國立政治大學國際經營與貿易學系

碩士學位論文

運用因子投資與懲罰範數建構投資組合：以美國股票市場為例

Constructing Portfolios with Factor Investment Using Norm Penalty Functions: A Case Study of US Stock Markets

指導教授：顏 佑 銘 博士

研 究 生：侯 至 玹 撰

中 華 民 國 一一○年 六 月

DOI:10.6814/NCCU202200219

謝辭

時光飛逝，兩年的碩士生涯將邁入尾聲。這兩年學術與實務上的訓練使我在財務領域上奠定深厚的基礎。在此由衷感激我的指導教授顏佑銘教授，在從碩一期間修習顏老師的財務經濟課後就深受啟發，因此決定以資產配置作為論文的研究主題，感謝在這期間教授不厭其煩地指導我論文方向。感謝郭維裕教授在財務經濟二的課程上帶給我許多關於進階交易策略的想法以及期刊的閱讀訓練，使我對於傳統教科書以外的進階財務領域有更進一步的認識。感謝所有在課堂上認識的同學，正所謂三人行，必有我師焉，與同儕一起討論並從中互相學習的過程無非是我在這兩年中最重要的收穫之一，也是在未來職涯上不可或缺的人脈。最後感謝我的父母盡全力地支持我就讀研究所，使我在學習上可以心無旁鶩。更多的感謝難以一言蔽之，期許自己在未來能「築高牆，廣積糧，安住己心，成就江山」。

侯至玹 謹誌于

國立政治大學國際經營與貿易學系研究所

中華民國 110 年 6 月

DOI:10.6814/NCCU202200219

中文摘要

根據 Singer and Beebower (1991)的研究，資產配置策略對於投資組合的報酬績效貢獻高達 90%，因此藉由不同之建構投資組合的方法尋找資產的最適權重分配一直是投資人所關心之重要課題。在過往的資產配置中，股票和債券等資產一直是多元化投資組合的主要基石，然而自從 2008 年美國次貸危機爆發後，許多金融資產遭到投資者嚴重的拋售壓力，導致各類資產普遍下跌的現象，金融資產之間的相關係數上升，學界開始研究是否可以使用因子類比金融資產作為投資組合的建構，降低投資組合內標的間的相關性。

本文研究亦從此出發，從權威性金融期刊中挑選出因子，使用懲罰函數結合平均數-變異數投資組合法，形成加權範數最小變異數投資組合；並運用十個績效指標來衡量加權範數最小變異數投資組合與其他三種標竿投資組合的表現。

中文關鍵詞:因子投資、最小變異數投資組合、加權懲罰範數

DOI:10.6814/NCCU202200219

Abstract

According to the research of Singer and Beebower (1991), asset allocation strategy contributes about 90% to the return performance of the investment portfolio. Therefore, finding the optimal weight distribution of assets through different methods of constructing investment portfolios has always been an important issue for investors. In the past asset allocation, stocks and bonds have always been the main points of diversified investment portfolios. However, since the outbreak of the U.S. subprime mortgage crisis in 2008, many financial assets have been under severe selling pressure from investors. With the phenomenon that assets are generally falling, and the correlation between financial assets has risen, researching whether factors can be used as financial assets as the construction of investment portfolios to reduce the correlation between investment portfolio internal assets.

The essay selected factors from authoritative financial journals, using norm penalty function combined with mean-variance portfolio method to form the Weighted-Norm Minimum Variance Portfolio (WNMVP) portfolio, then using ten performance indicators to measure the performance of Weighted-Norm Minimum Variance Portfolio and the other three benchmark portfolios.

Keywords: Factor Investment, Minimum Variance Portfolio, Weighted-Norm Penalty

DOI:10.6814/NCCU202200219

目次

DOI:10.6814/NCCU202200219

表次

DOI:10.6814/NCCU202200219

第一章 緒論

第一節 研究動機

如何建構出優於大盤績效的資產配置一直以來都是學術界與金融業相當受到重視的議題。從最初的 Markowitz (1952)的效率前緣(Efficient Frontier)又稱平均數變異數最佳化理論 Mean-Variance Optimization(MVO)，開啟了現代投資組合理論基礎，接著以效率前緣的概念為基礎下，延伸出資本定價模型(Capital Asset Pricing Model, CAPM)，以上理論為金融與財務經濟領域立奠定了重要的里程碑。

在資本定價模型中，發現資產的報酬主要可以歸因於承擔系統性風險與非系統性風險所獲得的報酬，市場風險因子為主要的報酬來源。然而後續有研究發現市場風險因子並不能解釋所有的報酬差異，且小型股與價值股有市場風險因子不能解釋的 Alpha，市場是否真正有效率的質疑聲浪在學術界發散。Fama and French (1993) 在這時提出了三因子定價模型，由原先的單因子模型，加入公司規模和淨值市價比，藉此來解釋股票的橫斷面報酬，而 Jegadeesh and Titman (1993) 和 De Bondt and Thaler (1985) 也在後續提出價格動能因子，利用過去的股價表現所形成的動能策略。縱貫整個因子投資的發展歷史，可以發現到許多學者嘗試尋找能預測未來期望報酬率的因子，同時也以此來探討整個市場的效率性。

在過往的資產配置中，股票和債券等資產一直是多元化投資組合的主要基石。然而自從 2008 年美國次貸危機爆發後，不少的金融資產遭到投資者的嚴重拋售壓力，導致各類資產普遍下跌的現象，金融資產之間的相關係數突然上

DOI:10.6814/NCCU202200219

升。為了增強多元化以應對下一次金融危機對於資產間連動的影響，許多學術界與實務界開始尋找其他解決方案。

Clarke, de Silva, and Murdock (2005)和 Page and Taborsky (2011)的文獻中表示，相比股票、債券等不同類別的資產，市場風險因子或許能夠再加強投資組合的多樣化。其中的概念為找出能夠提高收益的風險因子，使投資組合獲取更高報酬。例如房地產和高收益資產在股票 Beta 和利率上都有正相關，這兩類重要的因子都決定了投資組合的變異數和預期報酬，因此使用因子方法可以針對這些常見的風險因子設定投資目標，然後再根據這類因子賦予資產配置權重以獲得最佳曝險。本研究將延續前述的概念，以美國市場資料為樣本來源，挑選在各類頂尖期刊所發表的重要因子，並解出這類因子在各類資產配置理論的權重，檢視各類投資組合績效。

第二節 研究目的

本研究將各類因子運用在不同的投資組合策略上，例如最小變異數投資組合、1/N 法等。針對歷來學者對最小變異數投資組合因資產數目過大以及稀疏性不高造成其估計誤差擴大而降低投資組合的報酬與正確性之問題，使用優化過後的 Yen(2015) 「加權範數最小變異數投資組合」，挑出所欲配置的因子並給予其最適之權重，以建構風險最小的投資組合。

最後，除了比較最小變異數投資組合在資產配置的應用以外，本研究亦將分析文獻中出現過的論述與方法是否同時適用於因子上，例如在加權範數最小變異數投資組合加入指定的要求報酬率對績效的影響、使用替代參數的可行性等。期許在過往各類賦予金融資產權重的投資組合理論中，針對因子賦予權重的方法能夠強化投資組合的多樣性與績效，並得以在實務上運用。

