出，後來 Sklar (1973) 用英文發表了內容類似的文章。Copula 模型可以將  $n$  維度的聯合分配函數拆解成  $n$  個邊際分配函數以及 copula 函數，非常適合用於估計多個變數間的相關性結構。根據 Sklar 的理論，Copula 是指串接多個邊際分配服從均勻分配的聯合累積分配函數，也就是說對於隨即變數  $X_1, X_2, \dots, X_n$  服從邊際分配函數  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，且  $F_j(x) = P(X_j \leq x)$ ，對於  $j = 1, 2, \dots, n$  連續，則存在唯一的 Copula 其表達式如下：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.6)$$

因此，我們可以利用機率積分轉換，將任意邊際配分轉變為均勻分配，並建構出 Copula 模型。本文為兩個資產經過 GJR-GARCH 模型擬合後標準化殘差之間相關性結構，這樣可以排除資產對自身的影響程度，可以更加單純的探討與其他資產的相關性。對於兩個股票指數之間模型可以具體表示為：

$$\begin{aligned} &P(Z_{s_1,t} \leq z_{s_1,t}, Z_{s_2,t} \leq z_{s_2,t} | \Omega_{t-1}) \\ &= F(z_{s_1,t}, z_{s_2,t} | \Omega_{t-1}) = C(U_1, U_2 | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中  $U_1$ 、 $U_2$  的定義分別如下：

$$U_1 = F_{Z_{s_1,t}}(z_{s_1,t} | \Omega_{t-1}), U_2 = F_{Z_{s_2,t}}(z_{s_2,t} | \Omega_{t-1}) \quad (3.8)$$

然而，透過觀察表 3-1 的相關係數表可以看出，10 年期美國國庫券期貨報酬與三個股票指數報酬呈現負相關，為了讓 Copula 可以順利捕捉其逆向尾部相關性，本文將 10 年期美國國庫券期貨的標準化殘差反轉，令  $Y_{f,t} = -Z_{f,t}$ ，並推導得：

$$\begin{aligned} F_{Y_{f,t}}(y_{f,t} | \Omega_{t-1}) &= P(Y_{f,t} \leq y_{f,t} | \Omega_{t-1}) \\ &= P(Z_{f,t} \geq z_{f,t} | \Omega_{t-1}) \\ &= 1 - F_{Z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

翻轉後的到的累積機率 $F_{Y_{f,t}}$ 就相當於 $F_{Z_{f,t}}$ 的線形轉換。最後可推導得 10 年期美國國庫券期貨與股票指數的聯合分配得：

$$\begin{aligned} P(Z_{s,t} \leq z_{s,t}, Z_{f,t} \geq z_{f,t} | \Omega_{t-1}) &= P(Z_{s,t} \leq z_{s,t}, Y_{f,t} \leq f_{f,t} | \Omega_{t-1}) \\ &= F(z_{s,t}, y_{f,t} | \Omega_{t-1}) \\ &= C(U_1, U_3 | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $U_3 = 1 - F_{Z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1}) = F_{Y_{f,t}}(y_{f,t} | \Omega_{t-1})$

經過轉換以後聯合分配函數 $P(Z_{s_1,t} \leq z_{s_1,t}, Z_{s_2,t} \leq z_{s_2,t} | \Omega_{t-1})$ 與 $P(Z_{s,t} \leq z_{s,t}, Z_{f,t} \geq z_{f,t} | \Omega_{t-1})$ 就可以被表述為兩個隨機均勻變數 $U_1$ 、 $U_2$ 以及 $U_1$ 、 $U_3$ 的 Copula。經過對聯合條件累積機率函數微分後可以到的聯合條件機率密度函數如下：

$$\begin{aligned} f(z_{s_1,t}, z_{s_2,t} | \Omega_{t-1}) &= \frac{\partial^2 F(z_{s_1,t}, z_{s_2,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s_1,t} \partial z_{s_2,t}} = \frac{\partial^2 C(U_1, U_2 | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s_1,t} \partial z_{s_2,t}} \\ &= \frac{\partial^2 C(U_1, U_2 | \Omega_{t-1})}{\partial U_1 \partial U_2} \cdot \frac{\partial F_{Z_{s_1,t}}(z_{s_1,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s_1,t}} \cdot \frac{\partial F_{Z_{s_2,t}}(z_{s_2,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s_2,t}} \\ &= c(u_1, u_2 | \Omega_{t-1}) \cdot f_{Z_{s_1,t}}(z_{s_1,t} | \Omega_{t-1}) \cdot f_{Z_{s_2,t}}(z_{s_2,t} | \Omega_{t-1}) \\ f(z_{s,t}, y_{f,t} | \Omega_{t-1}) &= \frac{\partial^2 F(z_{s,t}, y_{f,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s,t} \partial y_{f,t}} = \frac{\partial^2 C(U_1, U_3 | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s,t} \partial y_{f,t}} \\ &= \frac{\partial^2 C(U_1, U_3 | \Omega_{t-1})}{\partial U_1 \partial U_3} \cdot \frac{\partial F_{Z_{s,t}}(z_{s,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s,t}} \cdot \frac{\partial F_{Y_{f,t}}(y_{f,t} | \Omega_{t-1})}{\partial y_{f,t}} \\ &= \frac{\partial^2 C(U_1, U_3 | \Omega_{t-1})}{\partial U_1 \partial U_3} \cdot \frac{\partial F_{Z_{s,t}}(z_{s,t} | \Omega_{t-1})}{\partial z_{s,t}} \cdot \frac{\partial [1 - F_{Z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1})]}{\partial (-z_{f,t})} \\ &= c(u_1, u_3 | \Omega_{t-1}) \cdot f_{Z_{s,t}}(z_{s,t} | \Omega_{t-1}) \cdot f_{Z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

由上述式子中可以看到，股票指數的標準化殘差以及國庫券期貨的標準化殘差  $Z_{s_1,t}$ 、 $Z_{s_2,t}$  的聯合條件機率密度函數就被拆解成  $U_1$  與  $U_2$  的 Copula 條件機率密度函、 $Z_{s_1,t}$  的邊際條件機率密度函數和  $Z_{s_2,t}$  的邊際條件機率密度函數的乘積。另外  $Z_{s,t}$ 、 $Z_{f,t}$  的聯合條件機率密度函數就被拆解成  $U_1$  與  $U_3$  的 Copula 條件機率密度函數、 $Z_{s,t}$  的邊際條件機率密度函數和  $Z_{f,t}$  的邊際條件機率密度函數的乘積。因為要使用 Maximum Likelihood Estimate 進行參數估計，因此將上述等式兩邊同時去自然對數，可以到的到以下對數概似函數：

$$\ln L_{s_1,s_2}(\theta) = \ln L_{c_1}(\theta_{c_1}) + \ln L_{s_1}(\theta_{s_1}) + \ln L_{s_2}(\theta_{s_2}) \quad (3.12)$$

$$\ln L_{s,f}(\theta) = \ln L_{c_2}(\theta_{c_2}) + \ln L_s(\theta_s) + \ln L_f(\theta_f)$$

