

國立政治大學金融學系碩士班

碩士學位論文

隱藏式馬可夫狀態轉換模型下的動態資產配置

Dynamic Asset Allocation under Hidden Markov Regime

Switching Model



指導教授：江彌修博士

研究生：盧建豪 撰

中華民國一一年六月

## 摘要

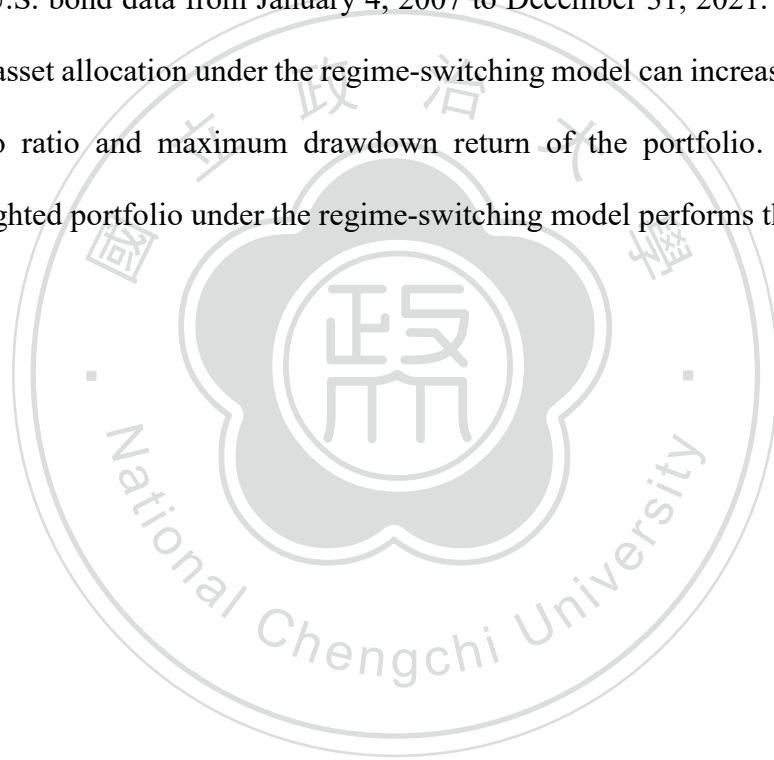
本文探討隱藏式馬可夫狀態轉換模型是否能夠使投資組合績效上升。基於隱藏式馬可夫模型對台灣加權指數進行狀態分類後，得到兩種狀態：高波動低報酬狀態與低波動高報酬狀態。本文建立逆變異數加權、分層式風險評價與二次規劃最小化變異數三個投資組合，並採用 2007 年 1 月 4 日至 2021 年 12 月 31 日的台灣股市資料與美債報酬進行回測。實證發現，狀態轉換下的動態資產配置能使投資組合的夏普比率、索提諾比率與最大策略虧損報酬上升，其中又以加入狀態轉換模型的逆變異數加權投資組合表現最佳。



關鍵詞：資產配置、隱藏式馬可夫模型、狀態轉換模型、分層式風險平價

## Abstract

This paper explores whether a hidden Markov regime-switching model can improve portfolio performance. After we classify the Taiwan Weighted Index based on the Hidden Markov Model, two states are obtained: the state of high volatility and low return, and the state of low volatility and high return. This paper constructs three portfolios: inverse variance weighting, hierarchical risk parity and quadratic programming minimizing variance. We conduct backtests based on Taiwan stock market and U.S. bond data from January 4, 2007 to December 31, 2021. We find that the dynamic asset allocation under the regime-switching model can increase the Sharpe ratio, Sortino ratio and maximum drawdown return of the portfolio. The inverse variance weighted portfolio under the regime-switching model performs the best.



Keywords: Asset Allocation, Hidden Markov Model, Regime-switching Model, Hierarchical Risk Parity

# 目次

第一章 緒論.....	1
第二章 文獻回顧.....	4
第三章 研究方法.....	7
第一節 隱藏式馬可夫模型.....	7
第二節 原始投資組合.....	8
第三節 限制股債比例投資組合.....	12
第四節 股債分別優化投資組合.....	12
第五節 投資組合比較.....	13
第四章 實證結果與分析.....	15
第一節 資料敘述.....	15
第二節 隱藏式馬可夫模型.....	17
第三節 無限制股債比例投組.....	22
第四節 狀態轉換機率投資組合.....	25
第五節 股債分別優化.....	28
第六節 投資組合比較.....	31
第五章 結論與後續建議.....	36
參考文獻.....	38

## 表次

表 1 資產類別.....	15
表 2 大盤訓練期間報酬動差與模型模擬結果之動差.....	17
表 3 不同狀態數量模型表現.....	18
表 4 HMM2 與 HMM3 轉移矩陣.....	18
表 5 模型與訓練集平均數與報酬關係相同占比.....	20
表 6 策略績效比較表.....	31



## 圖次

圖 1 分層式分群法樹狀示意圖.....	10
圖 2 以台幣計價之 SHY 累計報酬與 00719B 累計報酬.....	16
圖 3 大盤報酬 800 天的移動平均與變異數.....	19
圖 4 HMM2 800 天訓練結果 (灰色區塊為 95%信賴區間) .....	20
圖 5 大盤報酬散佈圖 (紅色為狀態 2) .....	21
圖 6 大盤調整後收盤價 (上) 與 HMM2 預測為狀態 2 機率 (下) .....	21
圖 7 HRP 二十日換倉績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	22
圖 8 IVP 二十日換倉績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	23
圖 9 MinRisk 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	24
圖 10 HRP_rs 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	26
圖 11 MinRisk_rs 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	27
圖 12 HRP_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	28
圖 13 IVP_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	29
圖 14 MinRisk_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下) .....	30
圖 15 計算權重時共變異數矩陣的條件數, 藍色與橘色分別為納入債券與未納入 債券的共變異數矩陣.....	32
圖 16 資產在交易期間相關性熱力圖與分層圖.....	33
圖 17 HRP 平均風險貢獻值.....	34
圖 18 IVP 平均風險貢獻值 .....	34
圖 19 MinRisk 平均風險貢獻值.....	35

# 第一章 緒論

由於金融市場瞬息萬變且存在不確定性，因此資產配置（asset allocation）一直是金融市場中重要的議題之一。即使股票市場隨著經濟成長，在較長的時間框架下呈現向上的趨勢，然而在股市中存在黑天鵝事件（Theory of Black Swan Events）造成投資人鉅額的虧損。以台灣股市為例，台灣加權指數曾在 1990 年 2 月 12 日最高點 12682.41 跌至 1990 年 10 月 12 日的 2485.25 點。在那之後也不乏出現年間超過 20% 的跌幅。因此對投資人而言，選擇能夠減少熊市虧損的投資組合是至關重要的。

風險平價（Risk Parity）是將風險平均分散在不同資產之中的策略，為資產配置中常見的策略之一。知名避險基金橋水基金（Bridgewater Associates）的創辦人雷·達里歐（Ray Dalio）提出全天候投資組合（All Weather Portfolio）即是風險平價策略的一種。全天候投資組合中涵蓋 55% 債券、15% 黃金與商品與 30% 的股票，該投資組合能有效降低在熊市時的虧損，由於風險平價試圖將風險平均分散，因此投資組合中波動度最低的債券占投資組合比例最高。

此外，隨著人工智慧（Artificial Intelligence）的發展，學者也試著將機器學習（Machine Learning）演算法來建構投資組合，機器學習演算法可分為存在標籤的監督式學習（Supervised Learning）與無標籤的非監督式學習（Unsupervised Learning）兩種。監督式學習常應用於迴歸與分類的預測，其中 Konstantinov et al. (2020) 使用基於網路的預測模型，發現機器學習演算法在因子投資下能夠勝過傳統的投資組合權重計算方式。非監督式學習算法多元，其中隱藏式馬可夫模型（Hidden Markov Model）假設觀察值的機率分配受狀態所影響，透過觀察時間序列的變化，來推敲出觀察值背後的狀態，Ang & Bekaert (2002) 使用隱藏式馬可夫模型將全球市場分為高波動的熊市狀態與低波動的牛市狀態，發現即使熊市時各國股市的相關性上升，投資人仍能夠受益於國際分散風險，且對於分散投資在無風險資產的投資人而言，忽略狀態轉換的成本會比完全投資在股市的投資人高。