DOI:10.6814/NCCU202200219

第三節 研究架構

本研究共分為五章，各章摘要如下:

第一章 緒論

介紹本研究背景、動機與目的，作為後續章節之引導，並使讀者能快速了解全文概念。

第二章 文獻回顧

闡述因子投資理論與投資組合理論之起源，並援引曾針對因子投資與投資組合作文獻之簡易比較以供參考。

第三章 研究方法

首先說明本因子的挑選，再介紹加權懲罰範數與替代懲罰範數的概念，最後探討因子與投資組合的建構方法。

第四章 實證分析

詳述本研究所使用之資料，再逐一介紹投資組合比較績效的指標，最後分析使用該資料所得出之實證結果，並繼續向下延伸，加入其他條件進一步作分析，以及驗證前一章所提及替代參數之適用性。

第五章 結論與建議

針對本研究之實證結果歸納結論並提出該研究架構下未來發展之方向或修改建議。

DOI:10.6814/NCCU202200219

第二章 文獻探討

第一節 因子投資理論回顧

資本資產定價模型(CAPM)是現代金融模型裡最重要的模型之一，該模型可從資產的系統性風險計算資產的預期報酬，評價投資組合表現。此模型是建立在Markowitz 於 1952 年提出平均數-變異數投資組合模型的基礎之上。CAPM 模型和效率市場假說(efficient market hypothesis, EMH)認為在充分分散的投資報酬都可以用市場因子來解釋，市場因子足夠表示橫斷面預期報酬的變化。然而，實際上資產報酬率並不能完全由市場風險來解釋，因此，Ross(1976)建立了套利定價理論(APT)，以放寬 CAPM 模型的假設，並認為風險資產的報酬可用多個風險因素來解釋。最經典的因子模型是 Fama and French(1992)提出的三因子模型，由市場因子、規模因子和帳面市值比因子來解釋風險資產報酬。

Charthart 於 1997 年建立了四因子模型，該模型是在 Fama and French 的三因子模型的基礎上加上動能因子，對於市場上的趨勢效應所帶來的報酬給予很大的解釋力。後期由於許多學者針對三因子模型進行實證分析，發現三因子模型中，有些股票的未被解釋的因子 α 顯著不為零，這說明三因子模型當中的因子不能解釋所有超額報酬。Fama and French 後來發現公司的投資策略和獲利能力視為影響超額報酬的因子，投資策略是用企業的資產增長率與先前年度的總資產比值表示，獲利能力則是用股東權益(ROE)表示，最後將其加入三因子模型中建構出五因子模型，於 2015 年發表相關的論文，該模型可以解釋大約 72% - 75%的風險資產的預期報酬。

長期以來，投資標的多元化一直是一種流行的安全策略，但是如果所選投資標的與市場同步發展，多元化的績效就會喪失。因此，學術界不斷地嘗試找出

DOI:10.6814/NCCU202200219

因子來加強投資組合的多元化，創造高於市場的報酬並有效管理風險，例如在 Asness, Fraxxini, and Pedersen(2014)的論文中，考慮高股利等因子去建構新一套的投資策略，該做法即現行的因子投資策略。

DOI:10.6814/NCCU202200219

第二節 資產配置理論回顧

Singer and Beebower(1991)針對美國許多大型基金，分析影響其績效的因素，實證結果顯示資產配置的影響最大，該因素解釋 91.5%的基金報酬變異，因此該如何在各個資產中進行報酬和風險的取捨形成資產配置以達到適當的報酬績效一直是投資市場上的難題。

Harry Markowitz (1952)的文章中提出現代投資理論(Modern Portfolio Theory, MPT)，即平均數-變異數最佳化理論(Mean-Variance Optimization, MVO)。該模型的核心思想為基於投資者是理性的情況下，在相同的期望報酬下會選擇最小風險的投資組合；或者是在相同的風險下會選擇期望報酬最高的投資組合，即投資者追求的是風險低且高報酬的投資組合。Tobin (1958)年提出將此模型加入無風險資產，無風險資產的延伸線與 Markowitz 效率前緣的切點處形成連線即納入無風險資產後有效的投資組合；接者投資者會依照資金分離定理兩步驟得出最適投資組合。

Markowitz 所提出的效率前緣理論在應用上需使用樣本估計平均數(means)跟共變數(covariance)，該方法在實際應用上有以下幾個問題：(1)樣本估計的平均數會產生誤差，估計出的預期報酬率對投資組合的表現有落差。(2)Merton (1980)、Michaud (1989)認為在沒有限制式、投資人效用極大化的條件下，模型對輸入的參數相當敏感，模型參數微小的變動會對投資組合權重有極大的影響力，使模型穩健不佳，實務操作上原本事前有效的投資組合會失去有效性。(3)權重太偏重於某些資產，風險分散效果有限。(4)模型事後風險不易控管，忽略掉各個資產的風險貢獻度。

最小變異數法(Minimum Variance)在 1960 年代後逐漸熱門。Merton (1980)於發表文章中表示，預估報酬的平均數在估計上的難度較資產報酬共變數的估計

DOI:10.6814/NCCU202200219

高且預估報酬誤差的影響力比資產報酬共變數之誤差來得大。Chow, Hsu, Kalesnik, and Little (2011)認為該模型只需要資產間共變異數矩陣資料，不需要估計預期報酬率，其主要目的為極小化事前投資組合風險。使得雖然平均數−變異數法所建立的投資組合雖然較為周全，但其在操作上的不易與居高不下的誤差影響大，因此實證上最小變異數的方法使用率較平均數−變異數法來的高。

N 分之一法則又稱均等權重 (Equally-Weighted, EW) 投資組合，該方法是將各類資產依照資產數平均分配權重，在執行上不需要加入任何的參數估計，Bernartzi and Thaler (2001)，Windcliff and Boyle (2004)的論文指出均等權重法在樣本外的表現相當優異，因此在實務上非常受一般大眾歡迎。Chaves, Hsu, Li, and Shakernia (2011)認為該方法在美股和全球股市建構投資組合上有非常好的表現，特別是在牛市多頭時，均等權重法績效容易優於其他投資組合，但在熊市空頭時，假設資產間的相關係數偏高的情況下，各類資產走向一致造成投資組合損失慘重，投資組合較無避險的考量，風險控制不易造成投資組合的曝險過大。

由於 MPT 模型在實際運用上有(1)配置過於集中(Black and Litterman, 1992)、(2)對輸入參數過於敏感(Best and Grauer, 1991) (3)估計參數誤差過大(Michaud, 1989)等問題，使得該模型在市場上並未得到青睞。特別是投資組合內資產的權重非常不穩定，只要資產的預期報酬稍微地變動，就會對資產的權重有大幅的影響，例如我們將投資組合內的某一資產在預期報酬增加 0.1%，該資產的權重可能會增加約 10%，且資產的權重也會過度集中在過去表現好的資產中，使投資組合分散性降低。此外，過多的資產數目會造成所須估計的模型參數的數目變得非常大，在不足樣本的情況下會照成模型精準度下降；為改進此缺點在投資組合權重中加入懲罰範數 l_1，在 MPT 的架構下透過將資產數目減少形成最