其中， $\theta_{c_1}$  代表  $c(u_1, u_2 | \Omega_{t-1})$ 、 $\theta_{c_2}$  代表  $c(u_1, u_3 | \Omega_{t-1})$ 、 $\theta_{s_i}$  代表  $f_{z_{s_i,t}}(z_{s_i,t} | \Omega_{t-1})$ 、 $\theta_f$  代表  $f_{z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1})$ 。為了避免每次估計的參事過多、模型過度複雜。本文採用 Joe and Xu (1996) 提出的 IFM 方法，分兩階段進行估計。首先，估計三個股票指數報酬的標準化殘差  $Z_{s,t}$  以及 10 年期美國國庫券期貨報酬的標準化殘差  $Z_{f,t}$  的邊際分配參數：

$$\widehat{\theta}_s = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_{z_{s,t}}(z_{s,t} | \Omega_{t-1}; \theta_s) \quad (3.13)$$

$$\widehat{\theta}_f = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_{z_{f,t}}(z_{f,t} | \Omega_{t-1}; \theta_f) \quad (3.14)$$

然後再用估計所獲得的估計值估計 Copula 的參數：

$$\widehat{\theta}_c = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\Omega_{t-1}; \widehat{\theta}_s, \widehat{\theta}_f, \theta_c) \quad (3.15)$$

### (三)、 Copula 模型

本研究主要研究資產間的動態相關關係。本研究與 Patton (2006b) 探討匯率



關聯結構在不同時間點下的變動比較相似，因此本文將參考 Patton (2006b)，設定參數的 AR(1)動態條件，並使用 Gaussian copula、Student-t copula、Gumbel copula 以及 Clayton copula 四種方法研究資產的動態關聯結構。選擇這四種 Copula 的原因在於 Gaussian copula 最為常用但無法捕捉尾部相關性；Student-t copula 具有對稱的尾部相關性，可以彌補 Gaussian copula 無法捕捉尾部相關性的缺點；Gumbel copula 可以有針對性地捕捉右尾相關性，而 Clayton copula 則可以針對左尾相關性進行參數的估計。以下是這四種 Copula 的具體介紹以  $U_1, U_2$  為例：

### 1. Gaussian copula

可以對多維度的資料進行建模，在金融領域中最常用到的一種 Copula。Gaussian copula 是根據 Sklar 定理由二元常態分配建構而成，分佈型態對稱但是左尾以及右尾的相關關係都是 0，意味著 Gaussian copula 無法捕捉資產間的尾部關聯結構。Gaussian copula 的參數為相關參數  $\rho$ ，累積機率分配函數定義如下：

$$\begin{aligned} C^{Gaussian}(U_1, U_2 | \rho) &= \Phi_p(\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(U_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(U_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x^2 - 2xy\rho + y^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中， $\Phi^{-1}$  為標準常態分配的分位數函數； $\Phi_p$  為標準常態分配的聯合分配函數； $\rho$  為相關參數，且滿足  $-1 < \rho < 1$ 。用全部資料估計出  $\rho$  之後，將其作為起始值加入相關關係  $\rho_t$  的動態過程中。 $\rho_t$  的動態關係式如下：

$$\rho_t = \Lambda\left(\psi_1 + \psi_2\rho_{t-1} + \psi_3 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-i}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-i})\right) \quad (3.17)$$

其中， $\Lambda(\phi) = (1 - e^{-\phi})(1 + e^{-\phi})^{-1}$  為轉換函數，此轉換函數的目的在於確保相關參數  $\rho_t$  處於  $(-1, 1)$  的區間內。



## 2. Student-t copula

可以對多維度的資料進行建模，分佈型態對稱具有對稱的尾部相關性。也就是說 Student-t copula 左尾和右尾的相關性是相同的。其參數為相關係數  $\rho$  以及自由度  $\nu$ ，累積機率分配函數定義如下：

$$\begin{aligned} C^{Student-t}(U_1, U_2 | \rho, \nu) &= T_{\rho, \nu}(T_{\nu}^{-1}(U_1), T_{\nu}^{-1}(U_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(U_1)} \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(U_2)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\pi\nu\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{\mathbf{X}'(1-\rho^2)\mathbf{X}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中， $\mathbf{X} = (T_{\nu}^{-1}(U_1), T_{\nu}^{-1}(U_2))'$ ； $T_{\nu}^{-1}$  為 Student-t 分配的分位數函數。如果自由度  $\nu$  趨近於無窮大的時候，Student-t copula 將會近似等於 Gaussian copula。用全部資料估計出  $\rho$  和  $\nu$  以後，作為起始值加入到  $\rho_t$  的動態過程中。 $\rho_t$  的動態過程如下：

$$\rho_t = \Lambda \left( \psi_1 + \psi_2 \rho_{t-1} + \psi_3 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_{\nu}^{-1}(u_{1,t-i}) \cdot T_{\nu}^{-1}(u_{2,t-i}) \right) \quad (3.19)$$

其中， $\Lambda(\phi) = (1 - e^{-\phi})(1 + e^{-\phi})^{-1}$  為轉換函數，此轉換函數的目的在於確保相關參數  $\rho_t$  處於  $(-1, 1)$  的區間內。

## 3. Gumbel copula

由 Gumbel (1960) 首次提出，具有不對稱的分佈型態，可以反應右尾相關性結構，累積機率分配函數定義如下：

$$C^{Gumbel}(U_1, U_2 | \delta) = \exp \left\{ - \left[ (-\ln U_1)^{\delta} + (-\ln U_2)^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \quad (3.20)$$

其中， $\delta$  為控制相關性強度的參數，且  $\delta \geq 1$ 。用全資料估計出  $\delta$  後要將其轉換為 Kendall's tau，其轉換過程為  $\tau = 1 - 1/\delta$ 。並將其作為  $\tau_t$  動態過程的起始值。可以從 Kendall 's tau 的轉換方程式中看到，當  $\delta = 1$  的時候，右尾的相依參數為 0，相當於不相關；當  $\delta$  趨近於正無窮的時候，右尾相依參數趨近於 1。Kendall 's tau 的動態過程如下：

$$\tau_t = \Lambda \left( \psi_1 + \psi_2 \rho_{t-1} + \psi_3 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{1,t-i} - u_{2,t-i}| \right) \quad (3.21)$$

其中， $\Lambda(\phi) = (1 + e^{-\phi})^{-1}$  為轉換函數，因為 Gumbel copula 指描述正相關關係，此轉換函數的目的在於確保相關參數  $\tau_t$  處於 (0,1) 的區間內。

#### 4. Clayton copula

由 Clayton (1978) 首次提出，同樣具有不對稱的分佈型態，可以反應左尾尾相關性結構，累積機率分配函數定義如下：

$$C^{Clayton}(U_1, U_2 | \delta) = (U_1^{-\delta} + U_2^{-\delta} - 1)^{-1/\delta} \quad (3.22)$$

和 Gumbel copula 一樣  $\delta$  為控制相關性強度的參數，但其區間為  $\delta > 0$ 。用全資料估計出  $\delta$  後要將其轉換為 Kendall's tau，其轉換過程為  $\tau = \delta / (\delta + 2)$ 。並將其作為  $\tau_t$  動態過程的起始值。可以從轉換方程式中看到，當  $\delta = 0$  的時候，左尾相依參數為 0；當  $\delta$  趨近於正無窮的時候，左尾相依性參數趨近於 1。其中 Kendall 's tau 的動態過程以及轉換函數和 Gumbel copula 相同。

