

國立政治大學金融學系

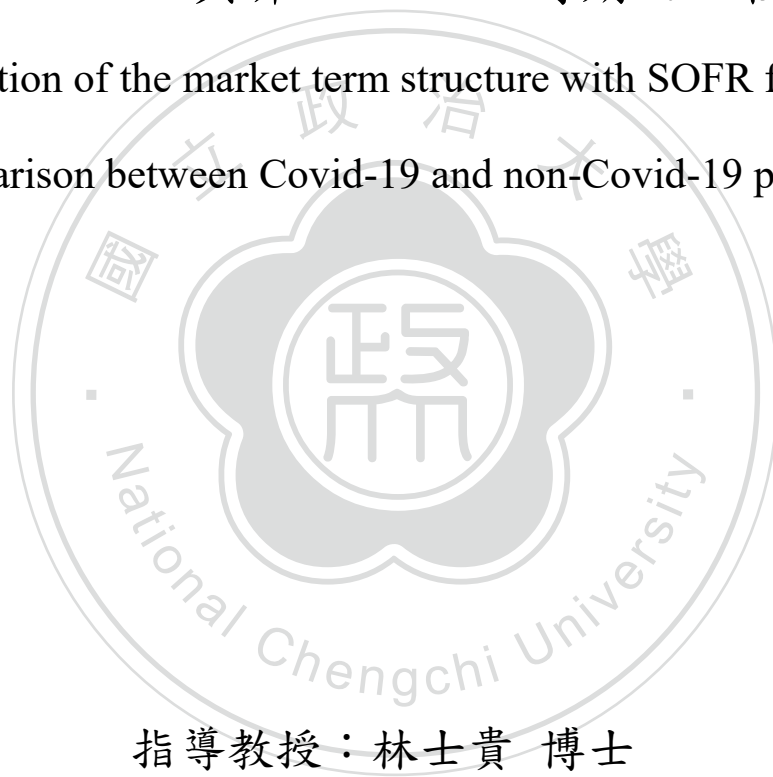
碩士論文

基於 SOFR 期貨校估利率市場期間結構：

Covid-19 與非 Covid-19 時期之比較

Calibration of the market term structure with SOFR futures:

Comparison between Covid-19 and non-Covid-19 periods



指導教授：林士貴 博士

研究生：張弘仕 撰

中華民國一一一年一月

## 摘要

英國金融行為監管局 (Financial Conduct Authority, FCA) 在 2017 年宣布，2021 年底後將不再要求報價銀行提供 LIBOR 報價。在美元市場部分，普遍被認為適合替代美元 LIBOR 之利率指標為 SOFR。然而目前尚缺乏一套完整開發且經驗證有效的 SOFR 模型，加上 LIBOR 退場在即，短期內要開發出精準的 SOFR 模型相對困難。因此，本篇論文基於芝加哥商品交易所掛牌交易的 SOFR 期貨，透過一般化方法快速建立短期市場 SOFR 期間結構，且此套方法在未來 SOFR 衍生性商品更加多元、成熟時，能夠輕易地將新的衍生性商品加入模型進行模型擴充。在本篇論文的研究中發現，該方法下所建構出來的 SOFR 期限結構能夠與聯邦資金利率 OIS 有高度的貼近程度，且所估計出來的 SOFR 期限結構及聯邦資金利率 OIS 之相對性質與 SOFR 及 EFFR 之相對性質一致。即便經過 COVID-19 以後市場發生結構性改變，該方法仍然保有其適用性。

**關鍵詞：**LIBOR、利率期間結構、SOFR、SOFR 期貨、Fed 貨幣政策

## Abstract

The Financial Conduct Authority of the United Kingdom announced that there will be a termination of LIBOR quoted by banks at the end of 2021, and SOFR is seen as one of the suitable reference rates to replace LIBOR by the market. However, limited by the short history of SOFR quotation, the market is lacking some accurate and already-verified interest rate model in dealing with SOFR. Moreover, since the deadline of LIBOR phase out is close, it is not that easy to develop an interest rate model that accurately describes the dynamics of SOFR by then. Therefore, in this paper we develop a general method to quickly build up SOFR term structure with short term market, based on the SOFR futures traded at Chicago Mercantile Exchange (CME). This method is model-free and can be easily adopted, adjusted, and expanded. The SOFR term rates estimated in this paper are quite close to Federal Funds OIS, which is also seen as the benchmark rate and can keep relative property to Federal Funds OIS. Furthermore, even though the sample period steps across COVID-19 period, when the market fluctuates dramatically, the way of estimating SOFR term rate is still suit-to-use.

**Keywords:** LIBOR, Interest Rate Term Structure, SOFR, SOFR Futures, Fed Monetary Policy

## 目 次

第一章 緒論 .....	1
第一節 研究背景與動機 .....	1
第二節 研究目的 .....	3
第二章 文獻回顧 .....	6
第一節 參考利率演變過程 .....	6
第二節 SOFR 模型建構方法 .....	7
第三章 研究方法 .....	9
第一節 模型假設 .....	9
第二節 參數校估 .....	10
第三節 SOFR 期限結構計算方式 .....	16
第四章 實證分析 .....	20
第一節 使用資料 .....	20
第二節 實證結果 .....	21
第五章 結論與展望 .....	33
第一節 研究結論 .....	33
第二節 未來展望 .....	34
參考文獻 .....	36

## 表 次

表 1	LIBOR 替代利率指標.....	2
表 2	前瞻型利率及回溯型利率比較表 .....	4
表 3	SOFR 期貨契約規格.....	12
表 4	Nasdaq 公共假期日曆 .....	17
表 5	ICE LIBOR 公共假期日曆 (USD LIBOR).....	17
表 6	SOFR 於非交易日之計息(舉例).....	18
表 7	模型目標函數值 (RMSE) 之統計(單位：bps).....	22
表 8	Term SOFR - OIS 利差之統計(全樣本)(單位：bps).....	27
表 9	Term SOFR - OIS 利差之統計(疫情前)(單位：bps).....	28
表 10	Term SOFR - OIS 利差之統計(疫情後)(單位：bps).....	28

## 圖 次

圖 1	SOFR 與 EFR 歷史走勢圖.....	9
圖 2	SOFR 期貨近/遠月契約、結算窗口示意圖 .....	12
圖 3	SOFR 期貨近月契約價值示意圖 .....	13
圖 4	模型 RMSE 變化圖(全樣本) .....	24
圖 5	一個月期 SOFR 期限結構與 OIS 走勢圖(全樣本).....	25
圖 6	三個月期 SOFR 期限結構與 OIS 走勢圖(全樣本).....	25
圖 7	六個月期 SOFR 期限結構與 OIS 走勢圖(全樣本).....	26
圖 8	一年期 SOFR 期限結構與 OIS 走勢圖(全樣本).....	26
圖 9	一個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本).....	30
圖 10	三個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本).....	30
圖 11	六個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本).....	31
圖 12	一年期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本).....	31

# 第一章 緒論

## 第一節 研究背景與動機

### 一、LIBOR 退場及 LIBOR 替代利率

在 2008 年金融海嘯以前，市場上多數的利率相關交易（不論是有擔保或是無擔保交易），如浮動債（Floating Rate Notes）、利率交換（Interest Rate Swap, IRS）、商業貸款（Commercial Loans）等，主要以倫敦銀行同業拆款利率（London Interbank Offered Rate, LIBOR）作為參考利率（Reference Rate），同時 LIBOR 也作為大多數利率商品的折現率。在 2008 年金融海嘯以前，常被用來檢視金融市場資金流動性的三個月期美元 LIBOR (USD LIBOR-3M) 與相對應美國聯邦資金利率（Federal Funds Rate, FFR）隔夜指數交換（Overnight Index Swap, OIS）利率之利差一般會維持在 10 個基點（Basis Points, bps）上下，然而在金融海嘯期間利差一度最高達到 350 個基點，且至此開始三個月期美元 LIBOR 與相對應期限的 OIS 之利差不再維持金融海嘯以前的長期穩定狀態。這一現象表明在資金緊俏的金融環境下銀行普遍不願意出借資金，由銀行主觀報價而來的 LIBOR 隱含了大幅度的流動性及信用風險溢酬外，LIBOR 的可操控性也在 2008 年金融危機以後慢慢顯現出來，因此需要另外一套更符合金融穩定性以及健全性的參考利率指標替代既有的 LIBOR 制度。

在 2008 年金融危機後，因金融危機意識興起，有擔保之利率及現金商品交易逐漸普遍，相關交易的折現方法也改採 OIS 折現，但仍有大量利率商品之參考利率為 LIBOR。2017 年 7 月，英國金融行為監管局（Financial Conduct Authority, FCA）宣布，2021 年底後將不再要求報價銀行提供 LIBOR 報價，但又於 2021 年 3 月宣布延後部分天期之美元 LIBOR 退場期限至 2023 年 6 月底。

從英國 FCA 宣布延後部分天期之 LIBOR 退場期限可知，當前市場尚未有完

整的參考利率替代方案，迫切需要一套能夠接軌 LIBOR 退場的利率制度。替代參考利率委員會 (Alternative Reference Rates Committee, ARRC)，依照國際證券管理機構組織 (International Organization of Securities Commissions, IOSCO) 發布之「金融指標監管原則」，選出替代利率指標可能選項，此原則有三大要點：(1) 指標計算之資料來源 (Data)、(2) 指標計算之方式 (Methodology)、(3) 指標管理者之治理機制 (Governance)。表 1 列出目前市場上較能接受且亦受到監管機關認可的替代利率指標，不同於 LIBOR，這些替代利率指標都是在實際交易之基礎下編制得到。

表 1 LIBOR 替代利率指標

	美元 LIBOR	英鎊 LIBOR	歐元 LIBOR	日圓 LIBOR	瑞郎 LIBOR
替代利率	隔夜擔保 融資利率 (Secured Overnight Financing Rate, SOFR)	英鎊隔夜拆款 平均利率 (Sterling Overnight Index Average, SONIA)	歐元 短期利率 (Euro Short- Term Rate, ESTR)	東京隔夜 平均利率 (Tokyo Overnight Average Rate, TONA)	瑞士隔夜 平均利率 (Swiss Average Rate Overnight, SARON)
編制來源	隔夜附買回 利率(有擔保)	隔夜拆款利率 (無擔保)	隔夜短期利率 (無擔保)	隔夜拆款利率 (無擔保)	隔夜附買回利 率(有擔保)
管理機構	紐約聯邦 準備銀行	英格蘭銀行	歐洲中央銀行	日本中央銀行	瑞士證券 交易所
初次公告日	2018.04.02	2018.04.23	2019.10.02	1992.10.09	2009.09.22

在折現架構方面，2008 金融危機後改採的 OIS 折現法也是在實際交易基礎下得到折現曲線。聯邦資金市場利率 (Effective Federal Funds Rate, EFFR) 為每日隔夜聯邦資金市場利率交易量之加權中位數，而 OIS 可以理解為以 EFFR 為標的之 Swap 所隱含的前瞻型期限 EFFR (Forward-Looking Term EFFR)，但計算 OIS 的資料來源為拆款市場，其日均交易量較低且市場參與者類別少(多為銀行體系)。相較之下，SOFR 計算來源為有擔保利率交易之附買回市場，具有較高的流動性與較廣泛的涵蓋市場參與者，且美國聯邦儲備系統 (Federal Reserve System, Fed) 現今主要是透過貨幣市場共同基金流動性工具 (Money Market Mutual Fund



Liquidity Facility, MMLF) 進行貨幣政策操作，藉由直接設定與 MMLF 進行隔夜附買回交易之利率，進而影響附買回交易市場 (Overnight Repurchase Market, Repo Market)。因此，研究 SOFR 動態與架構是目前掌握利率市場動向之關鍵。