DOI:10.6814/NCCU202200219

佳投資組合。然而降低資產數目的方法會使投資組合的過度集中在部分資產，同樣會有分散風險較低的現象。因此為解決這兩個問題，Yen (2015)提出加入 l_2 的平方，可以同時降低投資組合中的資產數目和資產的過度集中，即增加投資組合的稀疏性，該方法在數學上稱做加權泛數懲罰函數法(weighted norm penalty function)。文章中顯示，投資組合的資產數目過大時，此方法所建構的投資組合能改善估計誤差的問題且績效大多能夠超越由其他策略投資組合績效。

第三章 研究方法

第一節 因子的篩選

在因子投資中，採納 Andrew Y. Chen＆Tom Zimmermann (2020)所發表的論文中的股票報酬因子，該論文搜集過去所有學術論文中影響美國市場股票因子的資料，並建立橫斷面報酬的開放式的資料庫。文章中針對 Fama and French (2015)的五因子模型、Jegadeesh and Titman (1993)價格動能因子和 De Bondt and Thaler (1985)、Jegadeesh (1990)反轉策略因子進行 1970 年至 2019 年的美國股票市場回測。

Fama and French (2015)的五因子模型中，分析市場因子、獲利能力、市值規模、投資策略和公司帳面市值比這五個因子。首先，先將美國上市公司依據五項因子進行特徵等級標示；獲利能力以年收入減去銷貨成本與利息費用和管銷費用作為指標，由小至大排序，前 30%標示為弱獲利能力(W)，後 30%標示為高獲利能力(H)，其餘標示為中等獲利能力中(N)；市值規模等以計算年度最後交易日收盤價乘以流通在外股數作為指標，整體市值排序中位數為分界點，高於中位數標示為大規模(B)，反之為小規模(S)；投資策略以總資產成長率作為指標，由小到大排序，前 30%標示為保守型投資(C)，後 30%標示為積極型投資

DOI:10.6814/NCCU202200219

(A)，剩下標示為中立型投資(I)；帳面市值比以計算年度前年公司帳面價值除以市場價值作為指標，整體帳面市值比中位數為分界點，前 30%標示低(L)，後 30%標示為高(H)，剩下的標示為中(N)。

一、市場因子之計算

市場因子以 $R_{M,t} - R_{F,t}$ 表示，其中$R_{F,t}$為無風險月報酬利率；$R_{M,t}$為市場投資組合之月報酬率，採用 S&P 500 股票指數月報酬率，計算方式如下：

$$R_{M,t} = \frac{P_{M,t} - P_{M,t-1}}{P_{M,t-1}}$$

其中$P_{M,t}$為第 t 期的 S&P 500 股票指數， $P_{M,t-1}$為第 t-1 的 S&P 500 股票數。

二、市值規模因子(SMB)之計算

首先以市值規模與帳面市值比(B/M)組成 BL、BN、BH、SL、SN、SH、六種樣本類型，舉例來說，組合為市值規模大的公司和帳面市值比低的公司所組成的樣本為 BL，其餘組合依此類推。因此，公司樣本的規模因子($SMB_{B/M}$)組合為每月小規模投資組合與大規模投資組合報酬率之差如下:

$$SMB_{B/M} = \frac{SH + SN + SL}{3} - \frac{BH + BN + BL}{3}$$

接續再以市值規模與獲利能力(Prof)分別組成 SW、SF、SR、BW、BF、BR 樣本組合；以市值規模與投資策略(Inv)分別組成 SC、SI、SA、BC、BI、BA 樣本組合。分別計算樣本組合公司規模因子如下:

DOI:10.6814/NCCU202200219

$$SMB_{Prof} = \frac{SW + SF + SF}{3} - \frac{BW + BF + BR}{3}$$

$$SMB_{Inv} = \frac{SC + SI + SA}{3} - \frac{BC + BI + BA}{3}$$

規模風險因子(SMB)為上述三式的算數平均:

$$SMB = \frac{SMB_{B/M} + SMB_{Prof} + SMB_{Inv}}{3}$$

其他三個因子的計算方式如下:

三、帳面市值比因子(HML)之計算

$$HML = \frac{SH + BH}{2} - \frac{SL + BL}{2}$$

四、獲利能力因子(RMW)之計算

$$RMW = \frac{SR + BR}{2} - \frac{SW + BW}{2}$$

五、投資策略因子(CMA)之計算

$$CMA = \frac{SC + BC}{2} - \frac{SA + BA}{2}$$

其他四種因子，分別選定 Jegadeesh and Titman (1993)的 6 個月和 12 個月的動能策略因子以及 De Bondt and Thaler (1985)、Jegadeesh (1990)的 36 個月和 1 個月的反轉策略因子去建構。

在 Jegadeesh and Titman (1993)的價格動能策略中以月報酬資料做為統計，建構上主要分成兩個部分，第一個部分為投資組合形成期，該部分主要是選出 3、6、9、12 個月期間報酬率最佳的前 10%的投資標的，以均等權重的方式買入，即贏家組合；另外再選出 3、6、9、12 個月期間報酬率最差的 10%的投資

DOI:10.6814/NCCU202200219

標的，以均等權重的方式建立放空部位，即輸家組合。第二個部分為投資組合持有期間，該部分為將投資組合分別持有 3、6、9、12 個月，計算期間內的報酬率。因此，投資組合的形成期與持有期兩部分將可形成 16 種不同期間的投資組合，並且每個月進行投資組合標的權重平衡(rebalance)，此法即價格動能策略。

反轉策略因子中，De Bondt and Thaler (1985)以美國股市月報酬數據為樣本，建構上主要分成兩部分，第一個部分為投資組合形成期，在不同的形成期間中，以累積報酬最高的 35 家公司做為贏家組合，累積報酬後 35 家公司的做為輸家組合。第二部分為投資組合的持有期間，在測試期間以累積報酬評判標準，觀察贏家組合與輸家組合的累積報酬率的變化。反轉策略股價認為投資人對於消息面（例如公司盈餘）的反應過度，使股價暫時偏離公司基本面價值，未來預計會產生反轉的現象，因此以累積報酬表現較差的公司建構投資組合賺取均值回歸的機會，此法反轉策略。

第二節 加權範數最小變異數投資組合

投資組合理論在 Markowitz 的最小變異數理論後不斷地發展，對投資組合加入不同的參數模型、限制和策略等創新研究也不斷出現。以下針對 Yen (2015) 論文針對最小變異數投資組合的權重施加加權的 l_1 和平方後的 l_2 泛數懲罰以提高投資組合的樣本外報酬和稀疏性的優化的實證研究訪法進行論述。

加權泛數懲罰函數法在數學上的定義如下：

$$min\ w^T \sum w + \lambda_1 \parallel w \parallel_1 + \lambda_2 \parallel w \parallel_2{}^2$$

$$\text{subject to } Aw = u$$

DOI:10.6814/NCCU202200219

其中 w 為 N×1 投資組合權重向量;

$\sum$ 為 N×N 資產報酬(或超額資產報酬)共變異矩陣;

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{iN}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Ni}^2 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}, i = 1, 2, ..., \mathrm{N}$$

λ_1與 λ_2為大於 0 之實數懲罰參數;