當估計完動態 Copula 的參數  $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$  後即可獲得資產間的相關關係  $\rho_t$  以及  $\tau_t$  的動態過程。

## 第肆章 研究結果

### 第一節 資產報酬率的敘述性統計

本研究所使用 10 年期美國國庫券期貨、MSCIACWI、MSCIEM 以及 MSCI DM 的原始資料來源於 Bloomberg 資料庫。研究所收集樣本區間為 1999 年 12 月 31 至 2020 年 04 月 03 日，本文將價格資料轉換成連續日報酬率。轉換公式如下：

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \times 100 \quad (4.1)$$

其中， $P_t$  代表第  $t$  期資產價格； $P_{t-1}$  代表落後一期即  $t-1$  期的資產價格。因為 2000 年 01 月 01 日至 2000 年 01 月 02 日不是交易日，因此經過資料整理與轉換後可以獲得 2000 年 01 月 03 日至 2020 年 04 月 03 日總計 5080 筆觀測值。

圖 4-1 至圖 4-4 分別是四種不同資產日報酬率所畫出來的頻率分佈圖。其中紅線部分是用各資產報酬率的平均數以及標準差所模擬出來的常態分配機率密度圖。可以從圖中看出，這四個資產報酬率的峰度明顯比常態分配大，可能出現了厚尾的現象。表 4-1 為 10 年期美國國庫券期貨、MSCIACWI、MSCIEM 以及 MSCI DM 四個資產連續日報酬率在全樣本期間的敘述性統計。四個資產都有正的平均報酬率，但是這個報酬率是經過 100 倍以後結果，統計結果並不顯著異於零。從標準差來看國庫券期貨報酬的波動度明顯小於另外三個股票市場指數的報酬波動度，因此在單純的股票投資組合裡面添加國債期貨確實可以降低投資組合的波動度。這四個資產的偏態係數都小於零，存在左偏現象。同時，峰態係數都大於 3，存在厚尾現象。另外經過 Jarque-Bera 常態分配檢定證實，資產報酬率並非服從常態分配，而是存在尖峰厚尾的現象。從 Ljung-Box 檢定的  $Q$  統計量可以看到三個股票指數報酬率存在序列相關的情況，另外  $Q^2$  統計量以及 ARCH-LM