## 二、接軌新利率制度需要有新的金融模型

引入新的參考利率準則後，金融機構需要在各個方面調整甚至大幅更新部門營運系統，例如在財務風險管理方面，新的參考利率下需要發展相應的利率模型，以重新評估市場風險、信用風險曝險，重建風險偏好與管理模型；在交易方面，勢必也需要開發新的交易模型與產品定價模型以捕捉全新的市場資訊；法規方面，也需要針對利率基準連結之契約進行修訂、評估合約修訂帶來的潛在交易對手風險或影響。新的金融模型發展以及營運系統的換新是企業能否順利接軌新利率制度的一大要點。

### 第二節 研究目的

#### 一、研究目的

紐約聯邦準備銀行將前一日附買回交易總量按等級賦予相應權重，從低到高排序得出中位數交易量所對應的利率即為 SOFR，並於每日紐約時間早上 8 點發佈，是屬於回溯型 (Backward-Looking) 利率，且報價期間僅有隔夜期 (O/N)。直接使用隔夜期 SOFR 作為利率交易時的參考利率有其便利性，但這樣的做法也存在一定的缺點。前瞻型利率以及回溯型利率之優缺點比較如表 2 所示。以利率交換交易為例，若浮動端利率以隔夜期 SOFR 為計息基準，則需要到現金交換日時才能夠確定現金流，這對銀行在資金籌措及資金管理造成影響；抑或從資金需求者的角度出發，通常資金需求者會要求在借款日時就在契約中註明借款期間的應付利息。即便上述問題在實務上能夠透過延後現金交換日或是改以歷史 SOFR 連

續複利值為利率基準等方式調整，這樣的交易模式卻無法在交易當下就立即反映對未來市場的預期，也就難以針對交易部位或金融商品進行評價，以建立相應的交易及避險策略。因此，勢必需要有能估計前瞻型 SOFR 期限結構的模型或方法產生，此即為本篇論文之研究目的。

表 2 前瞻型利率及回溯型利率比較表

	前瞻型利率	回溯型利率
計算基礎	需要利率模型估計	僅由歷史資料計算
現金流量確定日	可提早確定	計息期間結束才完全確定
利率波動反映	不一定完全反映 計息期間利率波動	完全反映 計息期間利率波動
反映市場預期與否	考量市場預期 及指標流動性	僅考量歷史資訊 亦忽略市場深度
成功建立關鍵因素	成熟的衍生性商品市場	-

## 二、本文貢獻

建立前瞻型 SOFR 期間結構除了需要在利率模型基礎下建立 SOFR 動態過程外，還需要 SOFR 衍生性商品資料校估模型所需之參數。大部分的利率建模方式都是採用動態模型，以布朗運動描繪利率的隨機過程，如 Hull and White (1990)、Heath, Jarrow and Morton (1992)，這一類的模型都需要校估利率的波動度，通常是透過具有波動度參數的衍生性商品資料(如：選擇權)估計。然而，現階段 SOFR 衍生性商品市場尚未成熟，可以直接校估 SOFR 波動度的 SOFR 衍生性商品不多或是目前仍缺乏流動性，雖然亦可藉由其他衍生性商品(如 SOFR 期貨、SOFR-Based Swaption 等)在模型內間接校估 SOFR 隱含波動度，但通常校估過程較為複雜及繁瑣，且會隨著使用的模型不同而有不同的校估過程，眼看 LIBOR 退場

日期在即，短時間內欲以上述提及之模型建構具有系統性 SOFR 期限結構之估計方法相對困難。因此，本篇論文透過一般化方法建立前瞻型 SOFR 期限結構，該方法基於假設單純、參數估計容易、能夠輕易的調整及擴充模型的性質下，得以快速以具有系統性的方式估計出前瞻型 SOFR 期限結構，因應即將到來的新利率制度，直到更全面的模型被開發出來。最後，分析該方法在利率環境發生巨幅變動時(COVID-19 造成的市場動盪)是否會改變其適用性。

本篇論文將於第二章探討過去相關文獻，第三章講述研究方法，第四章呈現實證分析結果，以及在第五章總結本篇論文之結論。



## 第二章 文獻回顧

### 第一節 參考利率演變過程

在 2008 年金融海嘯以前，市場上多數的利率相關交易（不論是無擔保或是有擔保）主要以倫敦銀行同業拆款利率（London Interbank Offered Rate, LIBOR）作為參考利率（Reference Rate），同時 LIBOR 也作為大多數利率商品的折現率，其原因在於 LIBOR 為基於前瞻性考量而報出的利率，而且是以期限結構的形式報價，在使用上可以直接透過 LIBOR 交換利率（LIBOR Swap）以拔靴（Bootstrapping）方式快速估計出一年期以上的 LIBOR，再以插補方法得到完整的 LIBOR 期限結構，而 LIBOR 同時作為參考利率以及折現率的優點在於可將遠期 LIBOR（Forward LIBOR）以債券投資組合的方式複製出來（將 LIBOR 折現曲線上的特定期限結構點取出並組合為債券投資組合，即可複製出遠期 LIBOR），也就有了 Brace, Gatarek, and Musiela (1997) 所提出的 Lognormal Forward LIBOR Model (LFM)，證明了每一個遠期利率在個別單一機率測度下為對數常態分配。在 LFM 架構下，大部分的 LIBOR 衍生性商品交易都可以此模型為基準進行商品評價。

在 2008 年金融危機後，因金融危機意識興起，有擔保之利率及現金商品交易逐漸普遍，其折現方法也改採 OIS 折現，但多數利率商品之參考利率仍然使用 LIBOR，此階段的利率模型轉為多重曲線架構（Multi-Curve Structure），意即同時對兩種或以上不同利率進行建模，並考量其相關性，如 Gunnarsson (2013) 以 LIBOR-OIS 基差交換（LIBOR-OIS Basis Swap）建立的雙重曲線模型，可用來同時評價交易部位以及擔保品部位。然而 OIS 是以拆款市場資料為計算來源，其市場參與者多為銀行體系且日均交易量較低，難以作為整個金融體系的基準利率代表，金融穩定委員會（Financial Stability Board, FSB）在 2018 年的報告中即指出這點，並且建議改採流動性更高、市場參與者更多元的利率市場資料作為基準利

率指標計算來源，其所意旨的即是附買回交易市場；至此，於芝加哥商品交易所 (Chicago Mercantile Exchange, CME) 或於美國的其他集中市場交易之利率衍生性商品，其結算或評價部位時所採用的折現率逐漸由 OIS 改為 SOFR。

LIBOR 即將在 2023 年完全退場，市場開始出現替代 LIBOR 作為參考利率的利率指標，而在美元市場最為接受的美元 LIBOR 替代利率即為 SOFR。在 Indriawan, Jiao, and Tse (2021) 的研究中發現，當前市場環境下的 LIBOR 相對於聯邦資金利率，更容易以附買回市場利率為均數回歸基準，說明了當前附買回市場相比聯邦資金利率市場更能與其他利率連動，這也間接反映出 Fed 對於聯邦資金利率市場的控制能力已經不如金融海嘯以前，並且相對聯邦資金市場，Fed 目前更能夠控制的是附買回市場，這是因為 2008 年金融危機後，Fed 透過量化寬鬆政策為市場注入流動性，但也因量化寬鬆政策造成美國銀行體系充斥超額準備金，加上聯邦資金利率市場的參與者多為銀行體系，使得 Fed 傳統貨幣政策(每日公開市場操作，以調整市場整體準備金供給的方式影響聯邦資金利率，進而達到目標利率區間)失效，聯邦資金利率無法再作為整個金融體系的有效利率下限，因而在後續祭出新的貨幣政策手段，藉由直接設定隔夜附買回利率影響市場。

## 第二節 SOFR 模型建構方法

在 SOFR 模型建構方法的部分，最早是由 Mercurio (2018) 所提出的多重曲線模型 (Multi-Curve Model)，透過 Hull-White 單因子模型先對聯邦資金利率 (Federal Funds Rate) OIS 進行建模，在 OIS 曲線的基準上加上一個隨機利差 (SOFR-OIS Spread) 即得到 SOFR 期間結構，但缺乏實證結果。Gellert (2019) 則是從 Fed 貨幣政策角度出發，假設 Fed 期望目標利率 (Expected Target Rate) 為一純粹跳躍擴散過程 (Pure Jump Diffusion Process)，且跳躍發生時間為已知(為聯邦公開市場委員會 (Federal Open Market Committee, FOMC) 利率決策日期)，



接著假設一個 SOFR 減去目標利率之利差 (SOFR-Target Rate Spread)，且該利差符合 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (Ornstein-Uhlenbeck Process, OU Process)，並在該 OU 過程中加入每月底跳躍擴散項 (End of Month Jump)，以擬合 SOFR 在特定時間點發生短期飆升 (SOFR Spike) 的現象，最後將期望目標利率函數加上 SOFR 減去目標利率利差之 Ornstein-Uhlenbeck 過程，即得到 SOFR 動態過程，但模型隱含的 SOFR 遠期利率卻會隨著時間經過而發散。其中也不乏有學者提出較簡化的 SOFR 動態模型，如 Heitfield and Park (2019) 純粹針對 SOFR 的跳躍擴散過程 (Jump Diffusion Process) 性質進行建模，發現所建構出來的 SOFR 期限結構能夠與聯邦資金利率 OIS 有一定的貼近程度，以及 Zucker (2010) 也以類似的方式對 EFR 進行建模，藉由聯邦資金利率期貨 (Federal Funds Futures) 校估聯邦資金利率 OIS 曲線，並且發現以此方法建構出來的 OIS 曲線有著一定的利率預測能力，進而得以據此進行 EFR 相關衍生性商品之訂價以及避險策略。Skov and Skovmand (2021) 則以 Vasicek (1977) 之動態模型描述 Nelson and Siegel (1987) 所提出的利率期限結構三因子，推得三個因子的統計特性後再將因子加入多元迴歸模型 (Multi-Regression Model) 並以最大概似法 (Maximum Likelihood Method) 估計迴歸係數(用以預測未來 SOFR，並將預測的 SOFR 校準到 SOFR 期貨價格上)，最終所估計出的 SOFR 期限結構與 Heitfield and Park (2019) 的實證結果非常一致。

本論文基於 Heitfield and Park (2019) 之模型進行延伸：(1) 假設 SOFR 為一純粹跳躍擴散過程 (Pure Jump Diffusion Process) 下，估計 SOFR 期貨市場所隱含的 SOFR 期限結構 (2) 著重研究 SOFR 期限結構與聯邦資金利率 OIS 之利差變化，探討兩者的相對性質是否具有一致性 (3) 透過不同利率市場環境 (COVID-19 爆發以前及以後) 檢視模型穩健性。

### 第三章 研究方法

#### 第一節 模型假設

SOFR 與 EFFR 皆為隔夜期利率指標，均以前一交易日所交易出來的隔夜利率為基準，取交易量加權中位數即得。兩者不同之處為 SOFR 是以有擔保融資之附買回市場交易利率為計算基準，EFFR 則為無擔保融資之聯邦資金利率市場，兩個市場的最大差別在於主要的市場參與者（聯邦資金利率市場的主要參與者為銀行體系，附買回市場的參與者更廣泛一些，包含銀行、證券商、貨幣市場基金等）。SOFR 除了與 EFFR 同為隔夜期利率外，在 Fed 貨幣政策上也是關鍵的控制利率，因此 SOFR 會與 EFFR 具有相近的走勢。圖 1 為 2018 年 5 月 7 日至 2021 年 9 月 13 日 SOFR 與 EFFR 走勢圖，可以看出 SOFR 及 EFFR 會有定時跳躍性變化的現象，此乃是因為 Fed 在每次 FOMC 會議公布新的利率目標區間以及後續利率政策所造成的變化；雖然 SOFR 的波動度相比 EFFR 要再高一些，但 SOFR 在相鄰兩次 FOMC 會議日期之間的利率水準會保持在一定的區間內。