$\| w \|_1$ 為 l_1 範數懲罰函數;

$\| w \|_2{}^2$為 l_2 平方範數懲罰函數。

$\| w \|_1 := \sum_{i=1}^{N} |w_i|$;

$\| w \|_2{}^2 := \sum_{i=1}^{N} w_i{}^2$。

Aw = u 代表著 k 個在投資組合權重的線性限制，dim(A)=k×N , dim(u)=k×1

上述數學式定義目標函數結合投資組合的標準差與懲罰函數的權重，且該式受到線性條件限制，並由 l_1 範數懲罰函數與 l_2 平方範數懲罰函數組合而成，我們把加入的懲罰函數稱作加權懲罰範數函數(Weighted-Norm Penalty Function)。式中若把 l_1 範數懲罰函數與 l_2 平方範數懲罰函數移除，即為 GMVP。

針對線性限制條件部分，本研究將分做要求高目標報酬、要求低目標報酬和未要求報酬三個部分去求解。要求特定目標報酬之投資組合，其限制期望報酬應達到 $uTw = wTu = \bar{u}$，u 為 N×1 期望資產報酬向量矩陣，$\bar{u}$ 則為所要求之期望投資組合報酬率。

DOI:10.6814/NCCU202200219

本論文透過 Yen and Yen (2014)所提出方法，對 WNMVP 進行最適化求解；在樣本外的測試上採取擴大視窗法(window length of the expanding window scheme)，即 $\tau_0 = N$，以 N = 30 作為窗長度，以樣本共變數估計量來估計共變異矩陣。

最適化求解有以下幾點假設：

(1) 假設共有 T 期樣本期間；$T = T - \tau_0$ 乃投資組合試驗期間，為樣本期間扣除初始視窗長度之期間

(2) $\sum_t$ 為在 $t = \tau_0, ..., T-1$ 所估計之樣本共變矩陣

(3) $\widehat{\omega}_{i,t}$ 為資產最適權重，其中 $i = 1,2,\ldots,N$

接著將最適權重矩陣加入定義式，針對各個時期使用 WNMVP 最適解法。以下舉例在第 t 期時使用的懲罰參數：

$$\lambda_1 = \alpha \widehat{A_t}\,\widehat{B_t}\sqrt{\frac{2logN}{n_t}}$$

$$\lambda_2 = (1-\alpha)\widehat{A_t}\,\widehat{B_t}\sqrt{\frac{2logN}{n_t}}$$

其中，$\widehat{A_t} = min_{i=1,2,\ldots,N\widehat{\sigma_{\iota,t}}^2}$；

$\widehat{B_t} = \| \widehat{w}_{t-1} \|_1$；

n_t 為在第 t 期時使用之樣本數;

DOI:10.6814/NCCU202200219

第三節 替代懲罰範數

一、 Berhu 懲罰範數(Berhu Penalty)

Berhu 懲罰為 Huber 損失(Huber's loss)的倒置後的結果，在統計學中 Huber 損失函數的用途為在回歸估計中減輕大誤差項的影響，其定義如下:

$$H(x) = \begin{cases} x^2 & ,|x| < k \\ 2k|x| - k^2 & ,|x| \geq k \end{cases}$$

其中 k 為大於 0 的常數 ；x 為誤差項。x 誤差項可以分作兩個部分，當誤差項的幅度較小時，影響力較小使 Huber 損失為二次函數，誤差幅度較大時，影響力較大，使 Huber 損失線性函數。投資組合權重的 Berhu 懲罰範數可表為:

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} \left(|\omega_i| 1\{|\omega_i| < k\} + \frac{{\omega_i}^2 + k^2}{2k} 1\{|\omega_i|\} \geq k \right)$$

其中$1\{\cdot\}$為指示函數。

Berhu 懲罰也是 l_1 與平方 l_2 結合的懲罰範數，但 Berhu 懲罰範數在$|\omega_i| < k$ 時受 l_2 懲罰範數規範，在$|\omega_i| \geq k$ 時受 l_2 平方懲罰範數規範。Berhu 懲罰範數可以幫助我們分別規範大的跟小的投資組合權重，提供另一種可以處理極端權重問題的方法。

二、 廣義的 l_1 懲罰範數(Generalized l_1 Norm Penalty)

廣義的 l_1 懲罰範數的定義如下：

$$\lambda_1 \|w\|_1 + \lambda_2 \|w - w_0\|_1$$

DOI:10.6814/NCCU202200219

其中，

$\|w - w_0\|_1$為懲罰範數，與個人稟賦效果有關(Gabaix, 2015)； w_0 為目標投資組合權重矩陣向量；

$\|w\|_1$為 l_1 懲罰範數，用來促進投資組合的稀疏性。

本廣義 l_1懲罰範數放寬了 DeMiguel, Nogales, and Uppal (2014)令 $\lambda_1 = 0$ 的限 制條件。

三、 適應性懲罰範數(Adaptive Penalty)

適應性懲罰範數相較於前面兩種懲罰範數不同的地方在於前兩個方法中每個資產的懲罰參數值都相同，而適應性懲罰範數使不同的資產不同的懲罰參數值，搭配多階段(multistage)投資組合最適化之懲罰函數來尋找資產最適權重，意即適應性懲罰範數，定義如下:

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{\epsilon}{exp(\epsilon|\omega_i{}^{*(l)}|)} |\omega_i|$$

其中 i = 1,2,..., N；

$\omega_i{}^{*(l)}$為資產 i 的投資組合權重，l = 0, 1, ...,

$\epsilon > 0$為調整參數。

使用多階段的迭代法步驟可得出個別資產最適權重$\omega_i{}^{*(l)}$，以下三步驟重複數次以協助求解：

(1) 解出 l_1 懲罰範數最適化投資組合，將求得之權重令為 $\omega_i{}^{*(0)}$

DOI:10.6814/NCCU202200219

(2) 將 $\omega_i{}^{*(0)}$加入至定義式，並以這個新的定義式重新求解一次 l_1，懲罰範數最適化投資組合，將求得之權重令為 $\omega^{*(1)}{}_i$

(3) 將 $\omega_i{}^{*(1)}$加入至定義式，並以這個更新的定義式重新求解一次 l_1 懲罰範數最適化投資組合，將求得之權重令為 $\omega_i{}^{*(2)}$

無限循環上述三個步驟，將求得出的權重帶入原定義式，再得出次一權重，我們依序可得到 $\omega_i{}^{*(3)}, \omega_i{}^{*(4)}, \ldots,$ 等以此類推，當達到特定收斂條件時即停止循環。Yen(2015)的實證發現中，當進行到步驟三時就已足夠確保良好的收斂條件。

Yen(2015)一文中的實證上的結果表示，在上述三個替代懲罰範數設定好適當參數的情形下，其最小變異數投資組合的表現將接近於使用加權懲罰範數最小變異數投資組合表現。在建構完因子挑選與投資組合研究方法後，下一章將以美國市場資料作為實證之標的建立加權範數最小變異數投資組合、計算比較績效表現之指標，以及探討替代懲罰函數的實際使用狀況。