檢定統計量在 1% 顯著水準下顯示四種資產報酬率的時間序列存在異質變異現象。

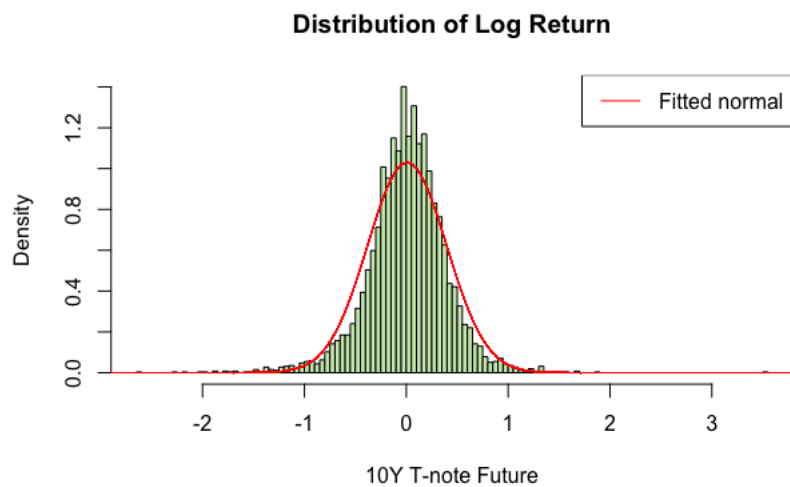


圖 4-1：10 年期美國國庫券期貨報酬率頻率分佈圖

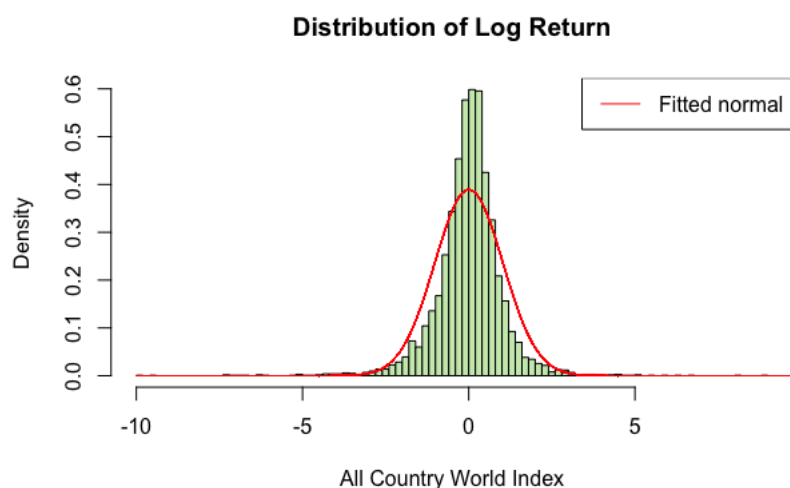


圖 4-2：MSCI 全國家世界指數報酬率頻率分佈圖

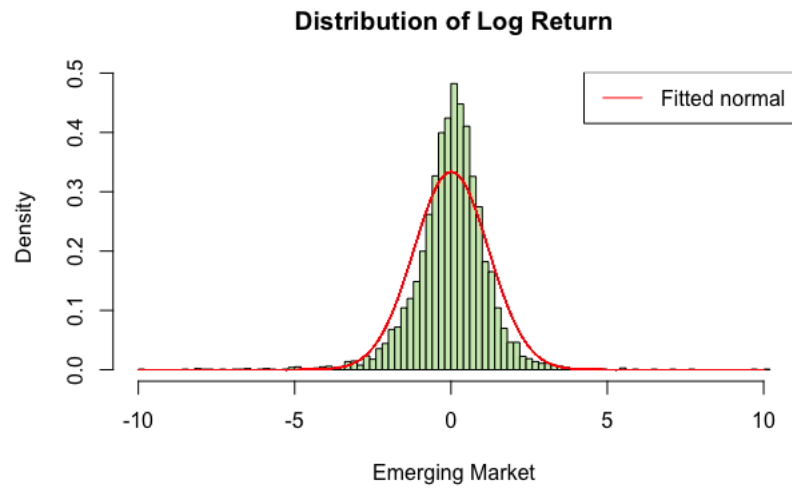


圖 4-3：MSCI 開發中國家指數報酬率頻率分佈圖

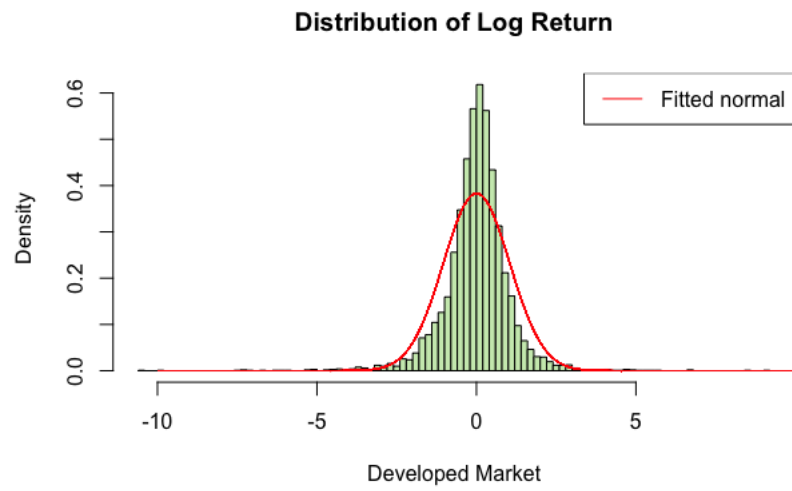


圖 4-4：MSCI 已開發國家指數報酬率頻率分佈圖

表 4-1：連續日報酬率之全樣本敘述統計量表

	10Y Future	T-Note	MSCI ACWI	MSCI EM	MSCI DM
平均數	0.0079		0.0041	0.0111	0.0042
標準差	0.3877		1.0111	1.1845	1.0271
偏態係數	-0.2811		-0.6567	-0.5578	-0.6529
峰態係數	4.0738		11.4644	8.1920	11.8407
Jarque-Bera	3584.46***		29350.51***	15107.34***	31278.91***
Q(20)	22.00		131.39***	280.26***	102.16***
Q <sup>2</sup> (20)	971.45***		6827.83***	8015.67***	6711.35***
ARCH(5)	230.08***		1437.82***	1355.57***	1458.92***
ADF	-15.92***		-16.83***	-16.21***	-16.85***

註：1.\*\*\*, \*\*, \*分別表示在 1%, 5%, 10%的顯著水準下顯著

2. Jarque-Bera 代表 Jarque-Bera 常態分配檢定統計量

3. Q(20)、Q<sup>2</sup>(20)分別代表落後 20 期之報酬率及其平方的 Ljung-Box 檢定統計量

4. ARCH(5)代表落後 5 期之報酬率的 ARCH-LM 統計量

5. ADF 代表 Augmented Dickey-Fuller 單根檢定統計量

表 4-2 是資產原始價格序列的 Johansen 共整合檢定的檢定統計量結果。結果顯示 10 年期美國國庫券期貨價格和三個股票指數間的檢定統計量並不顯著，也就是不存在共整合關係。另外 MSCI 開發中國家指數和 MSCI 已開發國家指數之間也不存在共整合關係。因此參考 Hsu, Tseng, and Wang (2008) 忽略誤差修正項並用 MA(1)代替這四種資產的邊際分配模型的條件平均數方程。

表 4-2：Johansen 共整合檢定統計量

Trace	10Y T-Note Future	MSCI DM
MSCI ACWI	7.99	-
MSCI EM	8.5	7.7
MSCI DM	7.74	-

註：此表為 Johansen trace test 統計量。其中虛無假說為「資產間無共整合關係( $r = 0$ )」

## 第二節 參數估計結果

### 一、邊際分配模型的結果

表 4-3 展示了四種資產各自的邊際 GJR-GARCH 模型參數之估計結果。其中  $\beta_i$  衡量時間序列的 GARCH 效果。該參數的估計值都在 1% 顯著水準下顯著異於零，說明了資產報酬的變異數存在明顯的隨時間變動而起伏的趨勢。 $\gamma_i$  衡量的是槓桿效果。可以從表 4-3 中看到 10 年期美國國庫券期貨存在顯著小於零的槓桿效果，意味著正向衝擊對 10 年期美國國庫券期貨的條件變異數造成的波動大於負向衝擊；相反的，MSCI 的三個股票市場指數都存在顯著大於零的槓桿效果，意味著負向衝擊對 MSCI ACWI、MSCI EM 以及 MSCI DM 的條件變異數造成的波動大於正向衝擊。

透過對四種資產的標準化殘差與其平方進行落後 20 期的 Ljung-Box 檢定發現，除了 MSCI EM 外，其他三種資產的標準化殘差以及其平方在 10% 的顯著水準下都不存在自我相關的顯現，表示經過 GJR-GARCH 模型的配適後，將原本報

酬率序列的一階與二階自我相關現象消除了，此時這三個資產的標準化參數的序列為白噪音過程。因此將對 MSCI EM 的邊際分配模型做進一步的調整。

表 4-3：ARMA(0,1)-GJR-GARCH(1,1)模型之估計結果

參數	10Y T-Note Future	MSCI ACWI	MSCI EM	MSCI DM
$\alpha_{i,0}$	0.0041 (0.0044)	0.0184* (0.0105)	0.0228 (0.0148)	0.0179* (0.0103)
$\alpha_{i,1}$	-0.0279** (0.0141)	0.1362*** (0.0142)	0.1990*** (0.0138)	0.1045*** (0.0144)
$\omega_i$	0.0005*** (0.0001)	0.0122*** (0.0019)	0.0238*** (0.0041)	0.0129*** (0.0020)
$\alpha_i$	0.0408*** (0.0041)	0.0000 (0.0079)	0.0149** (0.0071)	0.0000 (0.0081)
$\beta_i$	0.9650*** (0.0010)	0.8967*** (0.0097)	0.9034*** (0.0099)	0.8934*** (0.0142)
$\gamma_i$	-0.0167** (0.0067)	0.1749*** (0.0176)	0.1160*** (0.0142)	0.1819*** (0.0226)
$\varphi_i$	0.9057*** (0.0185)	0.8898*** (0.0179)	0.8869*** (0.0183)	0.8847*** (0.0175)
$\eta_i$	7.7172*** (0.7410)	9.1414*** (1.0814)	11.8111*** (1.7371)	8.8250*** (1.0397)
Q(20)	4.0056	19.1808	39.4559***	19.9368
Q <sup>2</sup> (20)	23.1673	22.7177	28.6969*	22.6341
ARCH(5)	10.6157	3.7817	14.8369**	3.6791

註：1.\*\*\*, \*\*, \*分別表示在 1%, 5%, 10%的顯著水準下顯著，括號內為標準誤

2. Q(20)、Q<sup>2</sup>(20)分別代表落後 20 期之變準化殘差及其平方的 Ljung-Box 檢定統計量

3. ARCH(5)代表落後 5 期之變準化殘差的 ARCH-LM 統計量

4.邊際分配模型設定如下： $s_t = a_{s,0} + \varepsilon_{s,t} + a_{s,1}\varepsilon_{s,t-1}$ ， $f_t = a_{f,0} + \varepsilon_{f,t} + a_{f,1}\varepsilon_{f,t-1}$

$\sigma_{s,t}^2 = \omega_s + \beta_{2,s}\sigma_{s,t-1}^2 + a_s\varepsilon_{s,t-1}^2 + \gamma_s I_{s,t-1}\varepsilon_{s,t-1}^2$ ， $\sigma_{f,t}^2 = \omega_f + \beta_{2,f}\sigma_{f,t-1}^2 + a_f\varepsilon_{f,t-1}^2 + \gamma_f I_{f,t-1}\varepsilon_{f,t-1}^2$

$Z_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_{i,t}}$ ， $Z_{i,t} | \Omega_{t-1} \sim ST(Z_{i,t} | \eta_i, \varphi_i)$