學者除了使用隱藏式馬可夫模型對金融市場時間序列進行分析外，也將機器學習使用在橫斷面應用之中。分層式分群 (Hierarchical Clustering) 是將資料透過遞迴的方式不斷聚合，來形成一個樹狀的架構。而 De Prado (2016) 提出的分層式風險平價 (Hierarchical Risk Parity) 是將資產進行分層式分群，並且基於階層架構來計算風險平價，能夠在樣本外有更好的表現。

本文試圖建立一個能夠動態調整的投資組合，使其配合隱藏式馬可夫模型中的轉換機率，根據未來狀態是不利於股市的機率來配置債券部位。由於股市與債市大多時間走勢相反，且美國短期國債屬於較低風險的投資，因此本文將美債作為防禦型資產。資產配置發展至今，已有多種權重的計算方式，因此本文使用分層式風險平價 (Hierarchical Risk Parity)、逆變異數加權投資組合 (Inverse Variance Portfolio) 與二次規劃求解最小化變異數投資組合三種方式計算权重，並討論三種模型與狀態轉換模型的互動關係。在實證分析的過程中，本文使用台灣加權指數接續 Bulla et al. (2011) 的方法使用日頻率的資料訓練隱藏式馬可夫模型。接著會先討論不同狀態數量的隱藏式馬可夫模型的配適性。由於市場不同時期下，對於高低波動的標準可能不同，因此在訓練隱藏式馬可夫模型時，本文使用 800 天移動窗口的方式訓練，約莫是訓練期間內已結束的景氣循環平均長度。最後將比較加入狀態轉換機率前後的績效，以及不同模型之間的績效比較。

本文的實證研究發現有加入狀態轉換機率的模型皆能夠勝出未加入的模型，由於模型成功判別出 2020 年因為 COVID-19 疫情造成的股市大幅下修，因此 HRP 與 IVP 在加入狀態轉換機率之後，投資組合在該動蕩的時期策略虧損幅度較未加入狀態轉換機率低。而最小化變異數投資組合原先是長期持有約 80% 的債券，導致投資組合報酬較低；在加入狀態轉換機率之後，最小化變異數投組則是改善了報酬較低的問題，雖然增加了風險，但衡量風險報酬比的夏普比率則是上升。此外，本文比較在給定債券比例之下，不納入債券與其他標的相關性是否能改善 HRP 與 MinRisk。實證發現，單獨使用股市進行優化的 HRP\_rs2 與 MinRisk\_rs2 兩個投資組合表現，皆比納入股債關係的投資組合佳。綜合以上，



本文發現狀態轉換模型能夠更快速依照市場狀態來調整權重，即使投資組合沒有保留現金部位，且不進行放空，仍能夠透過股債配置有效控制下方風險(Downside Risk)。

本文接著將依照文獻探討、研究方法、實證研究、結論與後續建議的順序撰寫。文獻探討中會蒐集隱藏式馬可夫模型在資產配置上的應用，並且討論現行的權重計算方法。研究方法則會介紹隱藏式馬可夫模型，以及投資組合權重的計算方式。實證研究將簡述所用資料，以及隱藏式馬可夫模型訓練過程和投資組合績效比較。結論則會彙整實證發現，最後會在後續建議提出未來的可改進的地方與研究方向。



## 第二章 文獻回顧

由 Harry Markowitz 在 1952 年提出的現代投資組合理論 (Modern Portfolio Theory) 奠定了人們對於報酬與風險之間的理解，理性投資人會基於均值－變異數最適化 (Mean Variance Optimization) 來決定資產配置。投資人在給定的期望報酬下，會最小化承受的風險，也就是極小化投資組合的變異數。為了達到馬可維茲所述的最適化，許多研究建立在現代投資組合理論之上。本章將著重介紹使用狀態轉換模型的動態資產配置與基於橫斷面資料的投資組合權重計算方式。

Ang & Bekaert (2002) 使用隱藏式馬可夫模型來將市場分成不同狀態，來建構出基於狀態的動態優化投資組合。Bulla et al. (2011) 提出使用日頻率資料估計隱藏式馬可夫模型，使用日頻率資料除了能夠增加可用的資料筆數之外，錯誤的判斷與預測對策略的影響也更小，並且該研究使用八年，也就是約莫一次景氣循環的時間訓練模型，並且在市場在波動較大的狀態時，選擇將資金完全投入無風險資產中，而在波動較小時完全投入風險性資產的策略，該實證發現狀態轉換模型在考慮交易成本後，在樣本外能有獲利能力。Kritzman et al. (2012) 計算股市與外匯的金融市場動盪值 (Financial Market Turbulence) 作為特徵，以及使用通貨膨脹與經濟成長產出四個隱藏式馬可夫模型。該研究討論以不同風險貼水 (Risk Premium) 為標的下的戰術資產配置 (Tactical Asset Allocation) 是否能在狀態轉換模型下勝出，該實證發現狀態轉換模型能有效的降低下方風險。Nystrup (2014) 則是在不使用無風險性資產的情況，討論了在狀態轉換模型的獲利能力，該研究使用以下三種不同策略，第一種是在股市被判斷為牛市狀態時完全投入股票市場，熊市時完全投入債券市場，第二種則是在熊市完全做空股票市場，而第三種則是在牛熊市分別估計資產配置權重。Nystrup (2014) 使用的狀態轉換策略在考慮交易成本後仍勝出不考慮狀態轉換的策略。Wang (2020) 加深了對狀態轉換時機的著墨，該研究在使用日頻率資料訓練模型後，對模型配適出的分配進行科摩哥洛夫-史密諾夫檢定 (Kolmogorov-Smirnov test) 得到模型可能的母體分配，並在資

料的均值與變異數的機率密度函數 (Probability Density Function) 超過閾值時，判定為新的狀態，該研究基於市場狀態選擇不同因子投資策略，發現該策略能夠勝出只持有單一因子的投資策略。Costa & Kwon (2020) 用狀態轉換模型來提升 MVO 估計值的品質，該研究使用不同狀態下的資料估計 Fama-French 三因子模型下的迴歸式，並基於狀態轉換機率對資產的均值與變異數建模。該研究顯示即使模型對於狀態的判斷存在錯誤，仍能夠得到更低波動且高報酬的績效。

在現代投資組合理論之後，Black & Litterman (1992) 在 MVO 模型中加入貝氏先驗機率 (Prior Probability) 與投資人主觀預期來改善模型穩定度。Chopra & Ziemba (1993) 指出 MVO 對於輸入值很敏感，導致估計出的投資組合容易因輸入值微小變動而產生大幅改變，其中對於預期報酬的敏感度大於共變異數估計的敏感度，且 MVO 所估計的最適化投資組合也容易過度集中。Ledoit & Wolf (2003) 認為學者不應使用樣本估計的共變異數矩陣進行 MVO，因為估計誤差將造成 MVO 輸出的擾動，應使用收縮估計量 (Shrinkage estimator) 增加模型樣本外穩定度，透過收縮估計量可以減少極端的係數，進而減少估計誤差。

隨著機器學習的發展，開始出現使用機器學習來輔助建構投資組合的研究。Meucci (2009) 使用主成分分析 (Principal Component Analysis) 來分析投資組合的主要風險，並將資金分散在不相關的風險之中。Papenbrock (2011) 則是使用分群算法的角度切入投資組合建構的問題，將資產使用分層式分群後，基於分層的樹狀結構，將資金如瀑布的方式平均分配在群聚之中。而 De Prado (2016) 提出的分層式風險平價則是在分層分群的基礎下，在每一層改以風險平價的方式計算資金權重。此外，分層式風險平價使用資產間全域的距離來計算分群，能夠得到更穩健的分群結果。相較於減少估計誤差來改善 MVO，De Prado (2016) 從圖論 (Graph Theory) 的角度切入，透過減少邊 (edge) 來增加模型穩定度。因此，分層式風險平價能解決因估計誤差而產生的投資組合過度集中的問題，能夠在共變異數矩陣為病態系統 (ill-conditioned) 時仍估計出分散化風險的投資組合。Pfitzinger & Katzke (2019) 在分層式風險平價的架構中，加入對於資產權重的限制

式，並利用各國股票指數作為標的進行實證研究，結果顯示 HRP 能產出高度分散的投資組合，並且有低波動、低換倉與良好的績效表現的特性。



### 第三章 研究方法

本文先使用隱藏式馬可夫模型對金融市場的時間序列進行分類，接著將使用基於狀態轉換機率，使用兩種方式配置股債比例。本章節將介紹隱藏式馬可夫模型的架構與訓練過程，以及三種不同的投資組合模型，與其在狀態轉換下的建構方式，最後會簡述投資組合績效的計算方式。