第四章 實證資料

第一節 樣本的資料與描述

本研究資料採用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，該研究從會計、經濟學和金融等 115 期刊中，蒐集 156 種的因子並建立多空組合的標準化績效衡量指標；其中大約有 90%的因子發表在排名前三的金融期刊、會計期刊與經濟學期刊上，例如 Journal of Finance、the Journal of Financial Economics、Journal of Accounting Research、Quarterly Journal of Economics the Journal of Political Economy。挑選 156 種的因子主要有以下兩點：(1)因子確實

DOI:10.6814/NCCU202200219

能表達期刊上研究的精神(2) t 統計量的檢定結果在 1.5 以上。作者在研究中使用 1.5 的臨界值而不是傳統的 1.96 臨界值的原因為允許 t 檢定的計算和數據來源更新時的差異，例如 Ritter(1991)針對長期 IPO 表現不佳的研究使用事件發生的時間點的報酬發現 t 統計量超過 5.0。但是要在各個因子之間進行比較，我們必須統一樣本的期間，因此在統一時間後的 IPO 因子上，t 統計量為 1.8，更符合實務上 t 檢定的結果。為評估預測指標的績效，作者創建了 long / short 策略的投資組合，並以投資組合的月報酬率作為績效衡量標準。在 long / short 策略，long 策略中挑選報酬表現最佳的前五分位數（quintiles）的標的；相較於挑選前十分位數（deciles）的標準，使用前五分位數（quintiles）的標的可以降低統計雜訊。剩餘的預測變量則以 short 策略形成投資組合。

本研究從 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)個數據庫中挑選市場報酬、SMB、HML、RMW、CMA，即 Fama and French (2015)的五因子和 Mom1m、Mom6m、Mom12m、Mom36m 即 Jegadeesh and Titman (1993)價格動能因子和 De Bondt and Thaler (1985)、Jegadeesh (1990)反轉策略因子。選取資料期間為 1970 年 01 月 01 日至 2019 年 12 月 31 日，共 600 筆觀察資料。

第二節 績效評估方法

本章節將介紹以下十個指標的計算方法與概念，且用這十個指標以比較績效表現。所有指標皆透過 WNMVP 所求得之最適權重來計算，分別呈現如下。本章所列示的指標在後面的章節將使用簡號代稱。

一、 平均報酬率(Mean Return；MR %)

平均報酬率 $\widehat{\mu_k}$ 為衡量樣本在測試期間內，考量交易成本後的平均報酬 $\varepsilon = 0.0035$後所算得之年化報酬率

DOI:10.6814/NCCU202200219

二、 變異數(Sample Variance；SV %)

變異數 $\widehat{\sigma_k}^2$ 為衡量樣本外經過年化處理的淨報酬樣本變異數，用以衡量風險大小，與風險呈現正向關係。

三、 夏普比率(Sharpe Ratio ; SR)

$\widehat{SR}_k$ 表示樣本外的平均報酬大於無風險報酬之樣本風險溢酬，再除以樣本標準差，其中以美國十年公債殖利率 R_f 作為無風險報酬。$\widehat{SR}_k$ 為年化後的夏普比率，該數值越高表示該投資組合績效越好。

$$\widehat{SR}_k = \frac{\widehat{u_k} - R_f}{\widehat{\sigma_k}}$$

四、 確定性等值(Certainty Equivalent Rate ; CER) :

確定性等值報酬為具有風險趨避參數 γ 的二次效用函數，此數假設風險趨避值 $\gamma = 5$ 。該方程式出自於 DeMiguel et al. (2009)一文。確定同等報酬的概念為具有風險的市場之下，由於機率的不確地性，有機會獲得高報酬與低報酬；而確定同等報酬即是藉由確定同等係數，將所有不確定性轉化成一個具確定性的報酬率，因此確定同等報酬率愈高，代表確定能獲得之報酬越高。

$$\widehat{CER_k} = \widehat{u_k} - \frac{\gamma}{2}\widehat{\sigma_k}^2$$

五、 週轉率(Turnover Rate ; TOR)

表示平均交易某資產標的次數，週轉率較低代表此投資組合較穩健。

$$TOR = \frac{1}{T-M}\sum_{t=1}^{T-M}\sum_{j=1}^{N}\left(\left|\widehat{w_{k,j,t+1}} - \widehat{w_{k,j,t}}\right|\right)$$

DOI:10.6814/NCCU202200219

六、　稀疏性指標(Portfolio's Active Constituent ; PAC)

S_t 為投資組合中的活躍成分資產集合。欲檢視最適權重矩陣向量的稀疏性如何影響樣本外表現，我們可以從投資組合中活躍成分的比例來看。活躍成分即指資產權重不等於 0 者，當 PAC 越小，稀疏性越大，活躍資產比例越小表示較能容易、有效率地控管投資組合內之資產。

$$PAC_t = \frac{|\widehat{S_t}|}{N}, \widehat{S_t} = \{i : \widehat{\omega_{i,t}} \neq 0\}$$

七、　赫芬達爾—赫希曼指數(Herfindahl–Hirschman index ; HHI):

HHI 指數主要使用在測量資產標的集中度，計算投資組合中各個資產 i 占總投資組合資產比例之平方和，以衡量最佳化權重影響樣本外表現和檢視投資組合策略如何影響資產多樣性。

$$HHI_t = \frac{|\widehat{w_{i,t}}^*|^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} |\widehat{w_{i,t}}^*|\right)^2} = \frac{\|\widehat{w_t}^*\|_2^2}{\|\widehat{w_{i,t}}^*\|_1^2}$$

八、　調整後的標準化赫芬達爾—赫希曼指數(Adjusted Normalized Herfindahl–Hirschman index;AHHI) :

由於懲罰範數將會產生稀疏的投資組合最適解，使得權重集中在活躍成分上，因此可藉由計算標準化的 HHI 指數來檢視它們的集中程度。

$$ANHHI_t = \frac{HHI_t - \frac{1}{|\widehat{S_t}|}}{1 - \frac{1}{|\widehat{S_t}|}}$$

九、　多空比率(Short sale-long Ratio ; SLR) :

DOI:10.6814/NCCU202200219

多空比率為衡量懲罰範數和線性限制條件如何影響投資組合中的多頭與空頭狀況。 其中 $\widehat{S_t}^-$為活躍成分中，權數小於 0 的資產之集合;$\widehat{S_t}^+$為活躍成分中，權數大於 0 的資產之集合。

$$SLR_t = \frac{\sum_{i\in\widehat{S_t}^-}\left|\widehat{w_{i,t}}^*\right|}{\sum_{i\in\widehat{S_t}^+}\left|\widehat{w_{i,t}}^*\right|}$$

十、 累積財富比(Cumulative wealth ; CUMW):

財富累積率為持有該最佳化投資組合之期間的累積報酬率；即在期初持有資產之價值至期末時資產的價值。

$$CUMW = \frac{P_{期末}}{P_{期初}}$$

第三節 實證結果與分析

依照研究方法的章節描述，在樣本外的測試上採取擴大視窗法，即 $\tau_0 = N$，以 N = 30 作為窗長度來進行估計。在選取樣笨期間 1970 年 01 月 01 日至 2019 年 12 月 30 日中，必須再將初始視窗長度的期間扣除，才是實證結果的測試期間。以下資料頻率使用月資料作為實證結果。