以下將對 MSCI EM 的條件平均數方程進行調整。圖 4-5 為 MSCI EM 日報酬率的 ACF 圖和 PACF 圖。從圖中可以看到 MSCI EM 日報酬的 ACF 在落後 1、2、3 期有顯著異於零的自相關性，而 PACF 圖顯示在落後 1、3、4、5、8、9、10 期有顯著異於零的偏自相關性，但考慮到模型的簡約性，落後 4 期及之後的自相關性及偏自相關性將不納入模型考慮範圍內。結合模型簡約性原則，備選條件平均數模型如下 ARMA(1,0)、ARMA(3,0)、ARMA(1,1)、ARMA(3,1)、ARMA(1,2)、ARMA(3,2)、ARMA(1,3)以及 ARMA(3,3)等九個模型。結果如表 4-4 所示，每個模型的 AIC 幾乎一樣，但是條件平均數為 ARMA(1,0)、ARMA(1,2)以及 ARMA(3,2)的 GJR-GARCH(1,1)模型的標準化殘差及其平方的 Ljung-Box 檢定統計量在 10%顯著水準下不顯著，ARCH-LM 檢定在 1%的顯著水準下不顯著。鑑於模型的簡約性原則，本文改用條件平均數為 ARMA(1,0)之 GJR-GARCH(1,1)模型作為 MSCI EM 的邊際分配模型。其標準化殘差經過模型配適後也是一個白噪音過程。MSCI EM 邊際分配模型的詳細估計結果如表 4-5。

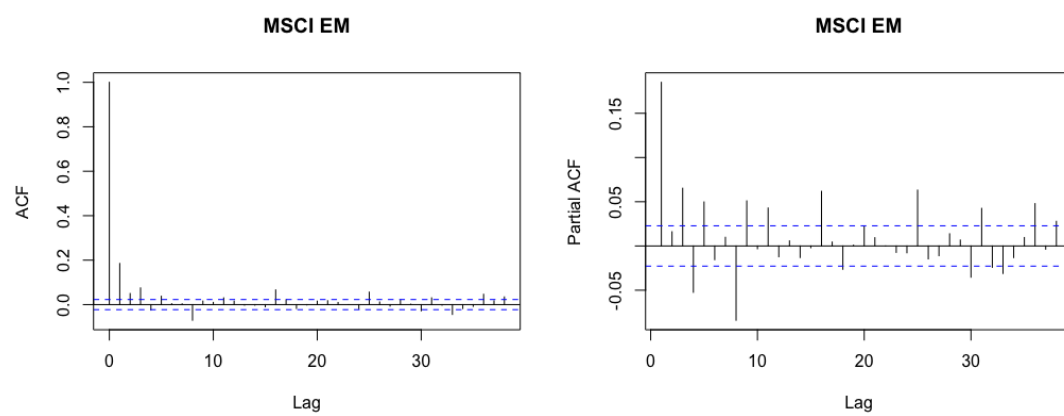


圖 4-5：MSCI 開發中國家之 ACF、PACF 圖

資產邊際分配模型擬合完成之後，將各資產的標準化殘差分別轉換為偏態  $t$  分配的累積機率  $u_1$ 、 $u_2$  與  $u_3$ ，並以 Kolmogorov-Smirnov 檢定實證分配是否服從

理論上的均勻分配。結果如表 4-6 所示，從表中可以看到所有序列的檢定統計量都在 10%顯著水準下不顯著，也就是說不拒絕各資產標準化殘差的偏態 t 分配累積機率服從均勻分配。

經過模型配適、殘差標準化、標準化殘差檢定以及轉換成的累積機率服從均勻分配後，就可以用 Copula 擬合資產之間的相關性結構。由表 3-1 可知，10 年期美國國庫券期貨報酬與其他三個股票型指數報酬為負向相關。但由於已知的 Copula 只能衡量變數之間同一方向的尾部相依性，因此為了更好的配適模型，本文將 10 年期美國國庫券期貨的累積機率序列進行線形轉換：

$$u_3 = 1 - u_y$$

其中 $u_y$ 表示 10 年期美國國庫券期貨的累積機率。



表 4-4：MSCI EM 不同備選條件平均數模型下 GJR-GARCH(1,1)模型

	ARMA(1,0)	ARMA(3,0)	ARMA(1,1)	ARMA(3,1)	ARMA(1,2)	ARMA(3,2)	ARMA(1,3)	ARMA(3,3)
Q(20)	30.236	27.233	30.414*	26.427	28.493	24.62	26.826	22.917
Q <sup>2</sup> (20)	28.608	29.261*	28.582	29.852*	28.883	27.979	29.371*	28.936*
ARCH(5)	14.216**	14.515**	14.268**	15.196***	14.348**	13.9**	14.662**	14.046**
AIC	2.7592	2.7595	2.7596	2.7597	2.7598	2.7587	2.7598	2.7593

註：1. Q(20)、Q<sup>2</sup>(20)分別代表落後 20 期之變準化殘差及其平方的 Ljung-Box 檢定統計量

2. ARCH(5)代表落後 5 期之變準化殘差的 ARCH-LM 統計量

表 4-5：MSCI EM 之 ARMA(1,0)-GJR-GARCH(1,1)模型之估計結果

參數	$\alpha_{i,0}$	$\alpha_{i,1}$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\varphi_i$	$\eta_i$
	0.0191	0.2035***	0.0244***	0.0127*	0.9016***	0.1238***	0.8905***	12.0393***
	(0.1547)	(0.1422)	(0.0041)	(0.0071)	(0.0100)	(0.0150)	(0.0183)	(1.8070)

註：1.\*\*\*, \*\*, \*分別表示在 1%, 5%, 10%的顯著水準下顯著，括號內為標準誤

2. 邊際分配模型設定如下： $s_t = a_{s,0} + \varepsilon_{s,t} + a_{s,1}s_{t-1}$ ， $\sigma_{s,t}^2 = \omega_s + \beta_{2,s}\sigma_{s,t-1}^2 + a_s\varepsilon_{s,t-1}^2 + \gamma_s I_{s,t-1}\varepsilon_{s,t-1}^2$ ， $Z_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_{i,t}}$ ， $Z_{i,t} | \Omega_{t-1} \sim ST(Z_{i,t} | \eta_i, \varphi_i)$

表 4-6：Kolmogorov-Smirnov 檢定結果

	10Y T-Note Future	MSCI ACWI	MSCI EM	MSCI DM
K-S	0.0089	0.0094	0.0057	0.0095

註：K-S 代表 Kolmogorov-Smirnov 檢定統計量，在此用於檢定變準化殘差和經轉換為偏態 t 分配的累積機率後是否服從均勻分配

## 二、動態 Copula 模型的估計結果

本文分別探討了 10 年期美國國庫券期貨與 MSCI ACWI、MSCI EM、MSCI DM 間的動態相關性以及 MSCI DM 與 MSCI EM 之間的動態相關性。分別估計了四種 Copula 的動態模型，其結果如表 4-7 所示。從表中結果可以發現，這四種 Copula 模型的絕大多數參數估計值都是顯著的。除了 MSCI DM、MSCI EM 組合中的 Gumbel 以及 Clayton copula 模型。總體上來說，絕大多數資產組合間當期的  $\rho_t$  或者是  $\tau_t$  經常會受到自己上一期也就是  $\rho_{t-1}$  和  $\tau_{t-1}$  的影響。另外，大多數的資產組合的  $\rho_t$  以及  $\tau_t$  都會受到最近 10 期內報酬率所包含的資訊所影響。資產之間的相關性確實會因為時間而發生變化，因此在考慮建構投資組合、進行風險管理或者是金融資產定價的時候，有必要考量資產之間相關性發生改變的情況。在 MSCI DM 和 MSCI EM 的組合中，Gumbel 以及 Clayton copula 模型的參數  $\psi_2$  並不顯著。說明了這兩個組合之間左尾和右尾的相關性不會受到前一期的影響，但是模型的參數  $\psi_3$  卻是顯著的，說明最近 10 期的報酬中存在一些其他資訊會影響當期的相關性。