#### 第一節 隱藏式馬可夫模型

馬可夫鏈是狀態轉換的隨機過程，該隨機過程具備無記憶 (Memoryless) 性質：意指下一期之狀態  $S_{t+1}$  的機率分配只受本期狀態  $S_t$  影響，而不受路徑  $S_{t-1}, \dots, S_1$  影響。數學表達式如下：

$$P(S_{t+1}|S_1, S_2, \dots, S_t) = P(S_{t+1}|S_t)$$

狀態轉換過程可用轉移矩陣  $A = [a_{i,j}]$  來表示，其中  $a_{i,j} = P(S_{t+1} = i | S_t = j)$  為狀態  $i$  轉移到狀態  $j$  的機率，而  $A$  為  $N \times N$  的矩陣， $N$  為狀態的數量。隱藏式馬可夫模型則是指觀察者只能觀察到隨機變數  $X_t$ ， $X_t$  分配受狀態  $S_t$  影響，假設該分配為常態分配：

$$(X_t | S_t = i) \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

我們定義狀態  $S_t = i$  時，得到觀察值  $X_t = x_j$  的機率為  $b_i(x_j) = P(X_t = x_j | S_t = i)$  並進一步定義矩陣  $B = \{b_i(x_j)\}$  以及初始狀態機率  $\pi_i = P(S_1 = i)$ ，我們使用  $\theta = \{A, B, \pi\}$  代表馬可夫鏈的參數。接著透過 Baum-Welch 演算法得到估計值  $\theta^*$ ，使得  $\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} P(X|\theta)$  詳細算法如下：

(1) 向前過程

定義  $\alpha_i(t)$  為參數  $\theta$  下，觀察到序列  $X = x_1, x_2, \dots, x_t$  且狀態為  $i$  的條件機率，因此  $\alpha_i(t)$  可記為：

$$\alpha_i(t) = b_i(x_t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t-1) a_{ji}$$

其中  $\alpha_i(1) = \pi_i b_i(x_1)$ 。

## (2)向後過程

定義  $\beta_i(t)$  為參數是  $\theta$  且在  $t$  時狀態為  $i$  的條件下，未來觀察到序列  $X = X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_T$  的機率，因此  $\beta_i(t)$  可記為：

$$\beta_i(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j(t+1) a_{ij} b_j(x_{t+1})$$

因此在給定觀察值  $X$  與參數  $\theta$  的條件下，在  $t$  時狀態為  $i$  的機率為：

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) &= P(S_t = i | X, \theta) \\ &= \frac{P(S_t = i, X | \theta)}{P(X | \theta)} \\ &= \frac{\alpha_i(t) \beta_i(t)}{\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \beta_j(t)} \end{aligned}$$

而給定  $X$  和  $\theta$  的條件下，在  $t$  時狀態為  $i$  且  $t+1$  時狀態為  $j$  的機率為：

$$\begin{aligned} \xi_{ij}(t) &= P(S_t = i, S_{t+1} = j | X, \theta) \\ &= \frac{P(S_t = i, S_{t+1} = j, X | \theta)}{P(X | \theta)} \\ &= \frac{\alpha_i(t) a_{ij} b_j(x_{t+1}) \beta_j(t+1)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) a_{ij} b_j(x_{t+1}) \beta_j(t+1)} \end{aligned}$$

接著依照  $\pi_i = \gamma_i(1)$   $a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_i(t)}$   $b_{ij} = \frac{\sum_{t=1, X_t=x_j}^{T-1} \gamma_i(t)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_i(t)}$ ，隨著資料更新參數。

## 第二節 原始投資組合

### 一、逆變異數加權投資組合 (Inverse Variance Portfolio)

逆變異數加權投資組合是使用資產個別變異數的倒數做為權重加權。在資產間報酬的共變異數為 0 時，逆變異數加權投資組合中的每個資產所承受的風險相同。逆變異數加權投資組合的算法如下：

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

## 二、最小化變異數投資組合

最小化變異數投資組合是利用二次規劃來求解以下問題：

$$\begin{aligned} \min_W W^T \Sigma W \\ \text{s.t. } IW \geq 0 \\ W^T a = 1 \end{aligned}$$

其中  $W$  表示資產權重為  $N \times 1$  的向量  $I$  是  $N \times N$  的單位矩陣  $a$  為元素為 1 的  $N \times 1$  向量  $0$  為元素為 0 的  $N \times 1$  向量。而共變異數矩陣  $\Sigma$  為一個半正定矩陣，因此存在全局最小解。本文將使用 Python 的 Riskfolio-Lib 來求解最小化變異數投資組合。該模組是使用 Python 模組 CVXPY 來求解二次規劃問題。

## 三、階層式風險平價(Hierarchical Risk Parity)

階層式風險平價由 De Prado (2016) 提出，能夠建構更加穩健的投資組合。其算法核心在於將資產使用階層式分群法分群後，由上至下的方式將資金分配到不同群之中。由於階層式風險平價不須使用共變異數矩陣之反矩陣，因此可以在共變異數矩陣為病態系統甚至是不可逆時仍產出穩健的估計值。本文使用 Riskfolio-Lib 來計算此投資組合權重，算法流程如下：

### (1) 樹聚合 (Tree Clustering)

考慮  $N$  個資產的相關係數矩陣  $\rho = \{\rho_{i,j}\}_{i,j=1,2,\dots,N}$ ，定義矩陣  $D = d_{i,j}$  為資產間的距離，而  $d_{i,j} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho_{i,j})}$ 。接著計算矩陣  $D$  兩向量之間的尤拉距離  $\tilde{d}_{i,j} =$

$\sqrt{\sum_{n=1}^N (d_{n,i} - d_{n,j})^2}$ ，而  $\tilde{d}$  與  $d$  不同之處在於  $\tilde{d}$  在計算資產  $i$  與  $j$  之間的距離時納入了兩資產與其餘資產距離的相似程度，而非只用  $i$  與  $j$  之間的相關性。

接著進行分層式分群，起初先將每種資產視為一個群聚，接著根據  $\tilde{d}_{i,j}$  使用單一連結聚合法 (Single-linkage Agglomerative Algorithm) 將所有群聚中距離最近的兩個群聚結合成新的群聚。單一連結聚合法算法如下：

$$d(C_i, C_j) = \min_{a \in C_i, b \in C_j} d(a, b)$$

其中 $C_i$ 為群聚 $i$ 。重複進行單一連結聚合法直到將所有資產聚合成一群，圖 1 可以看到在最底層所有資料各為一個群聚，接著編號 4 與編號 5 被聚合成一群，而資料 3 又與該群聚形成新的群聚，如此透過不斷重複聚合來形成樹狀架構。