DOI:10.6814/NCCU202200219

表 4-3- 1 為各投資組合月資料之績效

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	HHI	NHHI	SLR	CUMW
$\alpha = 0$	8.0903	28.9548	0.6338	0.5930	0.0120	1.0000	0.2284	0.1320	0.0147	42.0970
$\alpha = 0.2$	7.9879	28.8277	0.6161	0.5848	0.0117	0.9507	0.2388	0.1375	0.0080	40.1219
$\alpha = 0.4$	7.8938	28.7634	0.5992	0.5771	0.0113	0.8963	0.2479	0.1407	0.0034	38.3842
$\alpha = 0.6$	7.8094	28.8209	0.5829	0.5699	0.0114	0.8581	0.2558	0.1442	0.0009	36.8782
$\alpha = 0.8$	7.7185	28.9529	0.5647	0.5621	0.0114	0.8164	0.2623	0.1453	0.0000	35.3172
$\alpha = 1$	7.6426	28.0992	0.5589	0.5554	0.0116	0.8076	0.2680	0.1503	0.0000	34.0619
1/N	7.1006	19.5784	0.5471	0.5509	0.0020	1.0000	0.1100	0.0000	0.0000	27.5827
NSMVP	4.2235	12.0675	-0.1314	0.3268	0.0116	0.8074	0.2680	0.1502	0.0000	7.2025
GMVP	4.2256	12.1969	-0.1301	0.3267	0.0150	1.0000	0.2463	0.1521	0.0310	7.2073

表 4-3-1 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共 600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值。

在計算上首先加入完全投資(full investment)之限制條件，即 $w^T 1 = 1$，來計算樣本期間樣本外的的各類指標績效的表現，以及交易成本 ε=0.0035 。另外則是針對本文主要著重的加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)部分，我們令 $\lambda_1 = \lambda_{1,t}$，$\lambda_2 = \lambda_{2,t}$，並針對不同的 α 值求解最適權重以及計算績效指標，我們使用的值 $\alpha = 0,0.2,0.4,0.6,0.8,1$。

由表 4-2-1 可得知月資料的實證結果， 在 WNMVP 組合內的部分，當 $\alpha = 0$的時候，代表 $\lambda_1 = 0$ ，λ_2為最大，其平均報酬(MR)、夏普比率(SR)、確定同等報酬率(CER)與累積財富率(CUMW)表現最好；然而在在變異數(SV)、資產周轉率(TOR)、稀疏性指標(PAC)與多空比率(SLR)的數值也越大，此類指標數值較大的結果表示較高的投資組合報酬表現是由承擔較高的投

DOI:10.6814/NCCU202200219

資組合波動率、高度投資標的集中性與高做空比率的操作下所取得的資產報酬。當 $\alpha = 1$ 的時候，代表 λ_1 為最大，$\lambda_2 = 0$，其平均報酬(MR)、夏普比率(SR)、確定同等報酬率(CER)與累積財富率(CUMW)表現最弱；但在在變異數(SV)、資產周轉率(TOR)、稀疏性指標(PAC)與多空比率(SLR)的數值卻也最小，此類指標數值較小的結果表示雖然投資組合表現較弱，但其承擔較低投資組合波動率、投資標的低集中性與低做空比率。

在其他績效指標表現中，稀疏性指標(PAC) 數值愈小表示投資組合之稀疏性愈大；赫希曼指數(HHI) 與調整後的標準化赫芬達爾(NHHI)的數值越高表示示其活躍性資產的集中程度越高，代表 α 值越大，WNMVP 持有因子之投資組合是能有效率控管投資組合之部位。當 α 值愈大時，TOR 愈小，具有較穩定的投資組合權重矩陣向量；當 α 值愈大時，SLR 愈小，表示投資組合活躍成分中，權數大於 0 的資產估得比權數小於 0 的資產多，此時投資組合呈現多頭的狀態。

整體而言， α 值與投資組合的平均報酬(MR)、夏普比率(SR)、確定同等報酬率(CER)、稀疏性指標(PAC)與累積財富率(CUMW)的結果呈現負相關； α 與變異數(SV)、資產周轉率(TOR)、與多空比率(SLR)、赫希曼指數(HHI)與調整後的標準化赫芬達爾(NHHI)的結果呈現正相關。雖然在 $\alpha = 0$時擁有最好的夏普比率(SR)，但同時稀疏性指標(PAC)、赫希曼指數(HHI)與調整後的標準化赫芬達爾(NHHI)的表現上是最差的，因此在 α 值的調控上可以從選擇[0.2: 0.8]這範圍。

在投資組合間的比較中，WNMVP 在平均報酬(MR)、夏普比率(SR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)四個績效指標的表現都勝過 1/N 投資組合、NSMVP、GMVP，同時稀疏性指標(PAC)、赫希曼指數(HHI)與調整後

DOI:10.6814/NCCU202200219

的標準化赫芬達爾(NHHI) 的指標表現上也顯示較 1/N、NSMVP 與 GMVP 更有效率控管投資組合。此處 1/N 的結果不同於 DeMiguel et al. (2009b)，該研究認為 1/N 將能夠持續表現優於其他投資組合。

第四節加入限制報酬條件

在過往投資組合的理論中，對平均數的估計十分困難且容易產生對研究結果大的影響誤差，Merton(1980)一文中提到在估計難度上而言，平均數的估計難度比資產報酬共變數的估計來得困難、在估計誤差對投資組合權重的影響上亦比資產報酬共變數之誤差來得大，因此許多研究，包含本文都著重在處理變異數估計的部分。

本節延續前一節的資料頻率、樣本種類、期間及計算方法維持與前一節相同不變， 再加入 $w^T\mu = \overline{\mu}$ 的報酬限制條件，並對報酬限制$\overline{\mu}$ 設定高報酬與低報酬兩種版本。

表 4-4- 1 限制高報酬之 WNMVP 月資料績效指標

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	CUMW
$\alpha = 0$	11.9724	49.4052	1.0375	0.8948	0.0177	1.0000	255.9933
$\alpha = 0.2$	11.9619	49.3337	1.0367	0.8940	0.0180	0.9815	254.7764
$\alpha = 0.4$	11.9565	49.3913	1.0354	0.8935	0.0183	0.9663	254.0892
$\alpha = 0.6$	11.9464	49.4934	1.0329	0.8924	0.0185	0.9487	252.8292
$\alpha = 0.8$	11.9314	49.6052	1.0296	0.8909	0.0183	0.9183	250.9759
$\alpha = 1$	11.9123	49.6347	1.0266	0.8893	0.0181	0.8830	248.711

DOI:10.6814/NCCU202200219

表 4-4-1 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共 600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值，並設定高報酬 $\overline{\mu}=10\%$。

由表 4-4-1 與表 4-2-1 比較，可以發現月資料之實證結果在增加高報酬要求之後，平均報酬(MR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)四個績效指標的表現都大幅成長，但同時變異數(SV)也大幅上升、資產周轉率(TOR) 表現持平、稀疏性指標(PAC)稍微增加。從平均報酬(MR) 與變異數(SV)兩者大幅上升的情形下，我們可以檢視夏普比率(SR)的表現，可以從表格看出相較於無限制高報酬情形下夏普比率(SR)大幅增加，甚至接近快兩倍表現。加入高報酬限制後的表現，七個指標較未加入報酬限制條件的狀況好，顯示加入高報酬要求使投資組合之表現良好。