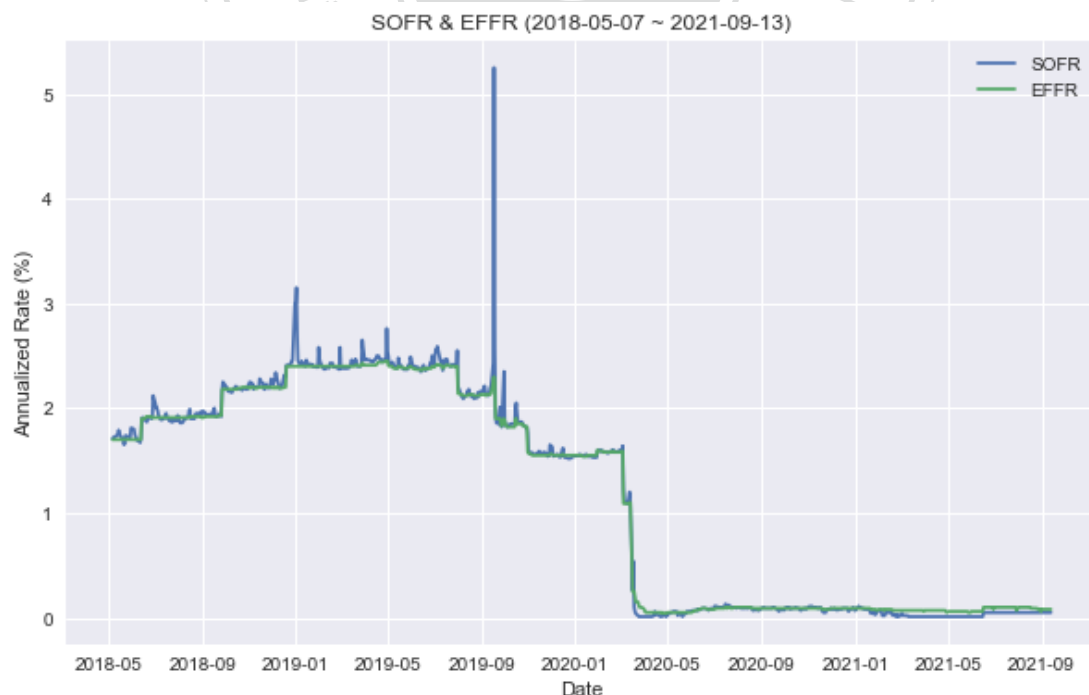


圖 1 SOFR 與 EFFR 歷史走勢圖

因此，本研究假設未來每日 SOFR 為一分段常數函數：(1) 在相鄰兩次 FOMC 會議日之間為常數；(2) 在每次 FOMC 會議後，SOFR 水準會有跳躍性變動。未來每日 SOFR 可由公式(1)表示：

$$f(t; \Theta) = \theta_0 + \sum_k \theta_k \cdot 1_{\{t > M_{(k)}\}} \quad (1)$$

其中， $M_{(k)}$ 代表的是從 SOFR 期限結構估計日 ( $t_0$ ) 開始往未來算起，第  $k$  次 FOMC 會議所對應的日期。 $\theta_0$  為  $[t_0, M_{(1)})$  這段期間 SOFR 水準， $\theta_k$  為第  $k$  次 FOMC 會議後，SOFR 水準之跳躍變化量。 $1_{\{t > M_{(k)}\}}$  為指標函數 (Indicator Function)，當  $t > M_{(k)}$  時，函數值為 1，反之為 0。 $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 。

本篇論文將會透過 FOMC 會議日程表決定 SOFR 跳躍擴散之時點，以及使用於 CME 掛牌交易之 SOFR 期貨價格校估模型參數  $\Theta$ 。

## 第二節 參數校估

### 一、SOFR 期貨契約規格

SOFR 期貨契約掛牌交易於芝加哥商品交易所 (Chicago Mercantile Exchange, CME)，目前分為一個月期期貨及三個月期期貨兩種規格，報價方式均採 IMM (International Monetary Market of Chicago Mercantile Exchange) 指數報價，若期貨契約之標的利率為  $r\%$  (年化)，則 IMM 指數報價為  $100 - r$ 。一個月期期貨及三個月期期貨契約價值計算方式分別為每一個基點 (Basis Point, bp) 相當於 41.67 美元及 25 美元。舉例來說，若有一個三個月期 SOFR 期貨契約之 IMM 指數報價為 98，代表該期貨契約當下之標的利率為  $2\%$  (年化)，而期貨契約價值等於  $\$5,000 (= 200 \times \$25)$ 。



一個月期 SOFR 期貨及三個月期 SOFR 期貨之報價月份(或交割月份)分別為連續 13 個月以及連續 39 個季月(3,6,9,12 月)。假設報價日為 2021 年 10 月 1 日，則一個月期 SOFR 期貨的報價月份(或交割月份)有 2021 年 10 月、2021 年 11 月、2021 年 12 月、……、2022 年 10 月，三個月期期貨的報價月份(或交割月份)則有 2021 年 12 月、2022 年 3 月、2022 年 6 月、……、2031 年 6 月。一個月期 SOFR 期貨及三個月期 SOFR 期貨的最後交易日分別為交割月份之最後一個交易日以及交割月份第三個星期三之前一交易日，交割日則均為期貨最後交易日之後一個交易日(T+1 交割)。

SOFR 期貨之結算價格決定於契約結算窗口 (Settlement Window) 期間之標的利率值。一個月期 SOFR 期貨之結算窗口為交割月份之全部交易日，標的利率為結算窗口期間每個交易日之 SOFR 簡單算術平均值(年化)；三個月期 SOFR 期貨之結算窗口開始日為交割月份(為季月)之前一個季月的第三個星期三，直到此三個月期 SOFR 期貨之最後交易日(與一個月期期貨不同的是，三個月期期貨結算窗口期間之計息日為所有自然日，非僅有交易日)，標的利率為結算窗口期間 SOFR 每日複利值(年化)。以交割月份為 2021 年 10 月之一個月期期貨以及交割月份為 2021 年 12 月之三個月期期貨為例，結算窗口分別為 2021 年 10 月 1 日(星期五)至 2021 年 10 月 29 日(星期五)，以及 2021 年 9 月 15 日(星期三)至 2021 年 12 月 14 日(星期二)。當交易日包含於結算窗口時，該契約稱為近月契約，反之稱為遠月契約，以圖 2 為例，當  $T_1 \leq t \leq T_2$  時，該契約為近月契約，而  $T_2$ (期貨最後交易日)所落在之月份即為交割月份。

近月契約與遠月契約有不同的契約價值最小升降單位，分別為 0.0025 IMM 點(等同 0.25 bp)以及 0.005 IMM 點(等同 0.5 bp)，對一個月期 SOFR 期貨而言相當於價值\$10.4175 ( $= 0.25 \times \$41.67$ ) 及 \$20.835 ( $= 0.5 \times \$41.67$ )；對三個月期 SOFR 期貨而言相當於價值\$6.25 ( $= 0.25 \times \$25$ ) 及 \$12.5 ( $= 0.5 \times \$25$ )。

表 3 SOFR 期貨契約規格

	一個月期期貨	三個月期期貨
標的利率 (結算利率)	結算窗口期間每日 SOFR 之簡單算數平均值	結算窗口期間每日 SOFR 之複利值
報價形式	IMM 報價	IMM 報價
契約價值	1bp = USD 41.67/每合約	1bp = USD 25/每合約
最小升 降單位	<u>近月契約：</u> 0.0025 IMM 點 (0.25bp) <u>遠月契約：</u> 0.0050 IMM 點 (0.50bp)	<u>近月契約：</u> 0.0025 IMM 點 (0.25bp) <u>遠月契約：</u> 0.0050 IMM 點 (0.50bp)
交割 月份	連續 13 個月	連續 39 個季月 (3, 6, 9, 12 月)
最後交易日 及交割慣例	交割月份之最後一個 交易日；T+1 交割	交割月份第三個禮拜三之 前一交易日；T+1 交割

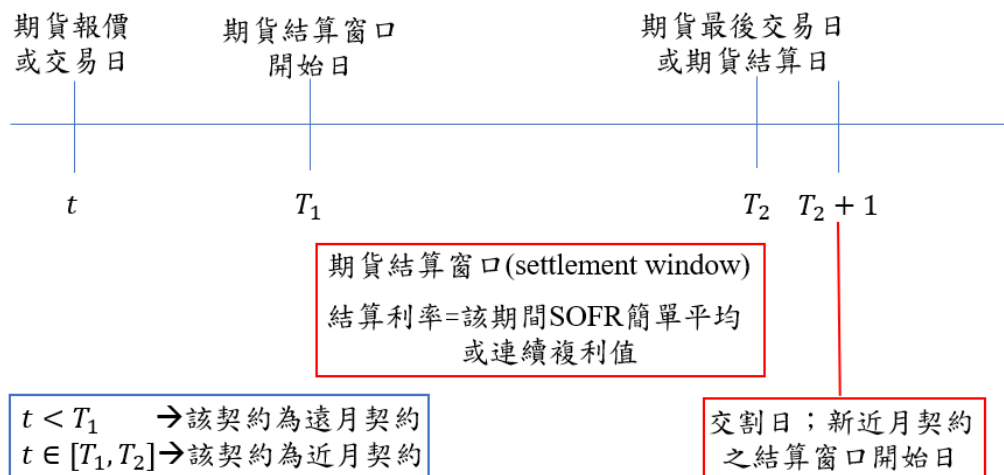


圖 2 SOFR 期貨近/遠月契約、結算窗口示意圖

## 二、SOFR 期貨評價公式

SOFR 期貨定價公式需區分為近月契約以及遠月契約。近月契約又稱為近一契約，意旨所有報價的交割月份中最先到期的交割月份契約。近月契約以外之契約皆稱為遠月契約，而遠月契約中最早到期的交割月份契約稱為次近月契約或是近二契約、遠月契約中第二快到期的交割月份契約稱為近三契約，依此類推。遠月契約理論價值取決於對未來一段時間每日 SOFR 之預期，而近月契約理論價值除了對未來一段時間每日 SOFR 之預期外，也會受到歷史(已實現) SOFR 的影響。如圖 3 所示， $t$  表示交易日，當  $t < T_1$  (契約尚未進入結算窗口，此時為遠月契約)，該契約的價值取決於交易者對  $[T_1, T_2]$  這段時間(期貨契約結算窗口)每日 SOFR 值的預期，然而當  $T_1 \leq t \leq T_2$  (契約進入結算窗口，此時為近月契約)，在  $[T_1, t]$  這段時間的 SOFR 值由原本的預期狀態變成已實現狀態，因此近月契約的理論價值決定於在  $[T_1, t]$  這段時間的已實現 SOFR 值(歷史 SOFR)以及  $[t, T_2]$  (剩餘結算窗口)這段時間每日 SOFR 的預期。

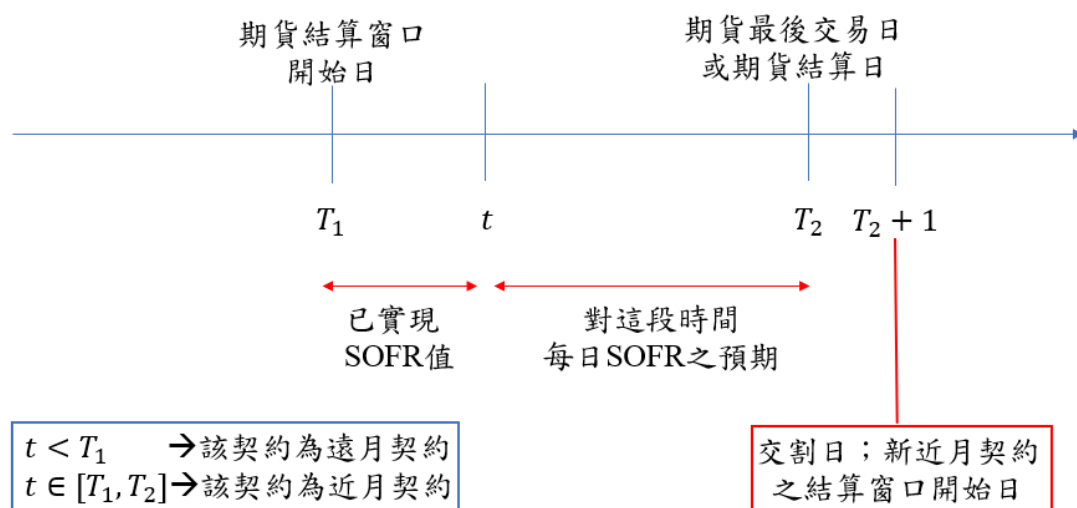


圖 3 SOFR 期貨近月契約價值示意圖

(一) 近月契約(近一契約)