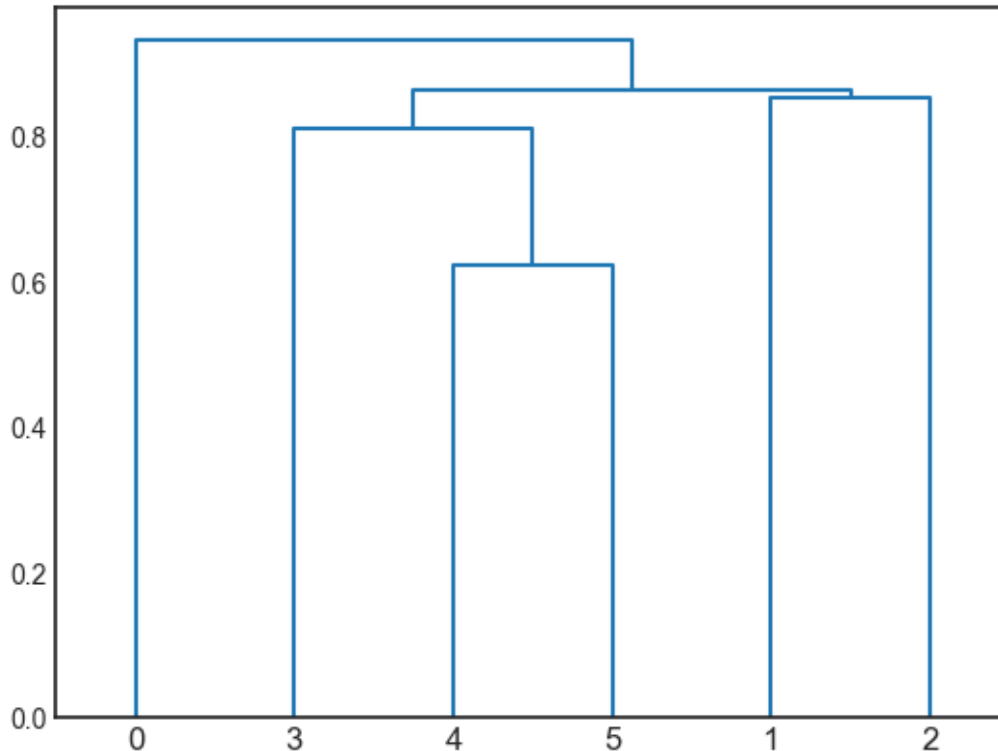


圖 1 分層式分群法樹狀示意圖

### (2) 準對角化 (Quasi-Diagonalization)

準對角化是將相關係數矩陣透過分層式分群的順序排序，因此在排序後相似的標的會排在一起，而分群關係較遠的則會在排序中較遠。

### (3) 遞迴二分法 (Recursive Bisection)

分層式風險平價先由下至上將每群聚中的兩資產使用逆變異數加權來計算群聚的變異數，接著由上至下根據每個群聚的變異數的倒數來進行資金分配。詳細步驟如下：

#### (3-1) 計算群內變異數



$$\tilde{V}_i^{(j)} = \tilde{w}_i^{(j)T} V_i^{(j)} \tilde{w}_i^{(j)}$$

其中  $j = 1, 2$ ， $V_i^{(j)}$  表第  $i$  層中第  $j$  群中元素的共變異數矩陣，而  $\tilde{w}_i^{(j)}$  為第  $i$  層中第  $j$  群元素所算出的 IVP 權重。

(3-2) 根據群內變異數比例計算分離因子 (split factor)，並且將第  $i$  群中第  $j$  個元素中所有權重乘上  $\alpha_i^{(j)}$

$$\alpha_i^{(j)} = 1 - \frac{\tilde{V}_i^{(j)}}{\tilde{V}_i^{(1)} + \tilde{V}_i^{(2)}}$$

可以看到步驟 3-1 在計算權重  $\tilde{w}_i^{(j)}$  時是將一個群聚中兩元素視為相關係數為 0 的兩個部分，因此是使用 IVP 權重。而最終由上至下決定資金的  $\alpha_i^{(j)}$  使用  $\tilde{V}_i^{(j)}$  涵蓋了群內完整的共變異數矩陣  $V_i^{(j)}$ 。



### 第三節 限制股債比例投資組合

本節將隱藏式馬可夫模型預測下一期為狀態  $N$  的機率做為投資在債券的比例，其中狀態  $N$  為股市平均報酬最低的狀態。

#### 一、限制股債比例最小化變異數投資組合

最小化變異數投資組合多了債券權重  $W_b$  的限制式，變成求解以下式子：

$$\begin{aligned} \min_w W^T \Sigma W \\ \text{s.t. } IW \geq 0 \\ W^T a = 1 \\ w_b = P(S_{t+1} = N) \end{aligned}$$

#### 二、限制股債比例分層式風險平價

使用 Pfitzinger & Katzke (2019) 提出的加入限制式的分層式風險平價。流程為先計算未加入限制式的分層式風險平價，並使用將：

$$\tilde{\alpha}_i = \max[\min[\alpha_i, \sum_i \bar{\alpha}_i^{max}], \sum_i \bar{\alpha}_i^{min}]$$

其中  $\bar{\alpha}_i^{max}$  與  $\bar{\alpha}_i^{min}$  為  $1 \times N$  的限制式向量， $N$  表示  $\alpha_i$  之中標的數量， $\alpha_i$  為未加入限制式的分離因子。本文將向量  $\bar{\alpha}_i^{max}$  定為  $[1, 1, \dots, 1, P(S_{t+1} = N) + 10^{-7}]$ ，而  $\bar{\alpha}_i^{min}$  定為  $[0, 0, \dots, 0, P(S_{t+1} = N)]$ 。

### 第四節 股債分別優化投資組合

對 SHY 以外標的計算 HRP、IVP 與 MinRisk 權重後，乘上  $1 - P(S_{t+1} = N)$ ，而 SHY 權重則是使用  $P(S_{t+1} = N)$ 。因此所有投資組合都不會使用到 SHY 的任何資訊，無論是 SHY 本身的波動度，或是 SHY 與其他資產間的相關性。完全依賴隱藏式馬可夫模型所預測的機率來決定股債比例。

## 第五節 投資組合比較

### 一、績效

本文將依照以下幾個指標衡量投資組合的表現

#### (1)淨利率

淨利率為投資組合價值成長的百分比，用來衡量投資組合整體獲利能力。

#### (2)波動度

投資組合每日報酬標準差，用來衡量投資組合風險，波動度越高則風險越高。

#### (3)夏普比率（Sharpe Ratio）

同時考慮報酬與風險的指標，是指平均多承受一單位的風險之下，可得的超額報酬。

$$\text{夏普比率} = \frac{\bar{r} - r_f}{\sigma(r)} \times \sqrt{252}$$

其中 $r$ 為投資組合每日報酬，而 $r_f$ 為無風險利率，本文設定 $r_f=0$ 。

#### (4) 索提諾比率（Sortino Ratio）

相較於夏普比率，索提諾比率只關注下方風險的波動度。

$$\text{索提諾比率} = \frac{\bar{r} - r_f}{\sqrt{\sum_{t=1}^T I(r_t < 0)(r_t)^2}}$$

其中 $r_t$ 為投資組合每日報酬，而 $r_f$ 為無風險利率，本文設定 $r_f=0$ 。

#### (5)最大策略虧損（Maximum Drawdown）

策略虧損（Drawdown）是指投資組合從上一次創新高至今下跌的比例。而最大策略虧損則是指策略虧損的最大值，可以衡量投資組合的下方風險，數值越大代表投資組合曾經承受越大的虧損。

$$\text{Drawdown}_{t_i} = \frac{\max_{t=0, \dots, t_i} \{Value\}_t - Value_{t_i}}{\max_{t=0, \dots, t_i} \{Value\}_t}$$

#### (6)最大策略虧損報酬

最大策略虧損報酬是指投資組合每單位最大策略虧損所得到的報酬，此處使

用的策略虧損定義為累積最大淨值減去當下淨值，而非使用百分比計算。

## 二、風險貢獻

資產的風險貢獻 (Risk Contribution) 是指投資組合波動度對資產權重的微分除以投資組合波動度。

$$RC_i = \frac{\partial \sigma}{\partial w_i} w_i = \sum_j w_j \text{cov}(r_i, r_j)$$

風險貢獻值除了可以作為總風險對於資產权重變動的敏感度，且因為  $\sum_i RC_i = \sigma$ ，所以風險貢獻值也可以視為該資產在投資組合風險中的占比。由於資產個別的波動度以及對於其他資產產生的共變異性不同，因此本文聚焦在討論風險貢獻值而非投資組合权重。



## 第四章 實證結果與分析

本章第一節會說明訓練隱藏式馬可夫模型的大盤資料，以及投資組合標的資料。第二節將敘述隱藏式馬可夫模型對於大盤狀態的訓練過程，最終決定狀態數量與參數訓練週期來產出狀態轉換模型。第三節比較分層式風險平價、逆變異數加權與二次規劃求解最小化變異數三種模型。第四節與第五節則是以不同方式結合狀態轉換模型產出的投資組合。第六節探討不同模型下的績效。

### 第一節 資料敘述

本文使用 1990 年 8 月 1 日至 2021 年 12 月 30 日大盤調整後每日報酬作為隱藏式馬可夫模型的訓練資料，其中使用 1990 年 8 月 1 日至 2006 年 12 月 29 日做為訓練資料，來調整模型超參數。投資組合則是由 2007 年 1 月 4 日至 2021 年 12 月 30 日台灣上市公司與 iShares 1-3 年期美國公債 ETF (SHY) 所組成。本文將上市公司依照代碼分類為不同的產業類別，表 1 為各個代碼所表示的產業類別，其中資訊電子類股包含股票代碼開頭為 23、24 與 30 之標的。每種產業的報酬為該產業之中所有上市公司報酬的平均數。SHY 報酬計算方式則是將美金計價的 SHY 報酬乘上美元的報酬，其中美元價格使用臺灣銀行即期買入與即期賣出平均價格計算。

表 1 資產類別

11：水泥	12：食品	13：塑膠	14：紡織纖維	15：電機類股
16：電器電纜	17：化學	18：玻璃陶瓷	19：造紙	20：鋼鐵
21：橡膠	22：汽車	23：資訊電子	25：營建	26：運輸
27：觀光	28：金融保險	29：貿易百貨	SHY：美債	