表 4-4- 2 限制低報酬之 WNMVP 月資料績效指標

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	CUMW
$\alpha=0$	10.054	39.9986	0.8497	0.7545	0.0143	1.0000	106.0121
$\alpha=0.2$	10.0353	39.8979	0.8478	0.7532	0.0144	0.9875	105.1066
$\alpha=0.4$	10.028	39.8924	0.8467	0.7526	0.0143	0.9515	104.7458
$\alpha=0.6$	10.0145	39.8925	0.8446	0.7514	0.0142	0.9316	104.0821
$\alpha=0.8$	9.9975	39.9445	0.8414	0.7499	0.014	0.8864	103.2377
$\alpha=1$	9.9838	40.0046	0.8386	0.7486	0.0137	0.8573	102.5568

表 4-4-2 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共

DOI:10.6814/NCCU202200219

600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值，並設定低報酬 $\overline{\mu}=6\%$。

由表 4-4-2 與表 4-2-1 比較，可以發現月資料之實證結果在增加低報酬要求之後，平均報酬(MR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)三個績效指標的表現都大幅成長，但同時變異數(SV)也大幅上升、資產周轉率(TOR)略為持平、稀疏性指標(PAC)稍微增加。從平均報酬(MR) 與變異數(SV)兩者大幅上升的情形下，我們可以檢視夏普比率(SR)的表現，與高報酬限制表現的結果相同，可以從表格看出相較於無限制高報酬情形下夏普比率(SR)大幅增加。整體而言，加入低報酬限制後的表現，七個指標較未加入報酬限制條件的狀況好，甚至在夏普比率(SR)仍有優異的表現，顯示加入低報酬要求使投資組合之表現良好。

小結本節，加入限制報酬條件後不論是高報酬限制還是低報酬限制下，整體而言的績效有大幅的改善，唯有在稀疏性指標(PAC)稍微增加，顯示加入平均數相關的限制促使績效改善，與過往文獻之陳述不一致。

第五節 替代懲罰範數之表現

本節將實證在研究方法章節所提到的三種替代懲罰範數，並檢視這三種替代懲罰範數是否足以提供與加權懲罰範數相比擬之結果，依不同的參數變化的實證結果如下。

DOI:10.6814/NCCU202200219

表 4-5- 1 Berhu 懲罰範數之月資料績效指標

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	CUMW
k=0.02	10.948	45.9731	0.9244	0.8165	0.0058	1.0000	159.31
k=0.05	9.8582	41.5663	0.8032	0.7349	0.0078	0.9565	96.326
k=0.1	8.8286	39.5776	0.6594	0.6533	0.0096	0.9212	59.556

表 4-5-1 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共 600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值。

由表 4-5-1 與表 4-2-1 比較，可以發現月資料之實證結果可以發現平均報酬(MR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)三個績效指標的表現都優於 WNMVP，但同時變異數(SV)也大幅上升，我們可以檢視夏普比率(SR)的表現，可以發現即使變異數(SV)大幅上升，但在平均報酬上的表現也增加許多使夏普比率(SR)的表現優異。此外，其中特別是在 $k = 0.02$ 時，確定同等報酬率(CER)的表現更是優於 WNMVP 與$k = 0.05, 1$。在稀疏性指標(PAC)的指標表現上略與 WNMVP 持平，而資產周轉率(TOR)指標上的表現略低於 WNMVP，顯示出投資組合穩定性較高。

DOI:10.6814/NCCU202200219

表 4-5- 2 廣義 l_1 懲罰範數之月資料績效指標

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	CUMW
TWN	9.1168	41.3906	0.6896	0.6735	0.0102	1.0000	67.95
TWN - l_1	9.0831	41.2334	0.6857	0.671	0.0092	0.9318	66.903
TWNS	7.6413	39.1181	0.4735	0.5553	0.0116	0.8078	34.04
TWNS - l_1	7.6413	39.1181	0.4735	0.5553	0.0116	0.8074	34.04

表 4-5-2 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共 600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值。

在廣義 l_1 懲罰範數中，TWN 表示為當目標投資組合權重矩陣向量 w_0 為 1/N、且未使用 l_1 範數懲罰的情況；TWN − l_1 表示為目標投資組合權重矩陣向量 w_0 為 1/N、且使用 l_1 範數懲罰的情況；TWNS 表示當目標投資組合權重矩陣向量 w_0 為 NSMVP 之最適權重矩陣向量、且未使用 l_1 範數懲罰的情況；TWNS− l_1 表示當目標投資組合權重矩陣向量 w_0 為 NSMVP 之最適權重矩陣向量、且有使用 l_1 範數懲罰的情況。

由表 4-5-2 與表 4-2-1 比較，可以發現月資料之實證結果可以發現平均報酬(MR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)三個績效指標的表現都優於 WNMVP，但同時變異數(SV)也大幅上升，我們可以檢視夏普比率(SR)的表現，可以發現即使變異數(SV)大幅上升，但在平均報酬上的表現也增加許多

DOI:10.6814/NCCU202200219

使夏普比率(SR)的表現優異。稀疏性指標(PAC)與資產周轉率(TOR)指標的表現上與 WNMVP 略微持平。此外，當目標投資組合權重矩陣向量 w_0 為 1/N 且未使用或使用 l_1 範數懲罰的情況時，該投資組合的績效表現與稀疏程度明顯優於 NSMVP 且未使用或使用 l_1 範數懲罰。

表 4-5- 3 適應性懲罰範數之月資料績效指標

	MR(%)	SV(%)	SR	CER(%)	TOR	PAC	CUMW
ε=1 ,ℓ=1	7.4863	39.4466	0.4468	0.5417	0.0118	0.7901	31.611
ε=1 ,ℓ=2	7.4826	39.2235	0.4475	0.5418	0.0116	0.7879	31.573
ε=2.5 ,ℓ=1	6.9159	41.8329	0.3457	0.4892	0.0190	0.6930	24.008
ε=2.5 ,ℓ=2	6.8030	41.5524	0.3293	0.4803	0.0167	0.6505	22.777

表 4-5-3 為使用 Andrew Y. Chen & Tom Zimmermann(2020)實證結果資料，完整的樣本期間(whole sample period)為從 1970 年 01 月至 2019 年 12 月，共 600 筆觀察值，扣除初始視窗長度後之試驗期間為自 1972 年 7 月至 2019 年 12 月，共 570 個觀察值。

在適應性懲罰範數中，其投資組合在平均報酬(MR)、確定同等報酬率(CER)與積財富率(CUMW)三個績效指標的表現都低於 WNMVP 投資組合表現。其中，表現最好的適應組合的參數為 ε=1, ℓ=1，在七種指標上的表現都低於 WNMVP 投資組合。