一個月到期與三個月到期的近月契約之評價公式如公式(2)、(3)所示。

$$P_m^1 = 1 - \frac{1}{N_m^1} \left( \sum_{t \in \tau_m^{1-}} s_t + \sum_{t \in \tau_m^{1+}} f_t \right), \quad m = 0 \quad (2)$$

$$P_q^3 = 1 - \frac{360}{N_q^3} \left[ \prod_{t \in \tau_q^{3-}} \left( 1 + \frac{s_t d_t}{360} \right) \prod_{t \in \tau_q^{3+}} \left( 1 + \frac{f_t d_t}{360} \right) - 1 \right], \quad q = 0 \quad (3)$$

其中，符號的上標「1」、「3」分別代表該契約規格為一個月、三個月期期貨。下標「m」、「q」分別代表一個月期及三個月期期貨契約的到期日，「m=0」、「q=0」代表該契約為近月契約(近一契約)。令 $t_0$ 代表 SOFR 期限結構估計日，則 $s_t$ 為站在 $t_0$ 時點下看，於時間 $t$ 之歷史 SOFR； $t \leq t_0$ 。 $f_t$ 為站在 $t_0$ 時點下看，於時間 $t$ 之未來 SOFR； $t > t_0$ 。 $P_m^1$ 、 $P_q^3$ 分別代表 SOFR 期貨價格。 $N_m^1$ 、 $N_q^3$ 代表期貨契約期間之總計息天數。 $\tau_m^1$ 、 $\tau_q^3$ 代表期貨契約期間計息日期集合，其中 $(\tau_m^{1-}, \tau_m^{1+})$ 、 $(\tau_q^{3-}, \tau_q^{3+})$ 為 $\tau_m^1$ 、 $\tau_q^3$ 以 $t_0$ 為切割點之切割時間集合： $\tau_m^{1-} = \{t \in \tau_m^1, t \leq t_0\}$ 、 $\tau_m^{1+} = \{t \in \tau_m^1, t > t_0\}$ 、 $\tau_q^{3-} = \{t \in \tau_q^3, t \leq t_0\}$ 、 $\tau_q^{3+} = \{t \in \tau_q^3, t > t_0\}$ 。 $d_t$ 為每筆 SOFR 之計息天數，且 $\sum_{t \in \tau_m^1} d_t = N_m^1$ 、 $\sum_{t \in \tau_q^3} d_t = N_q^3$ 。

(二) 遠月契約 (近二契約、近三契約...)

一個月到期與三個月到期的遠月契約之評價公式如公式(4)、(5)所示。

$$P_m^1 = 1 - \frac{1}{N_m^1} \left( \sum_{t \in \tau_m^1} f_t \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$P_q^3 = 1 - \frac{360}{N_q^3} \left[ \prod_{t \in \tau_q^3} \left( 1 + \frac{f_t d_t}{360} \right) - 1 \right], \quad q = 1, 2, \dots \quad (5)$$

其中，符號的上標「1」及上標「3」、下標「m」及下標「q」、 $f_t$ 、 $P_m^1$ 、 $P_q^3$ 、 $N_m^1$ 、 $N_q^3$ 、 $\tau_m^1$ 、 $\tau_q^3$ 、 $\tau_m^{1-}$ 、 $\tau_m^{1+}$ 、 $\tau_q^{3-}$ 、 $\tau_q^{3+}$ 為 $\tau_m^1$ 、 $\tau_q^3$ 、 $d_t$ 之定義同公式(2)、(3)。

### 三、參數校估流程

確定未來 SOFR 的跳躍擴散時點以及每個 SOFR 期貨契約的結算窗口期間後，即可基於 SOFR 期貨價格與其評價公式校準模型參數 $\Theta$ 。在給定一組參數 $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 下可得到未來 SOFR 估計曲線 $f_t(t; \Theta)$ (參照第三章第一節(1)式)，將此曲線帶入 SOFR 期貨評價公式，得到 SOFR 期貨估計價格( $\hat{P}$ )，如公式(6)~(9)所示：

$$\hat{P}_m^1(\Theta) = 1 - \frac{1}{N_m^1} \left[ \sum_{t \in \tau_m^{1-}} s_t + \sum_{t \in \tau_m^{1+}} f_t(t; \Theta) \right], m = 0 \quad (6)$$

$$\hat{P}_q^3(\Theta) = 1 - \frac{360}{N_q^3} \left\{ \prod_{t \in \tau_q^{3-}} \left( 1 + \frac{s_t d_t}{360} \right) \prod_{t \in \tau_q^{3+}} \left[ 1 + \frac{f_t(t; \Theta) d_t}{360} \right] - 1 \right\}, q = 0 \quad (7)$$

$$\hat{P}_m^1(\Theta) = 1 - \frac{1}{N_m^1} \left[ \sum_{t \in \tau_m^1} f_t(t; \Theta) \right], m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$\hat{P}_q^3(\Theta) = 1 - \frac{360}{N_q^3} \left\{ \prod_{t \in \tau_q^3} \left[ 1 + \frac{f_t(t; \Theta) d_t}{360} \right] - 1 \right\}, q = 1, 2, \dots \quad (9)$$

其中 $\hat{P}_m^1(\Theta)$ 、 $\hat{P}_q^3(\Theta)$ 為一個月期 SOFR 期貨、三個月期 SOFR 期貨價格估計值。 $f_t(t; \Theta) = f_t$ ，且 $f_t$ 定義同公式(2)~(5)中 $f_t$ 之定義。

藉由極小化期貨估計價格與實際期貨價格之差距，可以得到一組最適化的參數 $\hat{\Theta}$ 。將目標函數以均方根誤差 (Root Mean Square Error, RMSE) 形式表示如下：

$$RMSE = \min_{\Theta} \left\{ \sum_m w_m^1 [P_m^1 - \hat{P}_m^1(\Theta)]^2 + \sum_q w_q^3 [P_q^3 - \hat{P}_q^3(\Theta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \alpha \left[ \sum_k (\theta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

其中 $w_m^1$ 、 $w_q^3$ 為每個不同到期日的一個月期期貨及三個月期期貨契約之加權係數，可以依據每個期貨契約之相對流動性或其他方式(如：相等權重、到期日遞減權重等)賦予不同加權係數；本文中採用的是相等權重 (Equally-Weighting)。

$[\sum_k (\theta_k)^2]^{\frac{1}{2}}$  為限制項，是為了避免在單一 SOFR 期貨結算窗口期間內估計出來的 SOFR 有大幅度跳動的情況；除了可以最大程度平穩化 SOFR 平均水準跳動過程外，設置此限制項也可避免在單一 SOFR 期貨結算窗口期間內估計 SOFR 時，單一期貨價格會對應多組 SOFR 跳動過程的問題。 $\alpha$  為限制項係數，為外生給定。 $P_m^1$ 、 $P_q^3$  為 SOFR 期貨價格觀察值。

### 第三節 SOFR 期限結構計算方式

藉由(10)式估計出最適化參數組 $\hat{\Theta}$ 後，得到未來 SOFR 估計曲線 $f_t(t; \hat{\Theta})$ 。但 $f_t(t; \hat{\Theta})$ 僅是未來一段時間的每日 SOFR 估計值，還需要進一步計算轉換才能得到 SOFR 期限結構。為了更符合實務上利率交易的情況，在計算成 SOFR 期限結構時，會針對計息方式進行調整。

#### 一、計息慣例

##### (一) 非交易日認定

除了週末以外，一般還會有特別節日之非交易日。在本篇論文中認定週末以外之非交易日時採用的是「Nasdaq Holiday Calendar」，與「ICE LIBOR Calendar (以 USD LIBOR 為例)」有些許不同。表 4 及表 5 為 2021 年兩種假日認定方式下所認定的假日日程表：

表 4 Nasdaq 公共假期日曆

日期	假日名稱	當日市場交易狀態
1-Jan	New Year's Day	不交易
18-Jan	Martin Luther King, Jr. Day	不交易
15-Feb	President's Day (U.S.)	不交易
2-Apr	Good Friday	不交易
31-May	Memorial Day (U.S.)	不交易
5-Jul	Independence Day (U.S.)	不交易
6-Sep	Labor Day (U.S.)	不交易
25-Nov	Thanksgiving Day (U.S.)	不交易
26-Nov	Early Close (U.S.)	交易到 13:00
24-Dec	Christmas Holiday (U.S.)	不交易

表 5 ICE LIBOR 公共假期日曆 (USD LIBOR)

日期	假日名稱	當日市場交易狀態(USD)
1-Jan	New Year's Day	不交易
18-Jan	Martin Luther King's Birthday (USD)	無隔夜(O/N)期報價
15-Feb	President's Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
2-Apr	Good Friday	不交易
5-Apr	Easter Monday	不交易
3-May	Early May Bank Holiday	不交易
31-May	Spring Bank Holiday	不交易
5-Jul	Independence Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
30-Aug	Summer Bank Holiday	不交易
6-Sep	Labour Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
11-Oct	Columbus Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
11-Nov	Veteran's Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
25-Nov	Thanksgiving Day (USD)	無隔夜(O/N)期報價
27-Dec	Christmas Day (UK Observed)	不交易
28-Dec	Boxing Day (UK Observed)	不交易

## (二) SOFR 於非交易日之計息

計算 SOFR 期限結構即是在期限結構所在的計息期間，將 SOFR 進行複利計算，在這段期間內若是碰到非交易日的情況，則 SOFR 的計息方式如下(以表 6 舉例說明)：



表 6 SOFR 於非交易日之計息(舉例)

日期	星期	SOFR(%)	應計息天數
2021/2/11	四	0.06	1
2021/2/12	五	0.05	4
2021/2/13	六	非交易日	-
2021/2/14	日	非交易日	-
2021/2/15	一	非交易日	-
2021/2/16	二	0.06	1
2021/2/17	三	0.06	1

如表 6 所示。依據「Nasdaq Holiday Calendar」準則，2021/2/15(一) 屬於非交易日，而 2021/2/12(五) 所公布的 SOFR 為 0.05%，且應計息天數為 4 天，其中應計息天數的計算方式為從 SOFR 公布日算起(包含公布日當天)，直到下一個交易日所經過的實際天數。若一年以 360 天計，該計息規則即為「ACT/360」。

## 二、SOFR 期限結構計算公式

### (一) 決定計息日期區間

在計算期限結構之前，首先需要決定該期限結構所包含的日期區間(或是說，需要先確定每個期限結構的最後計息日之日期)。決定每個期限結構的最後計息日之日期時，依照以下規則推算：

1. 先假設每個月的計息天數均為 30 個自然日。
2. 從 SOFR 期限結構估計日 ( $t_0$ ) 起往未來推算，以此決定不同期限之 SOFR 期限結構的最後計息日。
3. 檢查步驟 2 所推算得到的最後計息日，若為非交易日，則將日期往後順延至最鄰近的交易日；若往後順延至下一個交易日會使得該日期跨越新的交易月份，則改為往前回溯至最鄰近的交易日。
4. 依照調整後的最後計息日，計算期限結構計息區間之總自然日天數  $T$ 。



(二) SOFR 期限結構計算公式：

SOFR 為簡單年化利率，但 SOFR 期限結構為 SOFR 每日複利年化利率，因此需要先將 SOFR 調整為日利率再進行複利計算，得到計息期間的每日複利值後，再除以期間長度(年化)得到 SOFR 期限結構。假設 SOFR 期限結構之計息期間一共有 T 天自然日，則 SOFR 期限結構的計算方式如公式(11)所示。

$$SOFR(T) = \frac{360}{T} \left\{ \prod_{t \in \tau(T)} \left[ 1 + \frac{f_t(t; \hat{\theta}) d_t}{360} \right] - 1 \right\} \quad (11)$$