選用 SHY 而非元大發行的 00719B 的原因是 00719B 成立時間為 2018 年 1 月 19 日，可用的資料期間不到五年，因此使用 SHY 轉換為台幣的報酬替代。圖 2 可以看到 SHY 與 00719B 因同樣為追蹤 ICE 美國政府 1-3 年期債券指數，因此走勢相似。本文交易成本設定為交易成本 0.1% 與證交稅 0.3%，因此買入與賣出為合計 0.5% 的手續費，而 SHY 替代 00719B 因此使用台灣 ETF 的證交稅 0.1% 計算，買賣手續費合計為 0.3%。國內券商的交易手續費原定為 0.1425%，然而大多數人能夠得到 5 至 6 折的手續費折扣，因此設定為約莫 7 折的 0.1%。

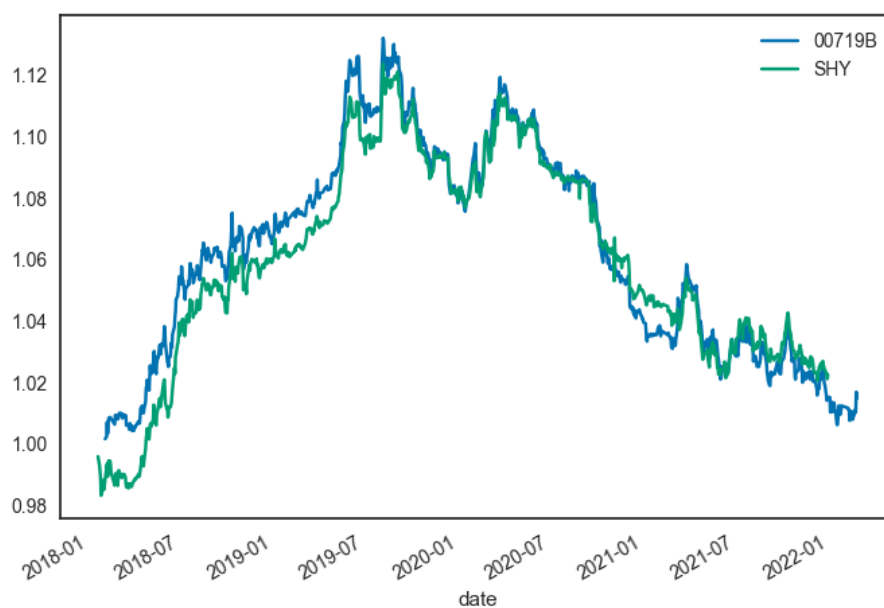


圖 2 以台幣計價之 SHY 累計報酬與 00719B 累計報酬

## 第二節 隱藏式馬可夫模型

本節第一部分討論不同狀態數量的 HMM 對於母體分配的近似程度，以及模型 BIC 值。接著第二部分討論模型中參數的平穩性，使用不同訓練週期長度所估計的結果與訓練資料比較，來決定是否使用移動窗口方式估計，並決定合適的訓練週期。第三部分呈現訓練結果。

### 一、狀態數量

觀察表 2 可以發現，HMM2 變異數較大的狀態平均報酬則較低，反之亦然；然而在 HMM3 與 HMM4 中，平均報酬與變異數並沒有呈現反向的關係。值得注意的是，HMM2\_state2 與 HMM3\_state1 有著近乎相同的分配，因此傾向認為其餘的分配是受市場噪音所干擾。而 Costa & Kwon (2020) 也同樣發現不論是幾個狀態下的 HMM，都會出現同樣的一個狀態，其出現的機率走勢相似。

<sup>1</sup>表 2 大盤訓練期間報酬動差與模型模擬結果之動差

模型	$\mu * 10^4$	$\sigma^2 * 10^4$	Skewness	Kurtosis
大盤報酬	2.24	2.97	-0.0171	2.51
HMM2	1.82	3.00	-0.0803	<b>2.44</b>
HMM2_state1	-5.68	7.10		
HMM2_state2	5.05	1.22		
HMM3	2.52	<b>2.96</b>	<b>-0.0674</b>	2.63
HMM3_state1	5.05	1.10		
HMM3_state2	-3.55	4.55		
HMM3_state3	-2.41	7.60		

<sup>1</sup>本文峰度 (kurtosis) 使用超值峰度 (excess kurtosis)，定義為 kurtosis - 3。

HMM4	<b>2.39</b>	3.02	0.0354	2.71
HMM4_state1	0.05	0.85		
HMM4_state2	-127.0	6.14		
HMM4_state3	140.0	6.78		
HMM4_state4	12.6	2.59		

從表 3 中可觀察不論是母體近似程度來看，或是與母體動差相似程度 HMM3 的表現最佳。然而這兩個衡量標準下，模型之間差異卻不大。

表 3 不同狀態數量模型表現

Model	BIC	Avg. Moments replicaton Rank
HMM2	-24444	2.25
HMM3	<b>-24569</b>	<b>1.25</b>
HMM4	-24390	2.25

Prajogo (2011) 指出可參考模型參數中的轉移矩陣來決定狀態數量。從表 4 觀察到 HMM3 之中狀態 1 與狀態 3 轉換機率都非常低，表示狀態 1 至狀態 3 的路徑多透過狀態 2 的轉換。另外，狀態 2 也有最高的機率轉移至狀態 1。因此在此架構下，HMM2 會是比 HMM3 還要好的選擇。

表 4 HMM2 與 HMM3 轉移矩陣

	State 1	State 2
State 1	0.955	0.045
State 2	0.020	0.980

	State 1	State 2	State 3
State 1	0.922	0.074	0.04
State 2	0.626	0.263	0.111
State 3	0.005	0.041	0.953



## 二、參數平穩性

由於市場長期結構的變化，因此隱藏式馬可夫模型訓練參數也需隨著時間變化。圖 3 可以發現隨著時間推進，大盤變異數逐漸降低，且在出現 2008 年金融海嘯與 2020 年 COVID-19 之後，變異數都會因空頭影響而上升。然而值得注意的是 2015 年底的股災並沒有造成變異數上升。Bulla et al. (2011) 提出使用 2000 天的訓練週期，2000 天也就是平均一次景氣循環的時間。本文根據國家發展委員會認定的景氣循環中，1990 年 8 月至 2005 年 2 月四次景氣循環平均長度，也就是約莫 800 天的訓練資料。接著利用 Visser (2000) 提出的拔靴法，讓模型模擬出各 1000 條含有 800 個資料點的時間序列，再使用 HMM 對該數列進行訓練，藉此來計算 HMM 參數的 95% 信賴區間。

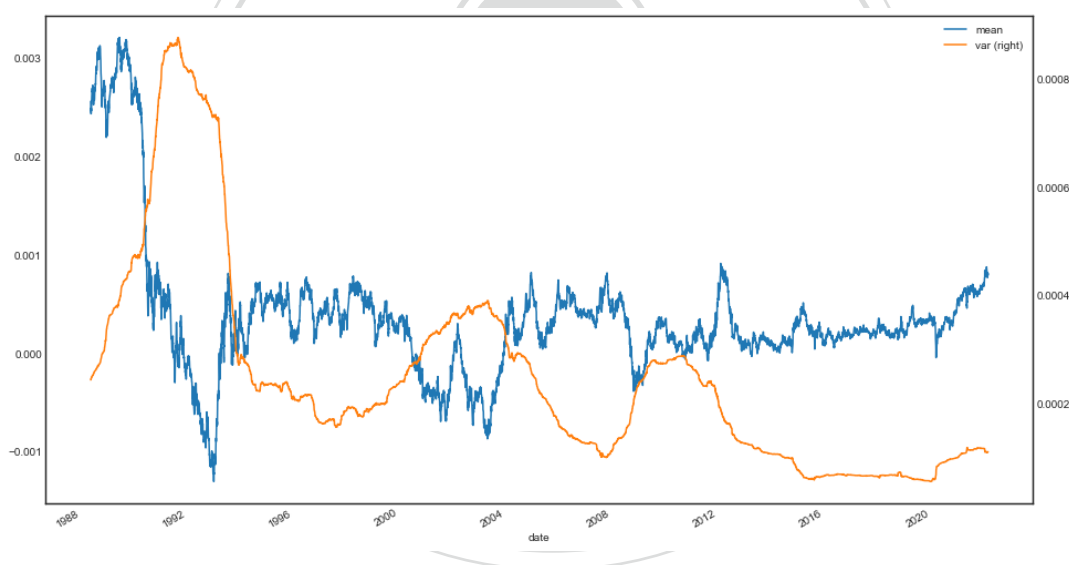


圖 3 大盤報酬 800 天的移動平均與變異數

在進行移動窗口訓練之前，由於隱藏式馬可夫模型存在 label-switching 的問題：在每次訓練時，即使背後所代表的分配相似，仍可能被分配為不同狀態，因此我們需確定狀態間的特徵是固定的，並藉由該特徵來固定狀態編號。表 2 顯示 HMM2 分為低變異數高報酬與高變異數低報酬兩個狀態，而 HMM3 中報酬最高的分配波動度最低，報酬最低的分配波動度次之。表 5 可以看到 HMM3 代表的報酬關係，每次訓練出的模型不同，因此後續研究將著重在 HMM2 之中，並