而在這四種動態 Copula 模型中，Student-t copula 模型的 AIC 最小，說明了 Student-t copula 模型的擬合效果最佳。也就意味著這些組合中確實存在尾部相依性，但是相較於不對稱的尾部相依性，更傾向於對稱的尾部相依性。

表 4-7：動態 Copula 模型估計結果

	Gaussian	Student-t	Gumbel	Clayton
10Y T-Note Future & MSCI ACWI				
$\psi_1$	0.0109***	0.0108***	-1.7533***	-1.6985***
$\psi_2$	1.9643***	1.9823***	-3.8996***	-3.0565***
$\psi_3$	0.0880***	0.0575***	-4.2191***	-3.3878***
AIC	-550.0135	-672.993	-507.677	-595.480
10Y T-Note Future & MSCI EM				
$\psi_1$	0.0029	0.0037	-3.5359***	-3.5375***
$\psi_2$	1.9834***	1.9797***	-4.9969***	-4.1517***
$\psi_3$	0.0304***	0.0285***	-1.0869	0.1536
AIC	-197.531	-232.451	-167.414	-221.436
10Y T-Note Future & MSCI DM				
$\psi_1$	0.0123***	0.0122***	-1.6632***	-1.6392***
$\psi_2$	1.9588***	1.9787***	-3.7645***	-3.0057***
$\psi_3$	0.0912***	0.0589***	-4.3475***	-3.5349***
AIC	-559.2984	-687.572	-518.695	-606.749
MSCI EM & MSCI DM				
$\psi_1$	0.2576***	-0.2557***	0.2522**	-0.1745
$\psi_2$	2.6909***	2.6878***	-0.0743	0.0775
$\psi_3$	0.0673***	0.0613***	-3.6060***	-2.6567***
AIC	-2448.422	-2464.957	-2235.501	-1897.748

註：1.\*\*\*, \*\*, \*分別表示在 1%, 5%, 10%的顯著水準下顯著

2.括號內為標準誤

3.各動態 Copula 之動態方程式設定如下：

$$\text{Gaussian: } \rho_t = \Lambda \left( \psi_0 + \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-i}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-i}) \right), \Lambda(\phi) = (1 - e^{-\phi})(1 + e^{-\phi})^{-1}$$

$$\text{Student-t: } \rho_t = \Lambda \left( \psi_0 + \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_v^{-1}(u_{1,t-i}) \cdot T_v^{-1}(u_{2,t-i}) \right), \Lambda(\phi) = (1 - e^{-\phi})(1 + e^{-\phi})^{-1}$$

$$\text{Gumbel \& Clayton: } \tau_t = \Lambda \left( \psi_0 + \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{1,t-i} - u_{2,t-i}| \right), \Lambda(\phi) = (1 + e^{-\phi})^{-1}$$

## 二、動態相關關係的估計結果

圖 4-6 和圖 4-7 分別為 Gaussian copula 和 Student-t copula 所估計出來的資產間的動態相關性結構。黑線部分為相關關係的走勢，紅色虛線為相關關係為 0 的線。可以看到，10 國國庫券期貨和三個股票指數的相關性在大多數的情況下是負相關的關係，但是在 2006 年的時候有很長一段時間內呈現正相關，這時候正是金融危機發生前的時間。本文認為是金融危機前，市場處於一個非常熱絡的環境，因此原本應該是負相關的資產驟然呈現正相關關係。另外在 2013 年下半年的時候也有一段時間是呈現正相關的關係，本文認為是因為，美國市場總體經濟改善，美國失業率下降以及沒有太大的地緣政治負面事件等諸多因素導致。本文猜測與黃金在當年度遭遇 13 年來首次下跌，資金由黃金市場撤出流入並證券市場也有一定的關係。此外和之前的學者研究相同，在之前所提到的 2007 年、2008 年以及 2020 年的期間，他們之間的關係依然呈現負相關，可以說明 10 年期的美國國庫券期貨依然是比較適合用於避險的資產。而開發中國家市場報酬和已開發市場報酬在研究樣本內都呈現出正相關的關係。