本節小結，替代懲罰函數的投資組合整體而言的表現都優於 WNMVP 投資組合。在平均報酬(MR)與夏普比率(SR)略為勝過 WNMVP 投資組合，僅有累積

DOI:10.6814/NCCU202200219

財富率(CUMW)表現特別突出。稀疏性指標(PAC)與資產周轉率(TOR)指標稍與 WNMVP 投資組合持平，但在 $k = 0.02$ 的 Berhu 懲罰範數中，資產周轉率(TOR)明顯低於其他投資組合表現。以上分析結果可做為高維度最小變異數投資組合在使用懲罰範數時之輔助資訊。

第五章 結論與建議

第一節 研究結論與建議

本研究欲以因子類比投資標的建構出最佳的投資組合，針對美國股票市場進行實證分析，使用 Fama and French 五因子、Jegadeesh (1990)價格動能因子 De Bondt and Thaler (1985)、Jegadeesh (1990)反轉策略因子等，總共九個因子，選取最小變異數投資組合、加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)、1/N 法與無放空最小變異數投資組合(the No-Shortsale Minimum Variance Portfolio, NSMVP)進行投資投資組合之比較，其中又對於加權範數最小變異數投資組合予以報酬限制及增加替代懲罰範數進一步地分析，最將把三個部分的實證結果整理陳述如下。

在加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)的實證結果中，不論 α 值等於多少，SR、CER 和 CUMW 績效表現上都優於其他三種投資組合，PAC、HHI 和 NHHI 則與最小變異數投資組合略為持平。加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)中，隨著 α 的不同，可得到績效指標結果也不同，甚至會有方向不一致的現象，因此在使用加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)時，可調整 α 得出最適當的結果。

DOI:10.6814/NCCU202200219

納入限制性報酬的實證中，SR、CER 和 CUMW 績效表現上優於加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)，但在其他指標上的表現卻是低於最小變異數投資組合(WNMVP)的表現，其中高報酬限制下 $\alpha = 0$ 的加權懲罰犯數表現最為優異，這與 Merton(1980)的研究結果有所不同。高維度分析輔助資訊的三個替代懲罰範數方法中在比較指標上的表現都可比擬加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)，甚至 Berhu 懲罰函數的績效表現更優於加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)。

加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)在各項評估指標都優於最小變異數投資組合(GMVP)，其最大的原因在於增加於投資組合 l_1 範數懲罰函數與 l_2 平方範數懲罰函數使投資組合可以在不減少稀疏性的狀況下有效規範投資組合權重的大小。由於本研究的樣本期間較長，因此在長期樣本的績效回測下，加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)各項績效指標明顯優於最小變異數投資組合(GMVP)，在經濟意涵上也符合更稀疏分散的權重與投資組合長期的報酬呈現正向成長的現象。

本文究對於因子投資應用在加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)上仍有以下兩點待加強的地方；第一點為加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)的方法適合建構於較多的資產數目，但本研究資產數目較小，在後續的研究中可以增加資產數目並檢視績效結果。第二點為本研究直接使用因子建構投資組合，在實際執行上可以使用相關因子特徵的 Exchange Trade Fund (ETF)去建構投資組合。

本研究論文針對美國股票市場進行加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)的適用性做初步的探討，有許多地方尚未能有更深入的分析，首先是分析投資組合的報酬是歸因於哪種因子的貢獻，例如市場因子、規模因子等。再者是可以

DOI:10.6814/NCCU202200219

檢視由因子所建構的加權範數最小變異數投資組合(WNMVP)，在面對熊市或牛市的經濟環境中因子權重的變化；後續研究建議可朝上述構面進行更全面地分析研究。

DOI:10.6814/NCCU202200219

參考文獻

1. 李振婷(2015)。最小變異數投資組合在台灣股市之運用。未出版之碩士論文， 國立政治大學，國際經營與貿易學系，碩士論文。
2. 吳孟臻(2009)。投資人情緒、動能與公司治理對股價的影響。國立政治大學，財務管理學系，碩士論文。
3. 洪茂蔚、林宜勉、劉志諒(2007)。「動能投資策略之獲利性與影響因素」，中山管理評論，第 15 卷第 3 期，第 515-546 頁。
4. 劉修銘(2018)。因子投資在資產配置上的應用。國立交通大學，資訊管理與財務金融學系，碩士論文，第 3-15 頁。
5. 劉清標、吳佩紋、林筱鳳(2019)。企業創新效率之六因子資產定價模型。商管科技季刊第二十卷第一期，第 69-79 頁。
6. 賀蘭芝(2015)，《Risk Parity 投資組合配置分析》，JP Morgan 資產管理公司「2015 計量模型投資訓練課程」，行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書。第 4-9 頁。
7. 顏佑銘(2015)。資產數目過大時，投資人該如何建構投資組合策略，政大商業評論，第 2015 期。
8. Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, *48*(5), 28-43.
9. Benartzi, S., & Thaler, R. H. (2001). Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American economic review*, *91*(1), 79-98.
10. Brinson, G. P., Singer, B. D., & Beebower, G. L. (1991). Determinants of portfolio performance II: An update. *Financial Analysts Journal*, *47*(3), 40-48.
11. Chaves, D., Hsu, J., Li, F., & Shakernia, O. (2011). Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. *The Journal of Investing*, *20*(1), 108-118.
12. Chen, A. Y., & Zimmermann, T. (2020). Publication bias and the cross-section of stock returns. *The Review of Asset Pricing Studies*, *10*(2), 249-289.

DOI:10.6814/NCCU202200219

13. Chow, T. M., Hsu, J., Kalesnik, V., & Little, B. (2011). A survey of alternative equity index strategies. *Financial Analysts Journal*, *67*(5), 37-57.
14. Clarke, R. G., de Silva, H., & Murdock, R. (2005). A factor approach to asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, *32*(1), 10-21.
15. De Bondt, W. F., & Thaler, R. (1985). Does the stock market overreact?. *The Journal of finance*, *40*(3), 793-805.
16. De Bondt, W. F., & Thaler, R. H. (1987). Further evidence on investor overreaction and stock market seasonality. *The Journal of finance*, *42*(3), 557-581.
17. DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *The review of Financial studies*, *22*(5), 1915-1953.
18. Fama, E.F. and K.R. French(1993),Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, Journal of Financial Economics 33,3-56.
19. Jegadeesh, N., & Titman, S. (1993). Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, *48*(1), 65-91.
20. Kenneth French data library. Retrieved March 13 2020, from: https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html
21. Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection, The Journal of Finance, 7, 77–91.
22. Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, *8*(4), 323-361.
23. Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized'optimal?. *Financial analysts journal*, *45*(1), 31-42.
24. Page, S., & Taborsky, M. A. (2011). Invited Editorial Comment: The Myth of Diversification: Risk Factors versus Asset Classes.
25. Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, *25*(2), 65-86.
26. Windcliff, H., & Boyle, P. P. (2004). The 1/n pension investment puzzle. *North American Actuarial Journal*, *8*(3), 32-45.
27. Yen, Y. M., & Yen, T. J. (2014). Solving norm constrained portfolio optimization via coordinate-wise descent algorithms. *Computational Statistics & Data Analysis*, *76*, 737-759.

DOI:10.6814/NCCU202200219

28. Yen, Y. M. (2015). Sparse weighted-norm minimum variance portfolios. *Review of Finance*, *20*(3), 1259-1287.

DOI:10.6814/NCCU202200219