其中 $\tau(T)$ 為 SOFR 期限結構計息區間之日期集合。

以表 6 數字為例，SOFR 期限結構估計日 ( $t_0$ ) 為 2021 年 2 月 10 日(三)，則一週期 SOFR 期限結構為(計息區間為 2021/2/11~2021/2/17; 一年以 360 天計)：

$$\frac{360}{7} \left[ \left( 1 + \frac{0.06\%}{360} \right)^3 * \left( 1 + \frac{0.05\% * 4}{360} \right) - 1 \right] = 0.05429\%$$

## 第四章 實證分析

### 第一節 使用資料

#### 一、FOMC 會議日期

僅包含例會日期(過去已發生例會之日期,以及 FOMC 對未來一段時間已事先擬定好之例會日程,不包含緊急會議),用以決定 SOFR 跳躍擴散時間點。不包含緊急會議的原因為,於 SOFR 期限結構估計日 ( $t_0$ ) 當天考量未來 SOFR 跳躍擴散發生日期時,所參考的資訊集合應只有在 $t_0$ 時所有的可參考資訊,理論上不應包含對未來預期以外事件之考量,故在此模型中衡量 SOFR 跳躍擴散時點時不包含因非預期因素所造成的緊急會議日(如:為了因應 2020 年初爆發的 COVID-19 疫情所造成的影響,Fed 於 2020 年 3 月 3 日及 2020 年 3 月 15 日召開非例會宣布緊急降息);此外,不考慮非例會日期提供了這套方法下的不穩定因素,可以用來檢視該模型在極端市場狀況下的穩健性。因所考量的 SOFR 期限結構估計日最早為 2018 年 5 月 7 日(同時也是 CME SOFR 期貨正式開始交易之日期),從該日期往後推算的第一個 FOMC 會議日為 2018 年 6 月 12 日,因此所使用的最早例會日期為 2018 年 6 月 12 日;所使用的最晚例會日期為 2023 年 1 月 31 日,乃是基於目前 FOMC 已擬定且發布的最遠期例會日期。

#### 二、SOFR 期貨價格

使用於芝加哥商品交易所掛牌交易之一個月期、三個月期 SOFR 期貨每日收盤價,資料期間為 2018 年 5 月 7 日到 2021 年 9 月 13 日。現今一個月期期貨所報出的交割月份為連續 13 個月,三個月期期貨則為連續 39 個季月(3, 6, 9, 12 月)。然而,在 SOFR 期貨剛開始正式交易時,一個月期、三個月期期貨所報出的交割月份分別僅有連續 7 個月以及連續 20 個季月。為了維持估計 SOFR 期限結構時所使用的期貨價格資料之一致性,一個月期期貨資料均僅使用到最鄰近的

連續 7 個交割月份資料；三個月期期貨資料，因為欲估計的 SOFR 期限結構最長為 1 年，所以皆使用最鄰近的連續 5 個交割季月資料即可(使用近月契約 + 最鄰近的連續 4 個遠月契約，可以確保估計出的未來 SOFR 足夠用來計算 1 年期的 SOFR 期限結構)。

### 三、每日 SOFR 報價

使用紐約聯邦儲備銀行 (Federal Reserve Bank of New York, FRBNY) 所發布之 SOFR 每日資料，資料期間為 2018 年 5 月 1 日到 2021 年 9 月 13 日，用以計算近月契約的部分價值。所使用的歷史 SOFR 資料日期最早為 2018 年 5 月 1 日，與 SOFR 期貨價格資料的最早時間(2018 年 5 月 7 日)不同，是因為在時間為 2018 年 5 月 7 日時，一個月期期貨近月契約之契約開始日為 2018 年 5 月 1 日(直至 2018 年 6 月 1 日，該近月契約到期)，因此計算此近月契約的部分價值時，所使用的歷史 SOFR 要回溯到 2018 年 5 月 1 日。三個月期期貨部分，直到 2018 年 6 月 20 日(該年六月的第三個星期三)才開始有近月契約的報價，在這之前的三個月期期貨只有遠月契約報價，因此所使用的歷史 SOFR 不需要追溯到 2018 年 3 月 21 日(該年三月的第三個星期三)。

### 四、聯邦資金利率 OIS

參考 Datastream 每日 OIS 報價之中間價 (Middle Price)，資料期間為 2018 年 5 月 7 日到 2021 年 9 月 13 日，用來評估所估計出的 SOFR 期限結構之準確度。

## 第二節 實證結果

本研究以 2020 年 1 月 29 日(COVID-19 爆發)作為樣本切分點，將全體樣本(2018 年 5 月 7 日到 2021 年 9 月 13 日)切分為兩段子樣本，以探討 COVID-19

前及 COVID-19 後不同市場狀況下之模型表現。

## 一、模型配適度

表 7 為模型目標函數值之數據統計，函數值皆已化成均方根誤差 (Root Mean Square Error, RMSE) 形式表示。以全部樣本期間來看，平均誤差低於兩個基點，整體而言模型的評價誤差小。從模型 RMSE 平均數、中位數、標準誤來看，在 COVID-19 之後的水準均低於 COVID-19 以前，意即在 COVID-19 後，以此模型估計 SOFR 期限結構的評價結果更好也更穩定。

表 7 模型目標函數值 (RMSE) 之統計(單位：bps)

	平均數	中位數	第 5 百分位數	第 95 百分位數	標準誤	樣本數
全樣本期間	1.53	1.12	0.26	3.86	0.06010	876
COVID-19 前	2.23	2.02	0.87	4.23	0.09194	453
COVID-19 後	0.78	0.43	0.23	2.71	0.06233	423

Fed 接連在 2020 年 3 月 3 日及 3 月 15 日召開會議緊急宣布降息 2 碼及 4 碼，目標利率區間降低至 0%~0.25%，並宣告實行 7000 億美元的量化寬鬆政策 (3/15)，至此美國利率市場就一直維持在低水平低波動的環境(在 COVID-19 爆發以後，SOFR 平均水準從 1.5%~1.6%降至不到 0.1%，SOFR 日標準差在疫情爆發前後分別為 36 bps 以及 4.2 bps)。該研究方法強調的是政府政策對利率平均水準的影響，非著重在模擬標的利率的每日波動，因此在利率波動較低的環境下，該研究方法所假設的 SOFR 函數會更接近現實狀況，所以會有較佳的模型配適度。此結果與 Skov and Skovmand (2021) 之實證結果一致。

圖 4 為全部樣本期間模型 RMSE 變化圖。圖中的兩條垂直線對應的日期分別為 2020 年 1 月 29 日(COVID-19 大爆發)以及 2020 年 3 月 3 日(疫情爆發後 Fed 首次緊急降息)，可以看到在疫情爆發之前模型 RMSE 的波動程度較高，且不定時會有短期飆升的現象。單日 RMSE 增幅較大之日期分為兩類，第一類(單

日增幅最大)的日期有 2018 年 9 月 19 日、2018 年 12 月 18 日、2019 年 6 月 19 日、2019 年 9 月 18 日、2019 年 12 月 18 日、2020 年 3 月 18 日...，第二類(單日增幅次大)的日期有 2018 年 6 月 29 日、2018 年 8 月 2 日、2018 年 9 月 2 日...，這兩類的日期都有一項共通點，那就是皆落在一個月期或三個月期期貨之交割日或結算日，或是落在鄰近交割日或結算日之日期。由此推斷，在臨近期貨契約換約日期時，SOFR 期貨會因為換約交易而產生短期價格大幅波動，以致模型無法捕捉此短期偏離而有較高的模型 RMSE，但偏離的時間最多不超過兩個交易日，可見 SOFR 期貨市場在修正因換約產生的價格偏離時是相對有效率的。

在 2020 年 1 月 29 日到 2020 年 3 月 3 日這段期間 RMSE 明顯上升，說明即便 Fed 尚未召開緊急會議降息，SOFR 即開始大幅波動而直接影響近月契約價值，但市場無法立刻修正未來預期並反映在遠月契約期貨價格上，使得模型 RMSE 在這段期間大幅攀升(在 2020 年 3 月 18 日時高達 35 bps)。此外，在 2020 年 4 月 2 日時，RMSE 從前一個交易日的 2.86 bps 快速降到 0.66 bps，本論文認為是因為恰好到了一個月期期貨近月契約的到期日，由於期貨換約而將價格偏離幅度較大的近月契約替換掉，使得模型 RMSE 顯著降低，並且從此時開始一直維持在 1 bp 以下，且沒有不定時飆高現象。在 Fed 緊急降息後，同時也宣布將會維持零利率直到疫情結束，此時市場對未來一段時間幾乎為「可以確定」之狀態(利率市場低水平、低波動)，並進一步將預期反映在 SOFR 期貨市場上，因此在這段期間模型 RMSE 會較低。

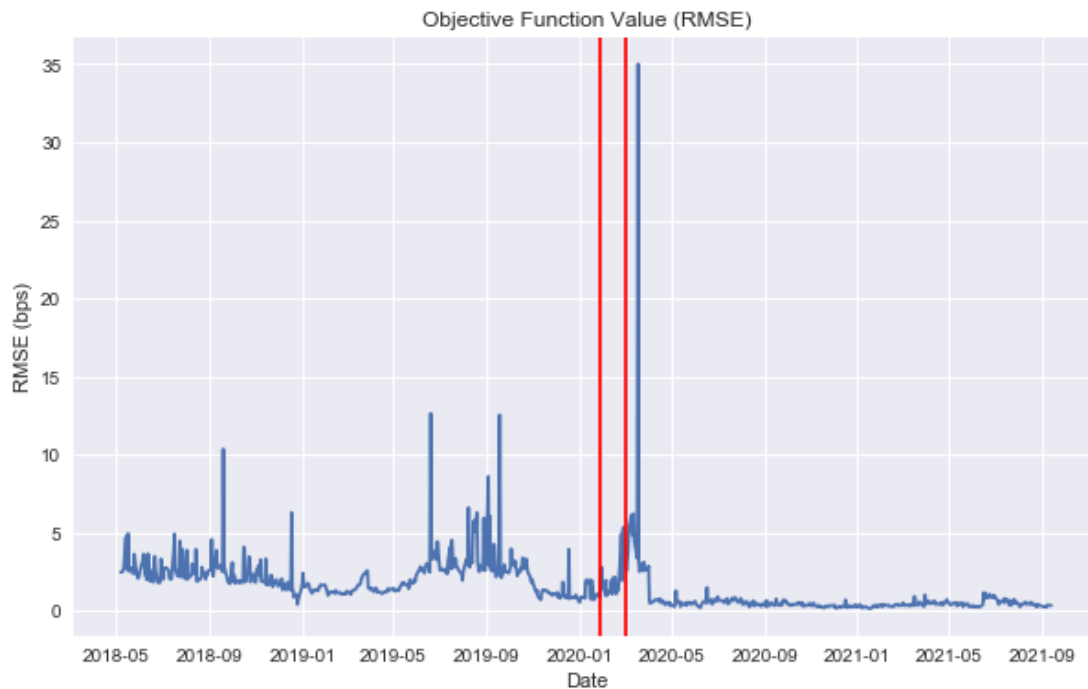


圖 4 模型 RMSE 變化圖(全樣本)

## 二、SOFR 期限結構與 OIS

SOFR 與 EFFR 同為隔夜期利率指標，不僅性質相近，而且有相似的利率走勢與水準，兩者均可以用來作為無風險利率指標。因此，本篇論文選擇 OIS 衡量本研究方法下所估計的 SOFR 期限結構之準確度。此外，SOFR 期限結構與 OIS 之利差 (Term SOFR-OIS Spread) 代表兩種不同的利率市場下所隱含的期限結構之相對風險溢酬 (Relative Risk Premium)，且可以藉由利差變化來分析兩種期限結構的相對性質。