且將變異數較高的狀態定義為狀態 2。

表 5 模型與訓練集平均數與報酬關係相同占比

HMM2 1472/3618

HMM3 134/3618

接著探討各參數是否隨著時間變化，圖 5 可以看到除了狀態 2 的平均數因狀態 2 變異數較大的原因而落在信賴區間內，其餘參數都有許多落在信賴區間外的值，且轉移矩陣中的對角元素則是大幅超出信賴區間。因此本文將使用 800 日的移動窗口訓練隱藏式馬可夫模型。

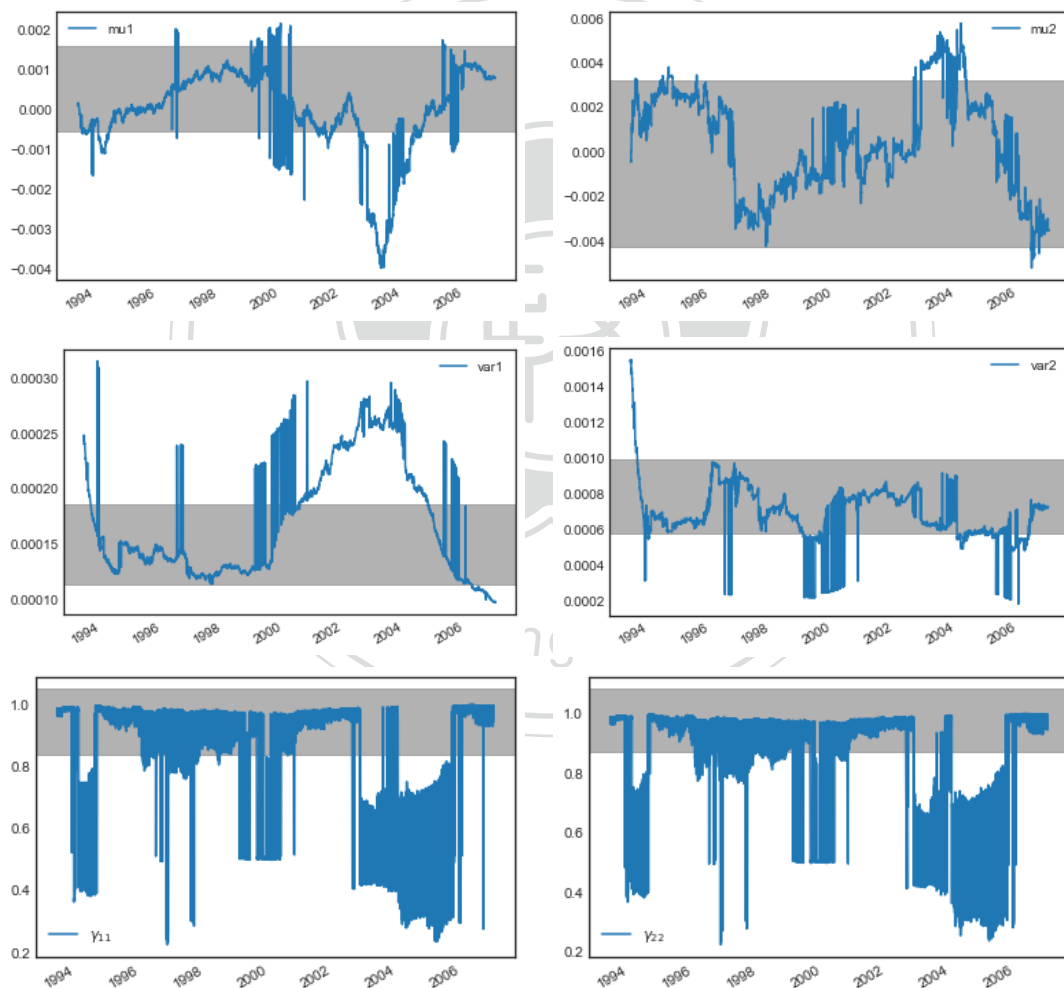


圖 4 HMM2 800 天訓練結果（灰色區塊為 95%信賴區間）

## 二、預測結果

從圖 5 可以看到 HMM2 能成功分出波動性較大的時期，圖 4-9 也能觀察到熊市的劇烈下跌以及隨之而來的回升多被分配到狀態 2。另外可以觀察到即使是較短暫的 2020 年股市大幅下跌以及後續的迅速回升，模型仍可以將其判定為波動大的狀態 2。

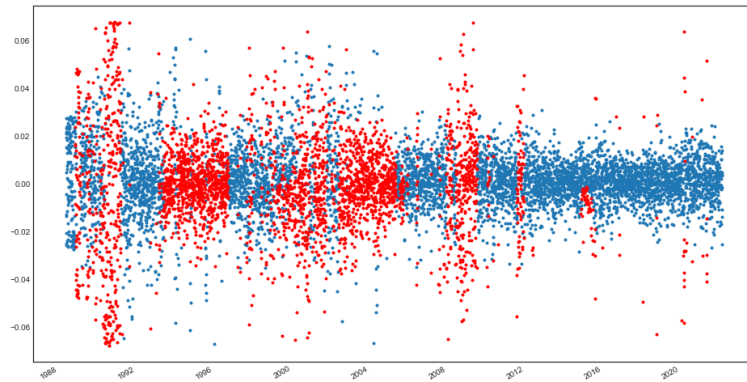


圖 5 大盤報酬散佈圖（紅色為狀態 2）

從圖 6 大盤調整後收盤價（上）與 HMM2 預測為狀態 2 機率（下）圖 6 可以觀察到即使使用變異數作為判別狀態的依據，狀態 2 仍多為股市空頭期間。即使是 2020 年因 COVID-19 疫情急促的出現下跌後又回升，模型仍能夠判別出該次的下跌。

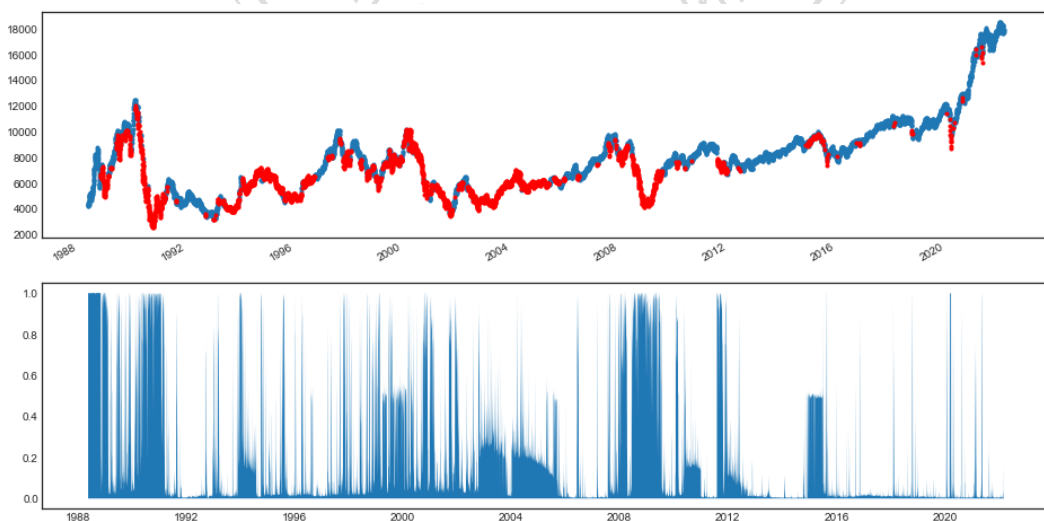


圖 6 大盤調整後收盤價（上）與 HMM2 預測為狀態 2 機率（下）

### 第三節 無限制股債比例投組

#### 一、策略績效

##### (1) 分層式風險平價投組 (HRP)

圖 7 可以看到 HRP 所計算的股票比例大多落在 0.6 到 0.8 的區間內，股票比例並沒有因股市出現較大波動而降低。績效在區間內賺了 101%，但策略對於下方風險的控制較差，在 2008 年金融危機與 2020 年 COVID-19 疫情這兩段時間分別有 37%與 22%的策略虧損。