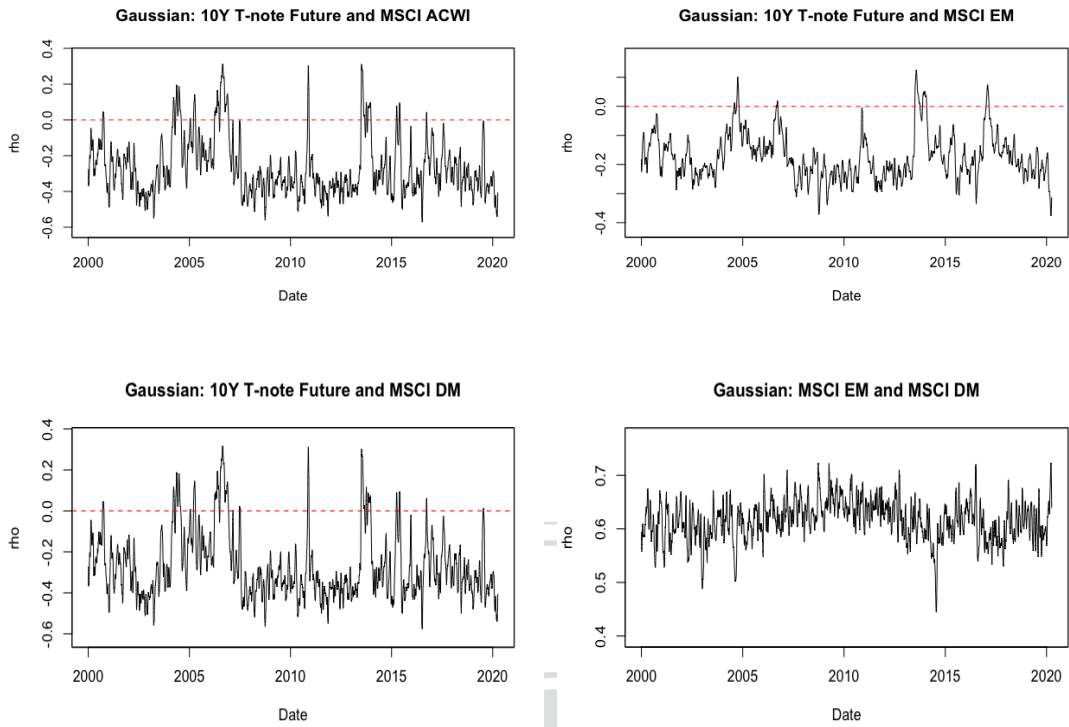


圖 4-6：Gaussian copula 估計之相關性結構

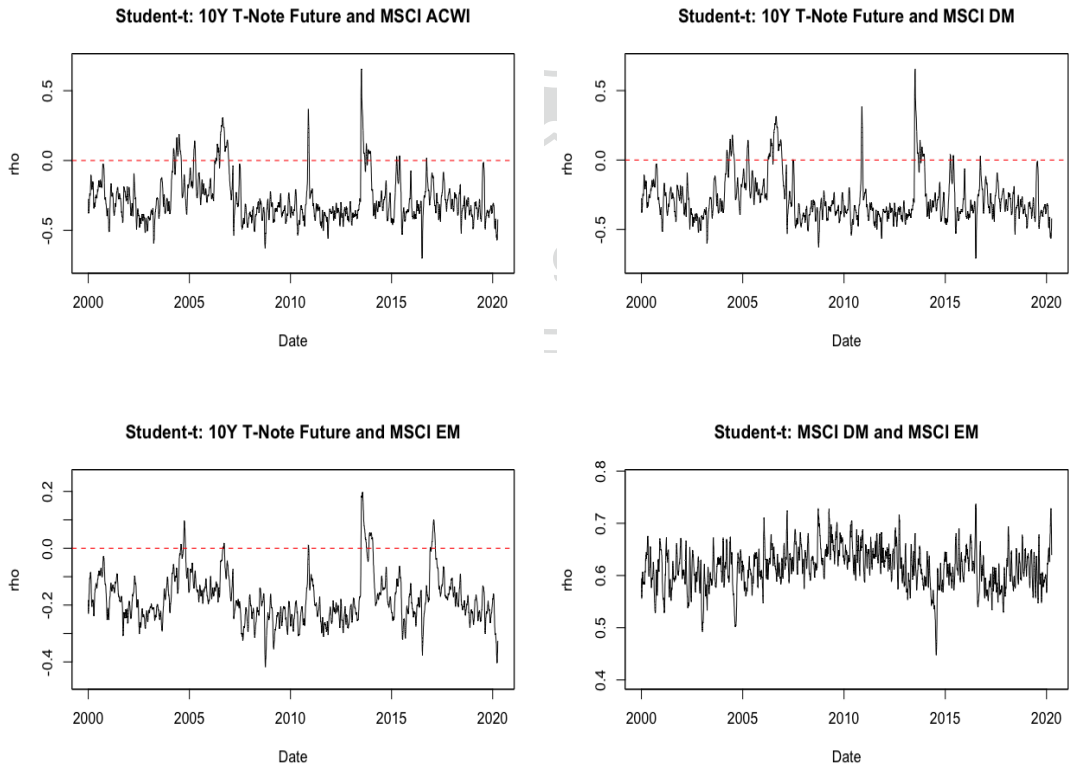


圖 4-7：Student-t copula 估計之相關性結構

圖 4-8、圖 4-9 分別是 Clayton copula 以及 Gumbel copula 所估計出來的尾部相關性結構。可以從圖中看到絕大多數時間資產之間的是存在尾部相關性的，只有少部分時間尾部相關性趨近與零。另外 10 年期美國國庫券期貨報酬率和 MSCI EM 指數報酬率的尾部相關性，相較於其他兩個債券報酬與股票指數報酬的尾部相關性弱。可能原因是開發中市場中，可以直接參與到美國國庫券期貨交易的投資人相對較少，因此彼此之間的連動性可能會弱一點。