圖 5~8 為全部樣本期間下所估出來的一個月期、三個月期、六個月期、一年期 SOFR 期限結構以及對應期限的 OIS 走勢圖。可以看到估計之 SOFR 期限結構與 OIS 走勢十分接近，且 SOFR 期限結構的波動度也比 OIS 要再高一點，和 SOFR 與 EFFR 之相對性質一致。

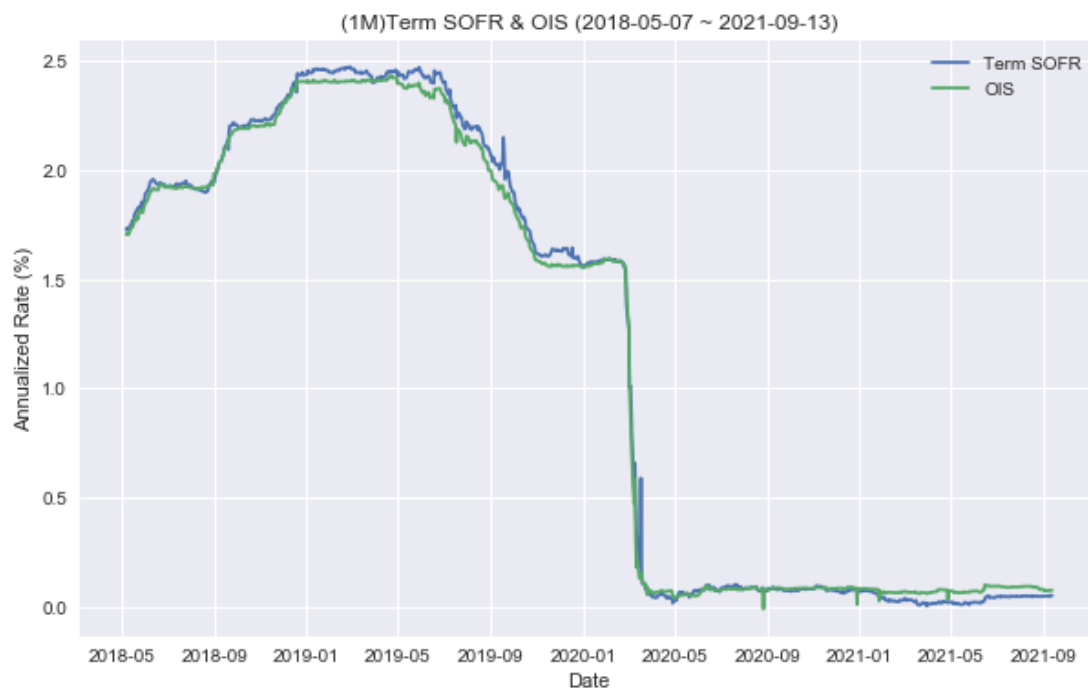


圖 5 一個月期 SOFR 期限結構及 OIS 走勢圖(全樣本)

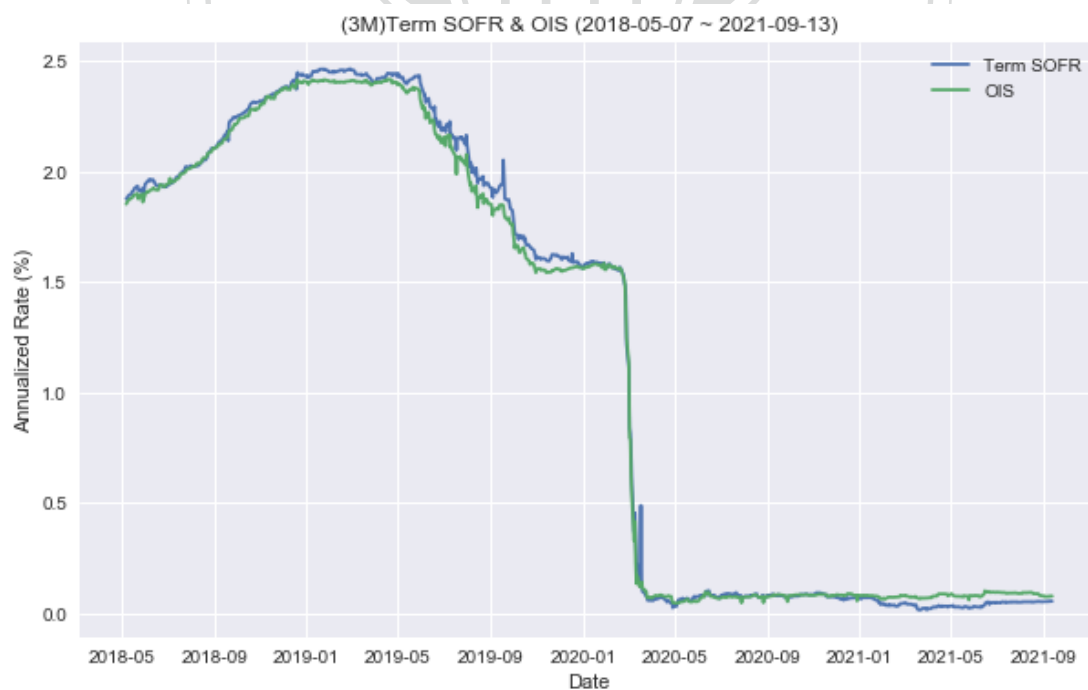


圖 6 三個月期 SOFR 期限結構及 OIS 走勢圖(全樣本)



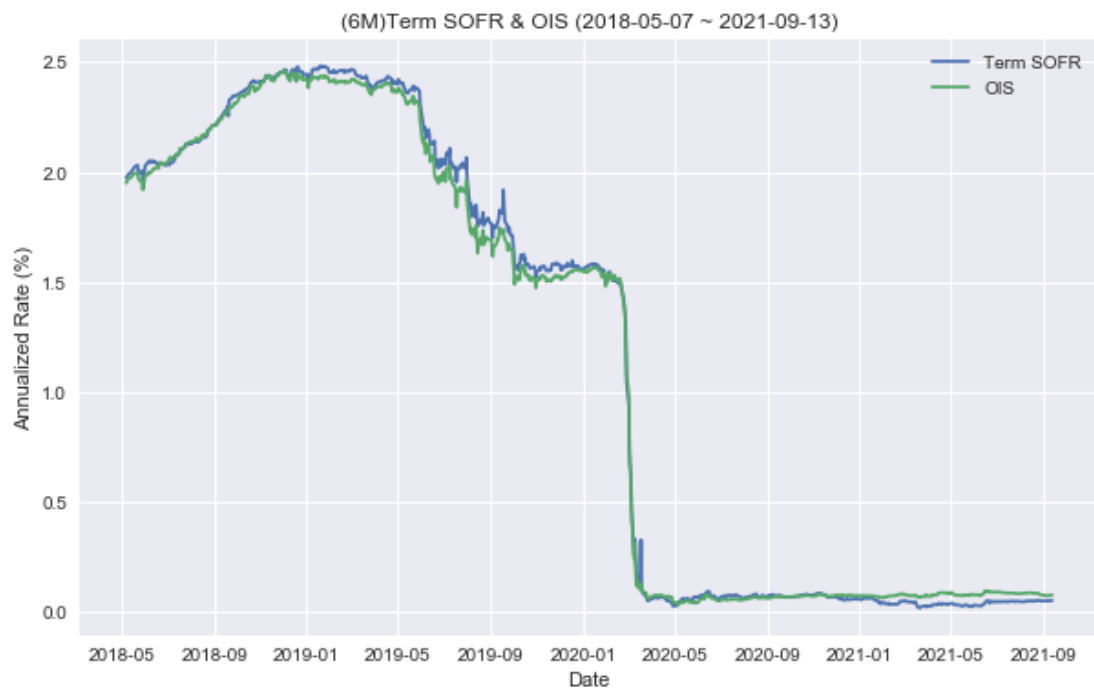


圖 7 六個月期 SOFR 期限結構及 OIS 走勢圖(全樣本)

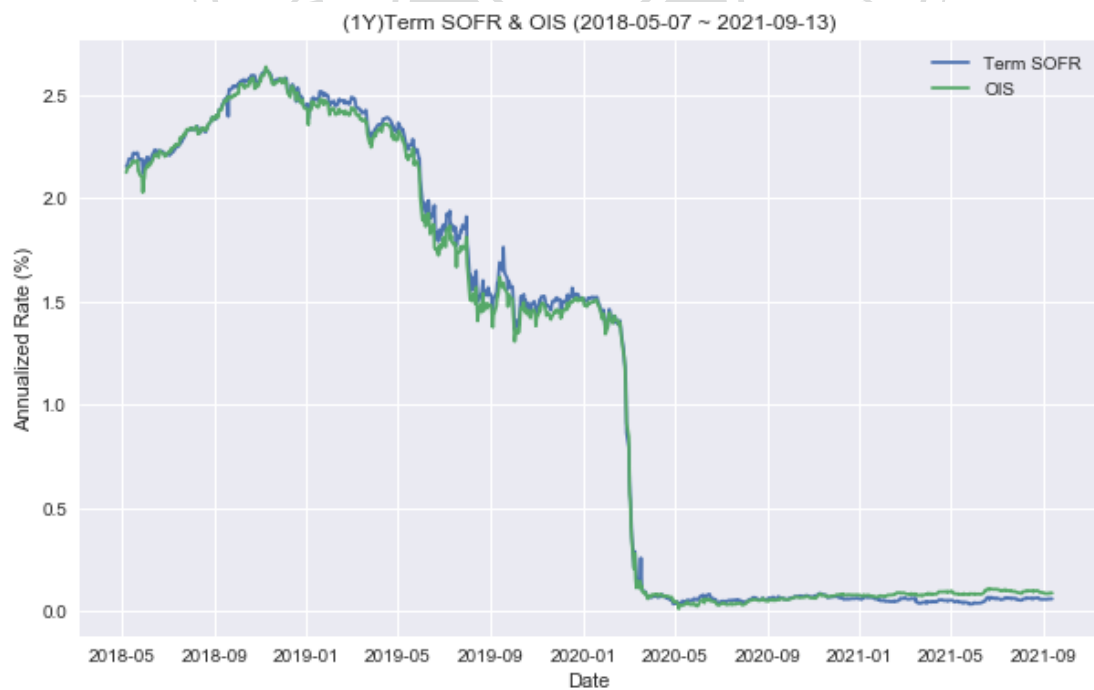


圖 8 一年期 SOFR 期限結構及 OIS 走勢圖(全樣本)



表 8 為 SOFR 期限結構與 OIS 利差之統計(全樣本期間)。以全部樣本期間來看，所有不同期限下的 term SOFR-OIS 利差之平均數及中位數都很接近 0，不同期限下的利差值有 90%會落在約-4~8 個基點。利差之分配具有高度的一致性。

表 8 Term SOFR - OIS 利差之統計(全樣本)(單位：bps)

	平均數	中位數	第 5 百分位數	第 95 百分位數	標準差
O/N	0.63	0.00	-6.00	8.00	11.73
1M	1.29	0.75	-5.15	7.82	4.36
2M	1.28	0.74	-5.01	8.01	4.20
3M	1.26	0.80	-4.89	8.15	4.06
4M	1.28	0.80	-4.82	8.59	4.02
5M	1.29	0.84	-4.68	8.86	3.96
6M	1.29	0.92	-4.58	8.24	3.89
7M	1.29	0.89	-4.45	8.46	3.88
8M	1.27	0.96	-4.42	8.22	3.83
9M	1.27	0.94	-4.38	8.03	3.81
10M	1.27	0.95	-4.26	7.79	3.72
11M	1.23	0.94	-4.22	7.57	3.60
1Y	1.30	1.00	-4.11	7.51	3.57