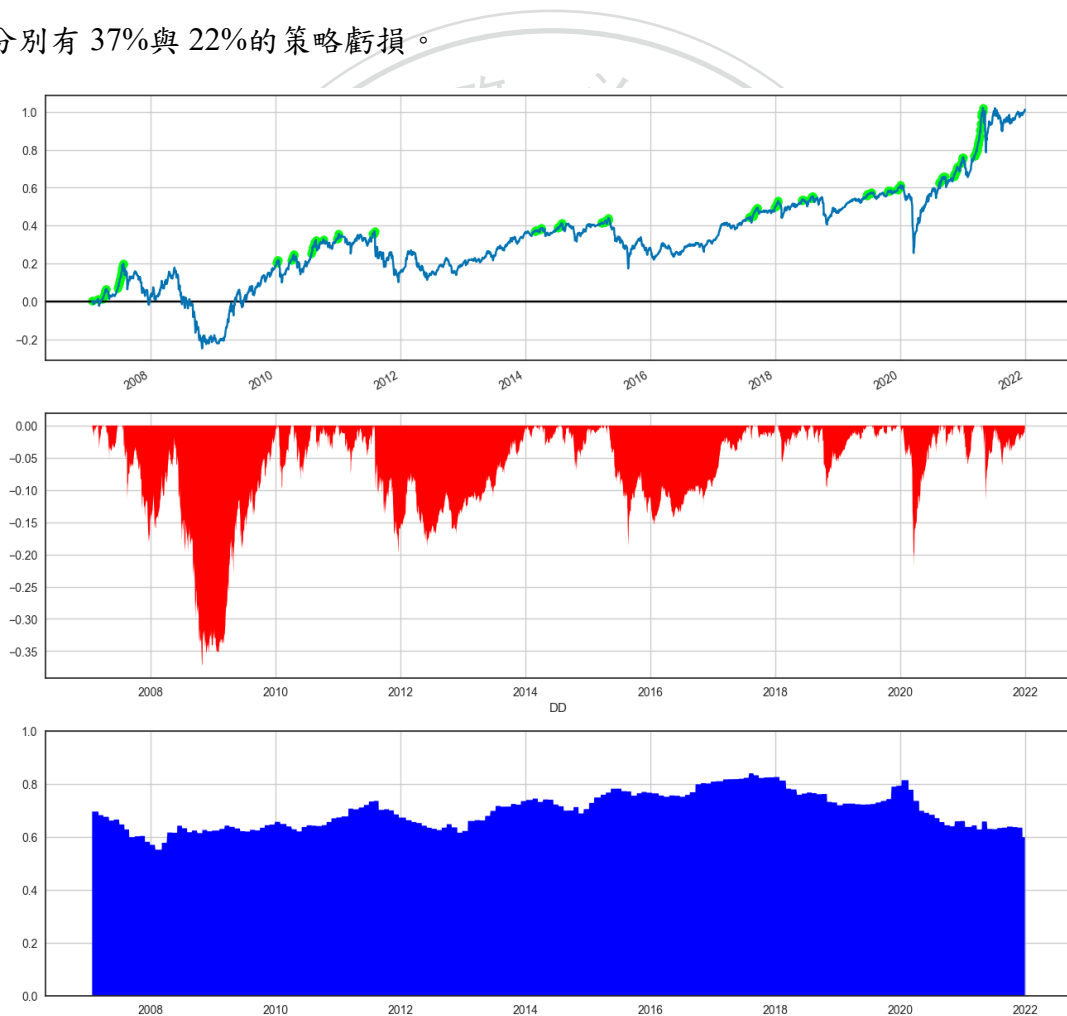


圖 7 HRP 二十日換倉績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

## (2) 逆變異數加權投組 (IVP)

IVP 策略整體賺了 78%。從圖 8 可以看到在初期投入 IVP 策略較少資金在股票市場，也因此金融危機的時期能有較少的策略虧損，當時最大策略虧損為 15.2%，後續也隨著股票市場波動較小而提高股票比例，因此在 2020 年時有 18.8% 的策略虧損。在 2020 年股票市場較大波動的下跌與回升後，策略也降低了股票的比例，因此淨利率低於 HRP。根據 De Prado (2016) 所模擬的結果，IVP 更容易受系統性風險影響，然而本文中 IVP 因股票比例較少，因此不論是金融危機還是 COVID-19 時期，所承受的損失皆小於 HRP。

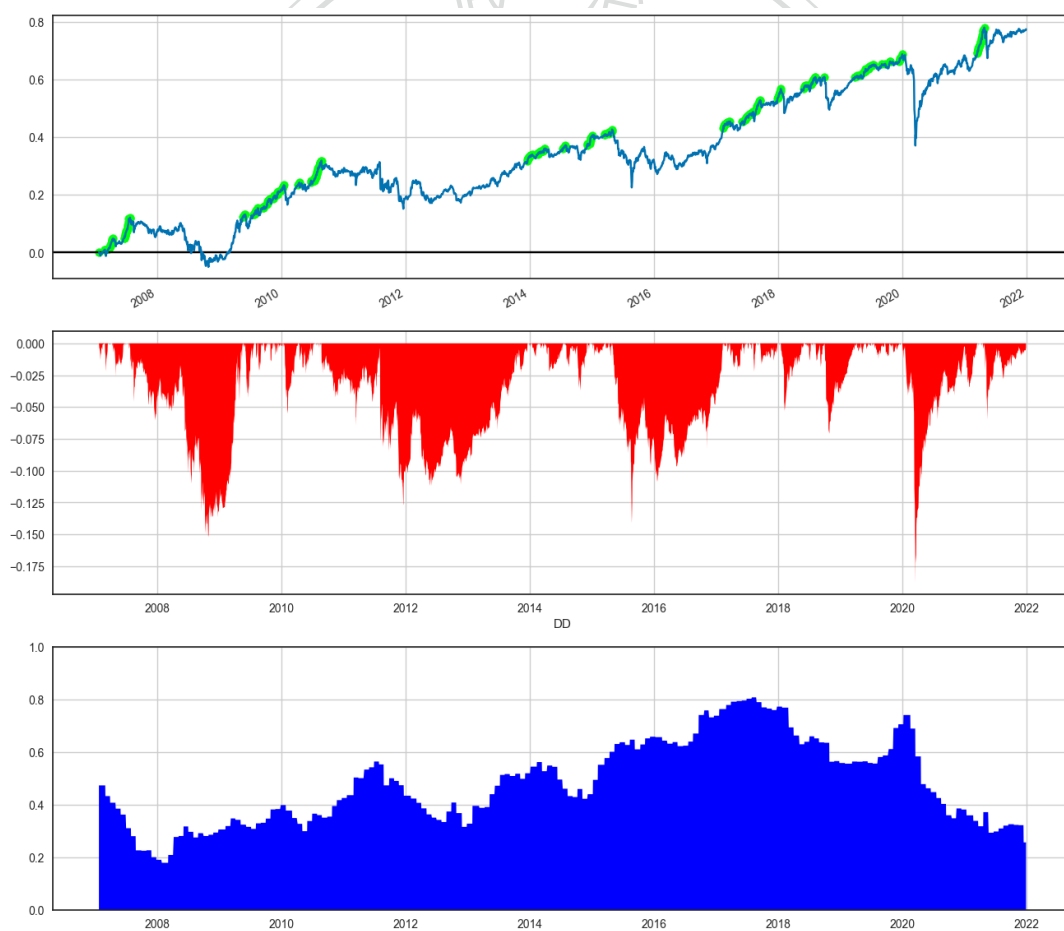


圖 8 IVP 二十日換倉績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

### (3) 最小化變異數投組 (MinRisk)

MinRisk 的股票比例是三個策略中最低的，也因此承受了最少的策略虧損，每次策略虧損都控制在 8% 以內。然而策略過度保守導致在回測區間內報酬只有 30.7% 而已。由於 MinRisk 是三個投資組合中債券占比最高的，因此此投組也是三個投組之中在 2020 年疫情之後的多頭唯一沒有創新高的策略。債券作為投資組合 19 個標的中的其中一個，卻經常占比高於 80%，也驗證了使用二次規劃計算的投資組合容易過度集中在部分標的。