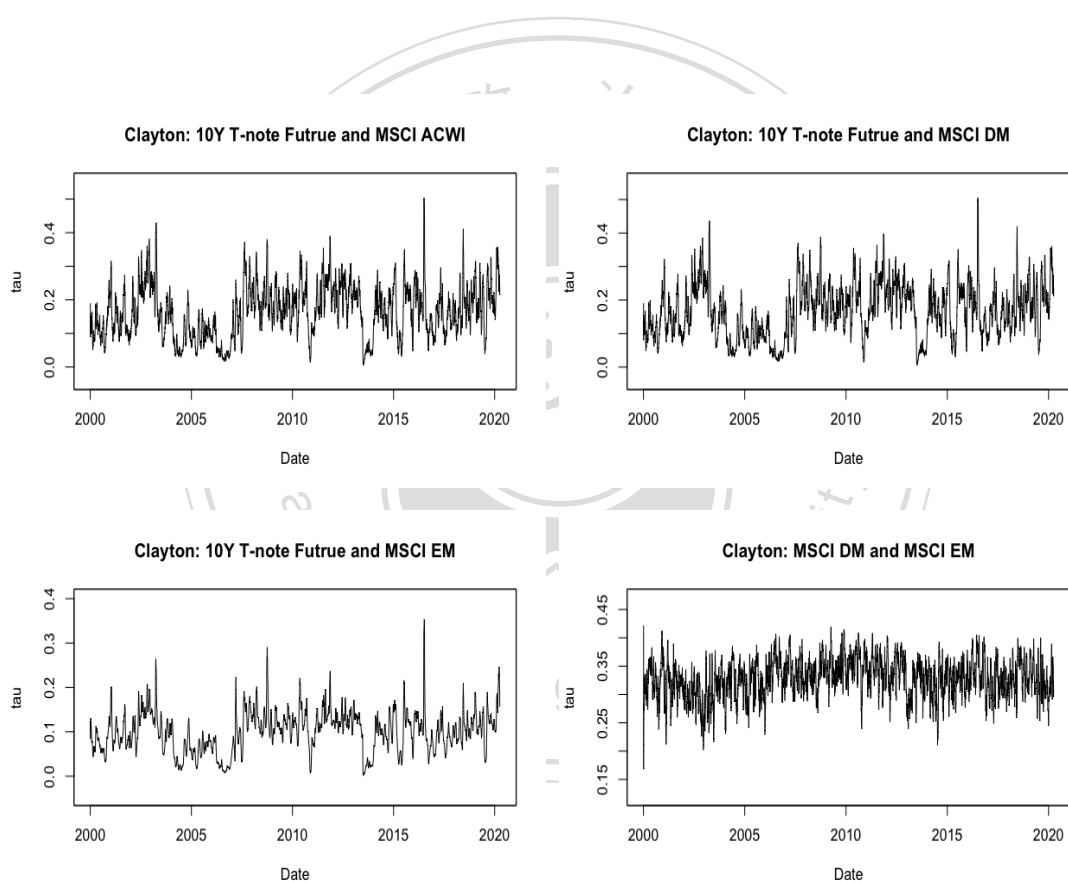


圖 4-8: Cayton copula 估計之相關性結構



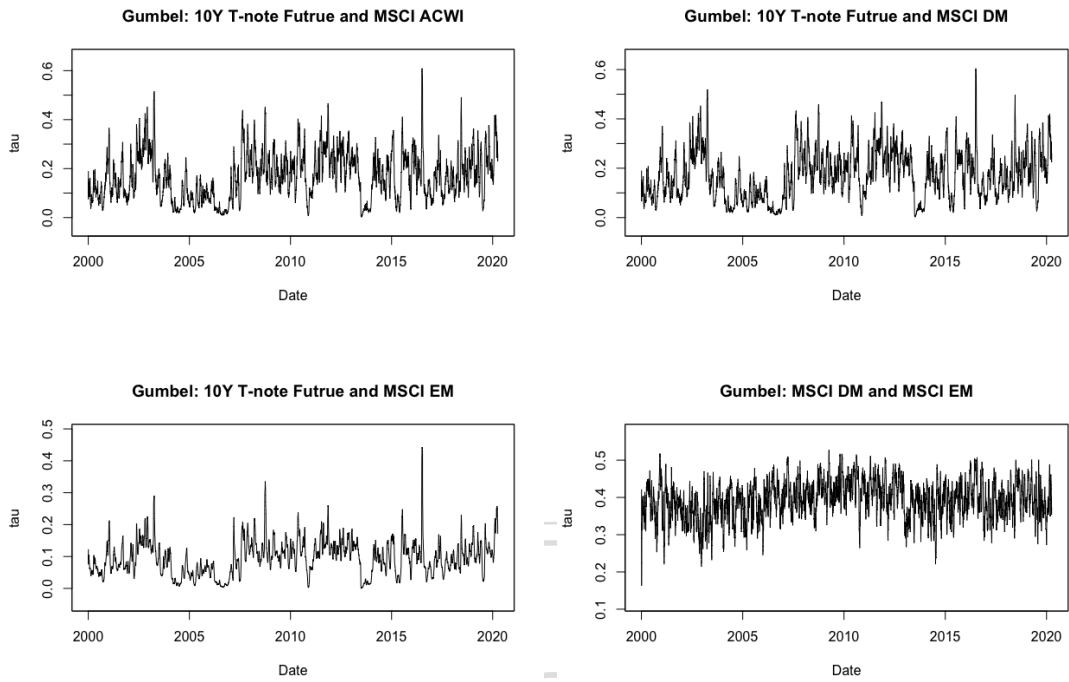


圖 4-9: Gumbel copula 估計之相關性結構



## 第五章 研究結論

本研究主要探討以 10 年期美國國庫券期貨、MSCI 全國家世界指數、MSCI 開發中國家指數以及 MSCI 已開發國家指數為例，分別利用 Gaussian、Student-t、Gumbel 以及 Clayton Copula 和 GJR-GARCH 組成的四種動態 Copula-GJR-GARCH 模型探討債券期貨與股票指數間以及不同股票市場之間的相關關係的動態結構。透過對資產之間動態的相關性結構研究，可以給金融機構或者是投資人在建構以及調整投資組合、風險評估以及管理或者是對資產進行定價定價的時候提供相對準確的相關關係，提高決策的準確性。

本文先用 GJR-GARCH 模型對四種資產進行配適，將無法被序列相關所解釋的殘差進行標準化，並將標準化殘差轉換成均勻分配，在用四種參數加入 AR(1) 條件的 Copula 模型對 10 年期美國國庫券期貨、MSCI 全國家世界指數；10 年期美國國庫券期貨、MSCI 開發中國家指數；10 年期美國國庫券期貨、MSCI 已開發國家指數以及 MSCI 已開發國家指數、MSCI 開發中國家指數這四個組合進行估計。結果顯示，資產之間的相關關係確實不是一塵不變的，絕大多數的組合間的相關性會受到前一期的影響，同時也會受到近 10 期的資產報酬率所影響。資產間相關關係的變動會讓金融機構以及投資人面臨更大的風險，因此在建構和調整投資組合、評估和管理風險以及資產定價的時候考慮到資產相關關係的變動會讓決策更具有參考性。

本研究發現資產之間的相關性會隨著時間變動，而且會從負相關的關係轉變成正相關的關係。10 年期美國國庫券報酬和三個 MSCI 股票指數報酬之間存在長期的負相關，但是在危機發生的時候並沒有出現相關關係反轉的情況。在市場

比較火熱的時候，兩種資產報酬的相關關係會由負相關轉變成正相關的關係。這兩種情況的原因可能在於 MSCI 所編織的指數是屬於跨市場的指數且無法被交易，指數本身所存在的風險因指數所覆蓋的市場廣泛而被分散掉，單一市場的衝擊可能對這個指數造成的影響不大。而 10 年期美國國庫券期貨雖然被廣泛交易，但他所曝露的風險卻是屬於美國單一國家所面臨的風險，因此他對美國的市場環境比較敏感。因此在後續研究中需要考慮資產的可交易性，以及不同區域市場的匹配程度。

考慮到每個市場投資人有不同的可以進行買賣的投資標的，本文未來的研究方向，將股票指數拆開成獨立的市場，並研究各市場內股票報酬與對應市場所特有避險資產報酬進行研究。透過計算出的動態避險比例，建構動態的投資組合，並計算在考慮了當地投資成本的情況下的投資組合績效，觀察各種模型在不同市場中的績效表現情況。

## 參考文獻

- Aloui, R., Hammoudeh, S., & Nguyen, D. K. (2013). A time-varying copula approach to oil and stock market dependence: The case of transition economies. *Energy Economics*, 39, 208-221.
- Baele, L., Bekaert, G., & Inghelbrecht, K. (2010). The determinants of stock and bond return comovements. *The Review of Financial Studies*, 23(6), 2374-2428.
- Campbell, J. Y., Sunderam, A., & Viceira, L. M. (2009). *Inflation bets or deflation hedges? The changing risks of nominal bonds* (0898-2937). Retrieved from
- Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1), 141-151.
- Connolly, R., Stivers, C., & Sun, L. (2005). Stock market uncertainty and the stock-bond return relation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40(1), 161-194.
- de Goeij, P., & Marquering, W. (2004). Modeling the conditional covariance between stock and bond returns: A multivariate GARCH approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2(4), 531-564.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5), 1779-1801.
- Guidolin, M., & Timmermann, A. (2006). An econometric model of nonlinear dynamics in the joint distribution of stock and bond returns. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 1-22.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698-707.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 705-730.
- Hsu, C. C., Tseng, C. P., & Wang, Y. H. (2008). Dynamic hedging with futures: A copula-based GARCH model. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other*

*Derivative Products*, 28(11), 1095-1116.

Joe, H., & Xu, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models.

Kroner, K. F., & Sultan, J. (1993). Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(4), 535-551.

Lai, Y., & Tseng, J.-C. (2010). The role of Chinese stock market in global stock markets: A safe haven or a hedge? *International Review of Economics & Finance*, 19(2), 211-218.

Li, D. X. (2000). On default correlation: A copula function approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4), 43-54.

Panchenko, V., & Wu, E. (2009). Time-varying market integration and stock and bond return concordance in emerging markets. *Journal of Banking & Finance*, 33(6), 1014-1021.

Patton, A. J. (2006a). Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths. *Journal of Applied Econometrics*, 21(2), 147-173.

Patton, A. J. (2006b). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47(2), 527-556.

Reboredo, J. C., & Ugolini, A. (2015). Systemic risk in European sovereign debt markets: A CoVaR-copula approach. *Journal of International Money and Finance*, 51, 214-244.

Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leursmarges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite' de Paris*, 8, 229-231.

Sklar, A. (1973). Random variables, joint distribution functions, and copulas. *Kybernetika*, 9(6), (449)-460.

Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F. J., & Kalev, P. S. (2009). A new approach to modeling co-movement of international equity markets: evidence of unconditional copula-based simulation of tail dependence. *Empirical economics*, 36(1), 201.

Zakamouline, V., & Koekebakker, S. (2009). Portfolio performance evaluation with

generalized Sharpe ratios: Beyond the mean and variance. *Journal of Banking & Finance*, 33(7), 1242-1254.