表 9、表 10 為疫情前以及疫情後 SOFR 期限結構與 OIS 利差之統計，可以看到在平均數、中位數以及百分位數都有較大的變化。在疫情爆發以前，所估計出來的 SOFR 期限結構平均會比 OIS 高出 3~4 個基點，term SOFR-OIS 利差有 90%會落在約 0~9 個基點，表示這段期間 SOFR 期貨所隱含的 SOFR 期限結構水準是比 OIS 來得高的。在疫情爆發以後，利差的平均值、中位數之絕對值小於疫情前之數值，表示所估計出來的 SOFR 期限結構與 OIS 的貼合程度比疫情爆發前來得高，此現象與整體利率水準變化有關(在利率水準極低的環境下，利率的風險溢酬通常很低，以致多數利率水平比較相近)；此外，在疫情爆發以後，所估計出來的 SOFR 期限結構與 OIS 利差之平均值、中位數均由疫情前的正值變為負值。上述結果與 SOFR 和 EFR 在疫情爆發前後之相對水準變化有關：在疫情以前，SOFR 的平均水準高過 EFR，且不定時有短期飆升現象，然而在 Fed 為了因應疫情宣布緊急降息後，SOFR 與 EFR 水準均快速下降，但 SOFR 的跌幅

高過 EFR(SOFR 相對於 EFR 對市場反應更敏感)，以致於在疫情後多數時間都是 SOFR 低於 EFR。

表 9 Term SOFR - OIS 利差之統計(疫情前)(單位：bps)

	平均數	中位數	第 5 百分位數	第 95 百分位數	標準差
O/N	3.25	1.00	-3.00	11.00	15.54
1M	3.92	3.89	-0.28	8.40	3.06
2M	3.86	3.70	-0.21	8.56	3.00
3M	3.84	3.54	-0.24	8.86	2.96
4M	3.85	3.43	-0.42	9.29	3.12
5M	3.81	3.48	-0.51	9.77	3.19
6M	3.76	3.54	-0.84	9.61	3.18
7M	3.71	3.43	-1.07	9.37	3.28
8M	3.65	3.45	-0.86	9.07	3.25
9M	3.61	3.47	-0.91	8.90	3.28
10M	3.58	3.52	-0.94	8.84	3.16
11M	3.48	3.46	-0.91	8.32	3.02
1Y	3.54	3.58	-0.93	8.14	2.97

表 10 Term SOFR - OIS 利差之統計(疫情後)(單位：bps)

	平均數	中位數	第 5 百分位數	第 95 百分位數	標準差
O/N	-2.17	-2.00	-6.00	1.00	3.40
1M	-1.52	-1.24	-5.38	1.93	3.75
2M	-1.49	-1.24	-5.28	1.70	3.48
3M	-1.49	-1.19	-5.13	1.78	3.18
4M	-1.48	-1.22	-5.07	1.59	2.90
5M	-1.41	-1.16	-4.95	1.71	2.75
6M	-1.36	-1.15	-4.87	1.82	2.65
7M	-1.31	-1.09	-4.76	1.81	2.58
8M	-1.27	-1.10	-4.64	1.82	2.56
9M	-1.23	-1.05	-4.60	2.08	2.53
10M	-1.21	-0.97	-4.52	2.03	2.46
11M	-1.18	-0.91	-4.41	1.97	2.43
1Y	-1.11	-0.90	-4.35	2.05	2.40

從歷史 SOFR 走勢來看，在疫情爆發之前，SOFR 較常出現短期性異常飆升的情況 (SOFR Spike)，而造成這些異常飆升的原因是貨幣市場偶爾出現短暫性資金短缺，以及政府或金融機構因為短期平衡資產負債的需要而在市場上短期融資，才造成 SOFR 會有短期飆升的現象，最為人知的即為 2019 年 9 月 17 日的

SOFR 飆升，單日 SOFR 升幅高達 300 個基點，乃是因為當時有多數公司的公司稅繳稅期限在即，同時有大額的政府公債淨發行才造成 SOFR 飆升。疫情爆發後，Fed 在短時間內即召開兩次臨時會議緊急降息，加上宣布自 2019 年 10 月開始的每月 600 億美元購債計畫以及 2020 年 3 月宣布開始的 7000 億美元量化寬鬆政策，使得貨幣市場上的流動資金變多，SOFR 也就變的較不容易因短期性資金短缺而出現飆升情況。

圖 9~圖 12 分別為一個月期、三個月期、六個月期以及一年期 term SOFR-OIS 利差變化圖。四張圖中的兩條垂直線對應的日期為 2019 年 7 月 31 日以及 2020 年 1 月 29 日，分別代表了升息循環結束點以及疫情爆發時點。從圖形中可以發現，四張圖的 term SOFR-OIS 利差均在升息循環時上升、在降息循環時下跌，且在疫情爆發後不久後快速飆升，但很快的又繼續走跌。這樣的現象我們可以從 SOFR 與 EFFR 的基本差異解釋：SOFR 與 EFFR 目前雖然均被視為無風險利率指標，但實際上從 2008 年金融海嘯過後，Fed 量化寬鬆政策使得美國銀行體系到處充斥著超額準備金，傳統的貨幣政策工具(每日進行公開市場操作，試圖藉由影響準備金供給來影響聯邦資金利率)因為金融體系充斥著超額準備金而無法達到效果，且因聯邦資金利率市場的主要參與者為銀行體系，EFFR 無法成為整個金融體系短期利率的有效下限，因此後續 Fed 祭出新的貨幣政策工具，也就是藉由直接設定與 Money Market Mutual Fund Liquidity Facility (MMLF) 進行隔夜附買回交易之利率來直接影響附買回市場，期望以附買回市場之附買回交易利率作為有效短期利率下限。因此，即便 SOFR 與 EFFR 本質相近，SOFR 才是當前 Fed 能夠有效控制的利率指標，同時也因為市場參與者較多且廣泛，其波動程度也高過 EFFR。換句話說，SOFR 相較於 EFFR 對市場變化之反應更加敏感，因此在升息循環時 term SOFR 與 OIS 平均而言會一起上升，但 term SOFR 的變化幅度會高於 OIS，導致 term SOFR-OIS 利差在升息循環段時持續上升；反之，利差則持續下降。此外，Fed 於 2020 年 3 月 3 日及 2020 年 3 月 15 日兩天宣布

緊急降息 2 碼及 4 碼時，term SOFR-OIS 利差短期內不降反升，其原因應該是突然且巨幅的利率政策波動影響了市場預期，大幅度的緊急降息使得市場交易者認為經濟情況快速劣化，因而在進行交易時要求額外的風險溢酬。

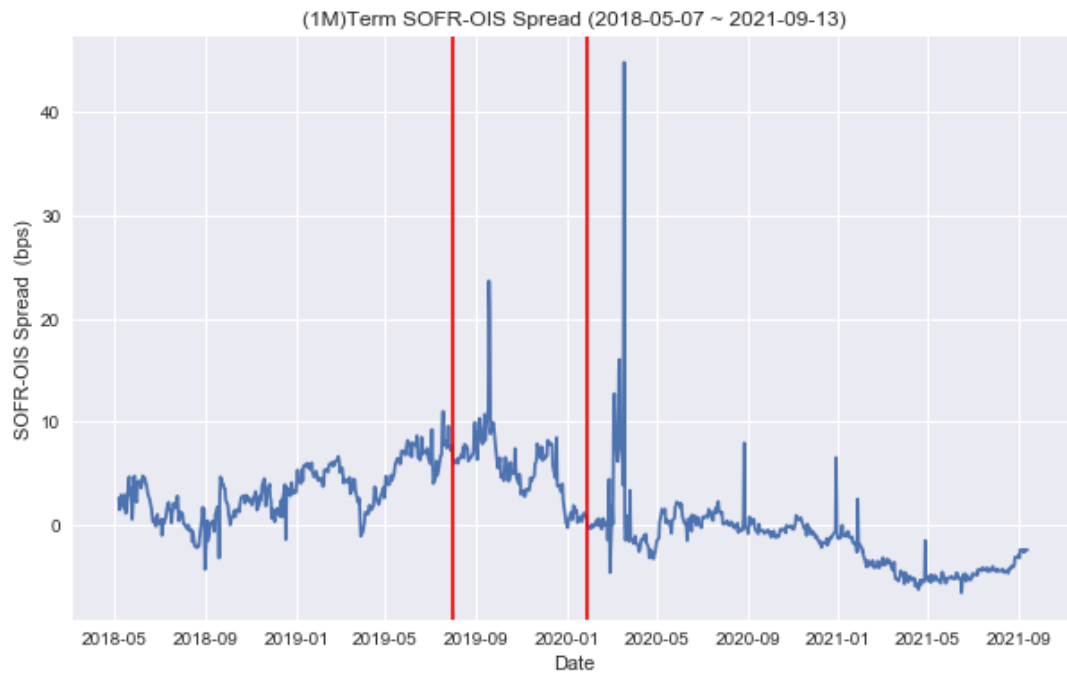


圖 9 一個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本)

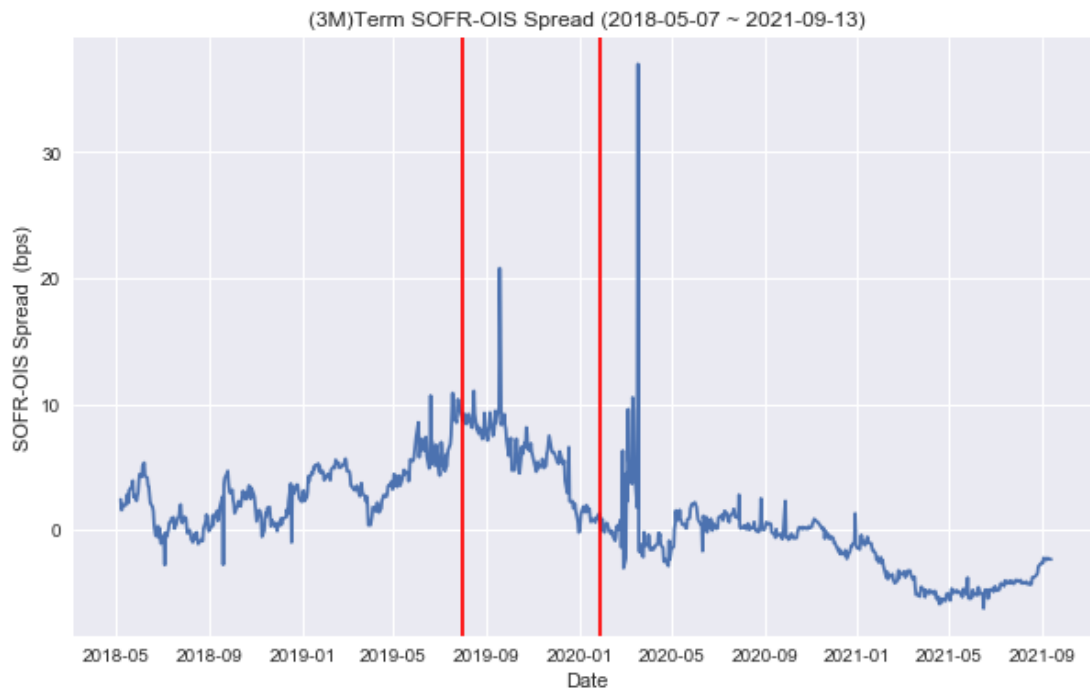


圖 10 三個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本)

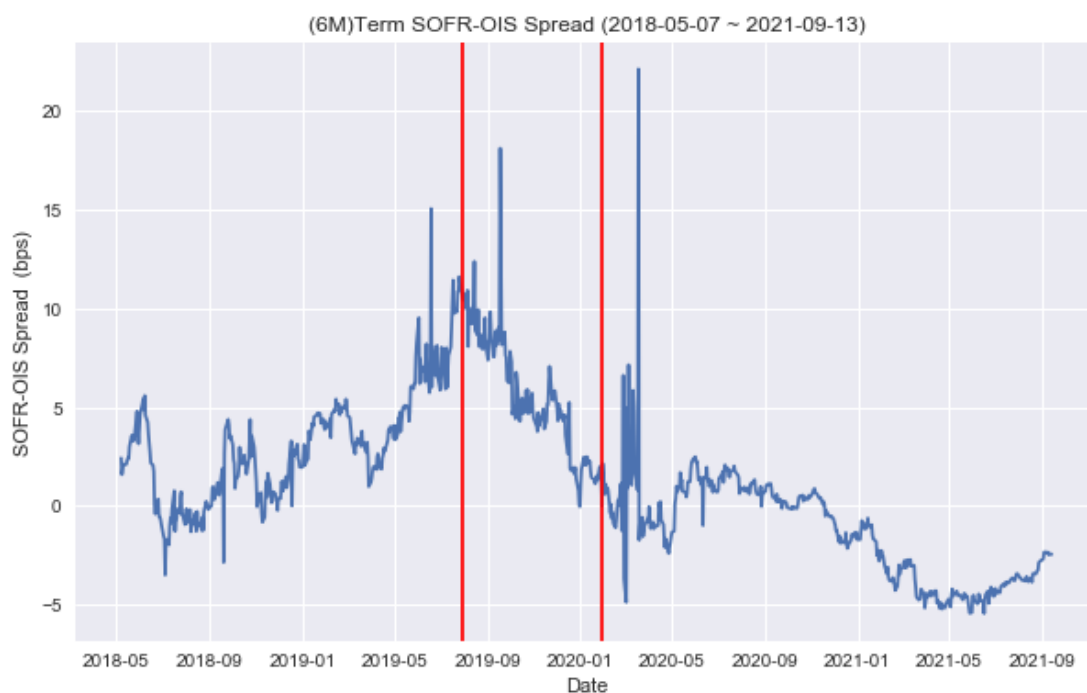


圖 11 六個月期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本)

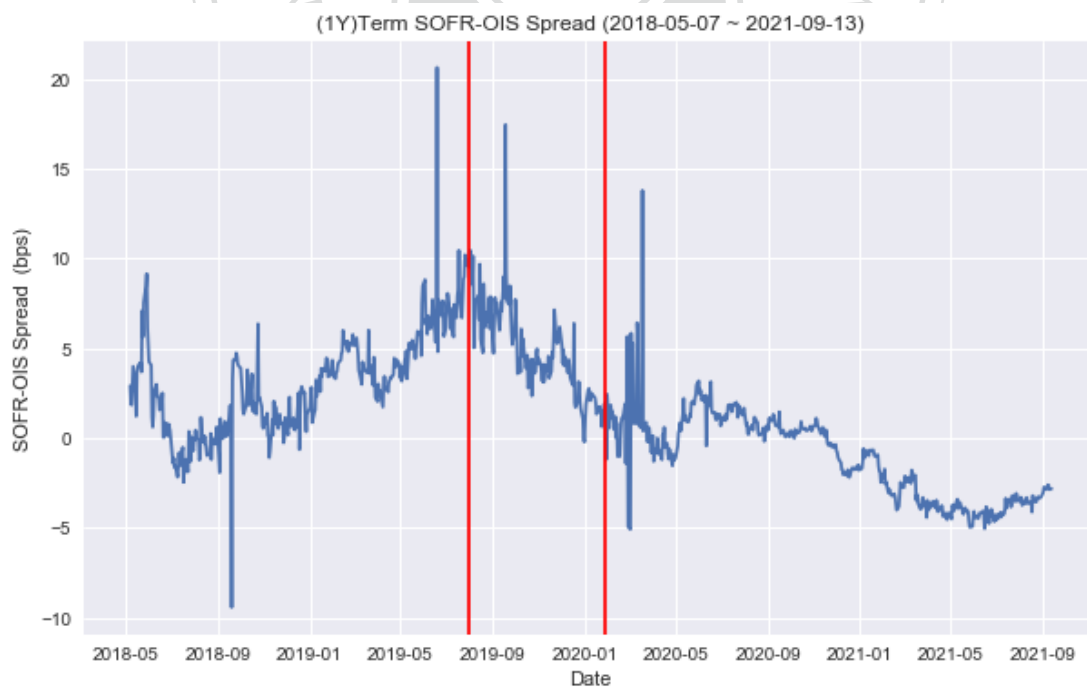


圖 12 一年期 term SOFR-OIS 利差走勢圖(全樣本)

整體來說，在疫情過後的美國利率市場處於低水準低波動的狀態，使得本研究方法所假設的 SOFR 函數更接近現實狀況，因此模型配適度會較佳，且模型 RMSE 在疫情以前的不定時偏離也能由 SOFR 期貨契約換約交易得到解釋。此外，不論是全樣本期間、COVID-19 疫情爆發前、COVID-19 疫情爆發後，不同期限下的 term SOFR-OIS 之利差都能維持在很穩定的區間，且所估計出來的 SOFR 期限結構與 OIS 之相對性質，在不同利率環境下皆和 SOFR 與 EFR 之相對性質一致(term SOFR-OIS 利差之變化和 SOFR 與 EFR 相對大小變化一致)。換句話說，SOFR 期限結構的估計結果能夠反映出疫情前後利率市場的原始特性，捕抓到市場發生結構性改變。



## 第五章 結論與展望

### 第一節 研究結論

本論文基於 SOFR 期貨價格之下，使用一般化方法估計 SOFR 期限結構，可以得到以下三點結論：

#### 一、模型配適度高

不論是在一個月期、三個月期、六個月期或是一年期之下，從圖形上看 SOFR 期限結構與 OIS 都有十分相似的走勢及變化，且從統計表也可以看到不同期限下的 SOFR 期限結構與 OIS 利差都可維持在相近且穩定的區間內。而在臨近契約換約日期時，SOFR 期貨價格因換約交易產生短期大幅波動或不合理的情況，模型無法捕捉此現象使得模型配適度短期大幅偏離，但偏離的時間最多不超過兩個交易日。

#### 二、估計結果一致性程度高

以 COVID-19 疫情爆發前及爆發後作為子樣本測試模型，皆發現在同一利率環境下，不同期限的 term SOFR-OIS 利差都具有相近的水準，且利差的波動程度（或是大部分利差所落在之區間）相當一致。也就是說，不論是全部樣本期間、COVID-19 疫情爆發前、COVID-19 疫情爆發後，不同期限下的 SOFR 期限結構與 OIS 之利差值都能維持在相近且穩定的區間內，表示模型具有一定程度的穩健性質，同時也隱含 SOFR 作為 USD LIBOR 替代利率之穩定性，是一個能符合金融健全性的參考利率指標。



### 三、模型能捕抓市場的變化

從 COVID-19 爆發前後之樣本測試結果可以發現，本模型不僅能捕抓利率市場明顯發生結構性改變，而且 SOFR 短期飆升性質的出現與消失與市場現象一致。在 COVID-19 前的樣本測試結果中，SOFR 期限結構的水準略高於 OIS，本模型捕抓到疫情爆發前 SOFR 市場不定時出現之短期飆升(因此有較高的 SOFR 平均水準)現象。在 COVID-19 後，SOFR 與 EFR 的水準快速下跌，但 SOFR 的跌幅大於 EFR，此一情況導致在疫情爆發後，較長時間內 EFR 均高於 SOFR，本模型所估計的 SOFR 期限結構與 OIS 之相對大小也捕抓到這一市場狀況。本論文所估計的 SOFR 期限結構與 OIS 之相對性質和 SOFR 與 EFR 之相對性質一致，不僅能反映利率的特性，還能證明 SOFR 比 EFR 更能反映利率市場狀況，該實證結果與 Indriawan 等人 (2021) 之實證結果一致。

儘管該方法忽略了 SOFR 每日波動所造成的影響，但假設 SOFR 為分段常數的主要目的在於捕捉貨幣政策變化所造成的較大幅度利率水準變動，且只要 SOFR 在相鄰兩個 FOMC 會議日期之間能夠在特定區間內波動而不發散，那麼將 SOFR 假設為分段常數可以被視為在估計每段區間的平均利率水準。

## 第二節 未來展望

### 一、模型調整與擴充

該研究方法的假設較單純，主要為捕捉 SOFR 的跳躍擴散過程 (Jump Diffusion Process)，且 SOFR 單日波動效果也會隨著 SOFR 期限結構之期間拉長而得到平滑。然而 SOFR 在疫情前確實存在著一定規律的波動規則，如每當臨近期貨近月契約到期日時 SOFR 都會有與前幾個交易日明顯不同的單日波動，因此未來在模型可以加入每月或每季的調整項，這對於短期部位的風險控管尤為重要。



在本研究方法下，因為目標函數是極小化均方誤差的方法，所以如果想把其他 SOFR 衍生性商品之價格納入考量，只要有該衍生性商品價格計算器(價格計算函數)便可快速擴充模型。

在資料使用方面，本論文採用 SOFR 期貨每日收盤價進行評價，但在實務上需要進行盤中交易，因此可使用其他方式調整期貨價格以更好貼近現實狀況。如：使用日內的 tick 資料，藉由系統每日爬取特定時間的逐筆交易資料並進行交易量加權運算，得到交易量加權期貨價格，此作法同時可將 SOFR 期貨市場的每日波動度納入模型考量。

## 二、模型表現評估方法

本研究的研究期間為 2018 年 5 月 7 日到 2021 年 9 月 13 日，子樣本分為 COVID-19 前以及 COVID-19 後。由於 COVID-19 之影響尚未完全結束，無法保證 SOFR 期限結構與 OIS 之間的關聯性不會發生改變。因此更為嚴謹的驗證模型之方法為，以該模型所估計的 SOFR 期限結構對所有 SOFR 衍生性商品進行多天期的評價，並且長時間累積評價誤差資料，然而此部分需要穩定的 SOFR OTC (Over The Counter) 衍生性商品報價來源，或是仰賴未來更成熟的 SOFR 衍生性商品集中交易市場。

## 參考文獻

1. Brace, A., Gatarek, D., & Musiela, M. (1997). The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2), 127-155.
2. CME Group Benchmark Administration Limited. (2021). *CME Term SOFR Reference Rates Benchmark Methodology*.
3. Gellert, K., & Schlögl, E. (2021). Short Rate Dynamics: A Fed funds and SOFR perspective. *FIRN Research Paper Forthcoming*.
4. Gunnarsson, S. (2013). *Curve Building and Swap Pricing in the Presence of Collateral and Basis Spreads*. Master's thesis, KTH, Mathematical Statistics.
5. ICE Benchmark Administration. (2018). *ICE LIBOR Transparency and Benchmark Determinations*.
6. Indriawan, I., Jiao, F., & Tse, Y. (2021). The SOFR and the Fed's influence over market interest rates. *Economics Letters*, 209, 110095.
7. Klingler, S. (2021). Life after LIBOR. *Journal of Financial Economics*, 141(1), 786-801.
8. Krueger, J. T. & Kuttner, K. N. (1996). The Fed funds futures rate as a predictor of Federal Reserve policy. *Journal of Futures Markets*, 16(8), 865-879.
9. Lloyd, S. (2017). *Overnight Indexed Swap Market-Based Measures of Monetary Policy Expectations*. Faculty of Economics, University of Cambridge.
10. Longstaff, F. A. (2000). The term structure of very short-term rates: New evidence for the expectations hypothesis. *Journal of Financial Economics*, 58(3), 397-415.
11. Lyashenko, A., & Mercurio, F. (2019). Looking forward to backward-looking rates: a modeling framework for term rates replacing LIBOR. *Available at SSRN 3330240*.
12. Mercurio, F. (2018). A simple multi-curve model for pricing SOFR futures and

other derivatives. *Available at SSRN 3225872*.

13. Piazzesi, M. & Swanson, E. T. (2008). Futures prices as risk-adjusted forecasts of monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, 55(4), 677-691.
14. Skov, J. B. & Skovmand, D. (2021). Dynamic term structure models for SOFR futures. *Journal of Futures Markets*, 41(10), 1520-1544.
15. The Alternative Reference Rates Committee. (2021). *An Updated User's Guide to SOFR*.
16. Zucker, J. (2010). *Pricing and hedging overnight index swaps: Two possible approaches*. <https://www.numerix.com/pricing-and-hedging-overnight-index-swaps-two-possible-approaches>