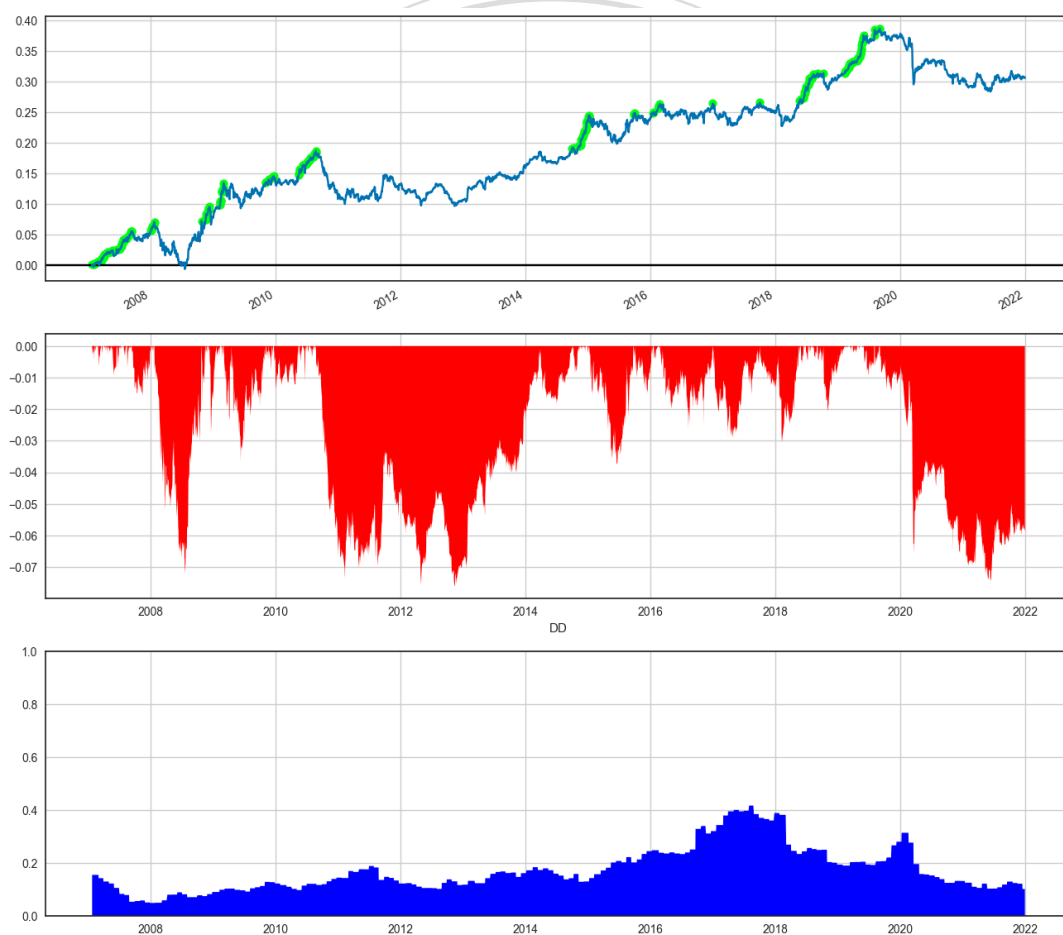


圖 9 MinRisk 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

## 第四節 狀態轉換機率投資組合

本節策略與第二節不同之處在於加入了 HMM 所輸出下一期為狀態 1 機率做為股票占比的限制式，期望能夠藉由 HMM 來配合市場波動調整股票的比例，進而達到更好的績效。為了避免過度交易造成較高的交易成本，本節投資組合只在狀態 1 機率大於 98%與小於 51%時更改投資組合權重，其中機率的選定是由訓練期間 HMM 輸出機率的第 80 百分位數與第 20 百分位數所決定。

### 一、策略績效

#### (1) 狀態轉換分層式風險平價投組 (HRP\_rs)

HRP\_rs 對比 HRP 更加靈活，使用 HMM 模型來減少較波動時的股票持倉使 HRP\_rs 的策略虧損較小。2008 年與 2020 年的最大策略虧損分別為 17.4%與 19.7%，皆小於 HRP 同時期的最大策略虧損。HRP\_rs 最終的淨收益為 125.6%，勝出 HRP，投資組合整體來說能降低下方風險的同時，增加獲利能力。然而若看 HRP\_rs 在 2020 年之前的子區間，可以發現該投資組合是比 HRP 差的。

#### (2) 狀態轉換最小化變異數投組 (MinRisk\_rs)

MinRisk\_rs 由於限制了股票比例，不再將大部分資產投入債市，因此得到了更高的淨收益。然而隨之而來的是承受了更大的風險，投資組合 2008 年與 2020 年的最大策略虧損分別為 22.3%與 14.1%。可以發現同樣的股債比例之下，MinRisk\_rs 與 HRP\_rs 仍產出不同特性的績效，MinRisk\_rs 在面對金融海嘯時承受了較大的虧損，但投資組合的績效卻較平滑，相較於 HRP\_rs 在 2020 年初時只有不到 40%的獲利，MinRisk\_rs 卻已經達到了超過 80%的獲利。

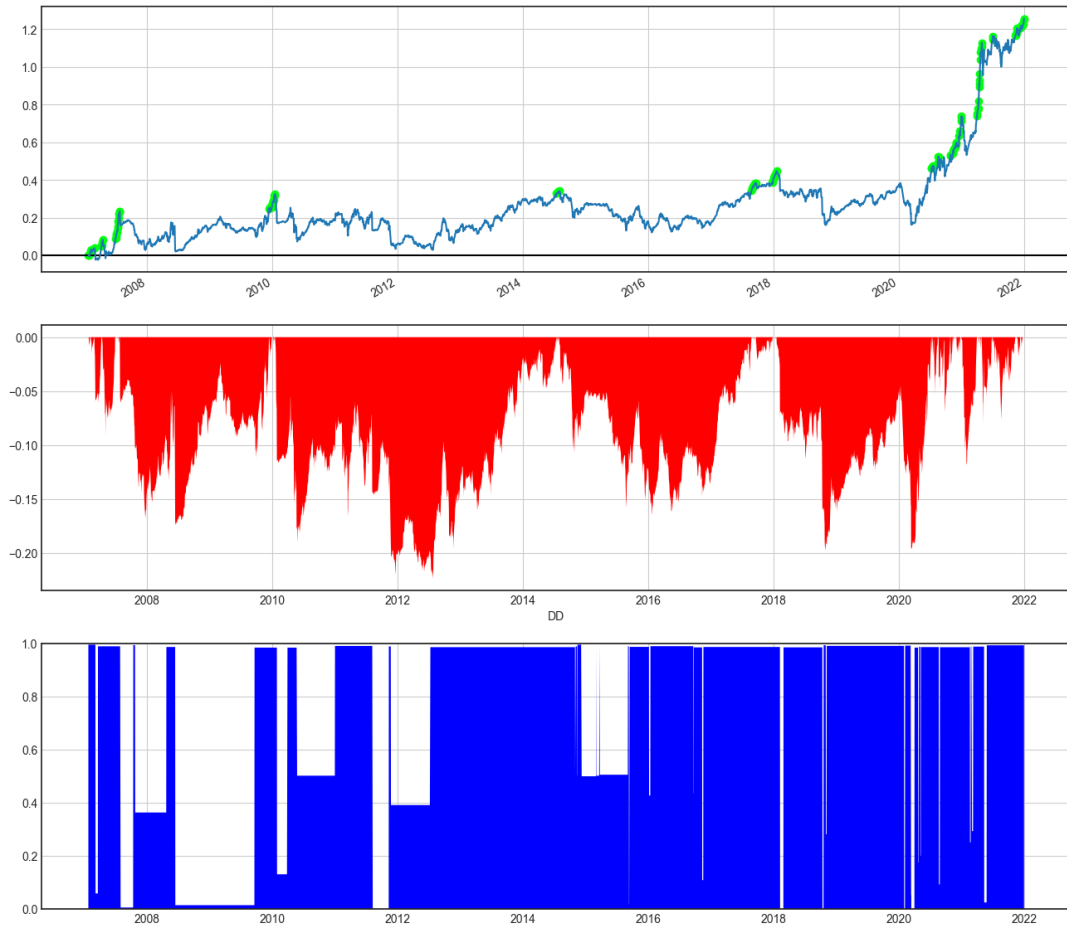


圖 10 HRP<sub>rs</sub> 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)



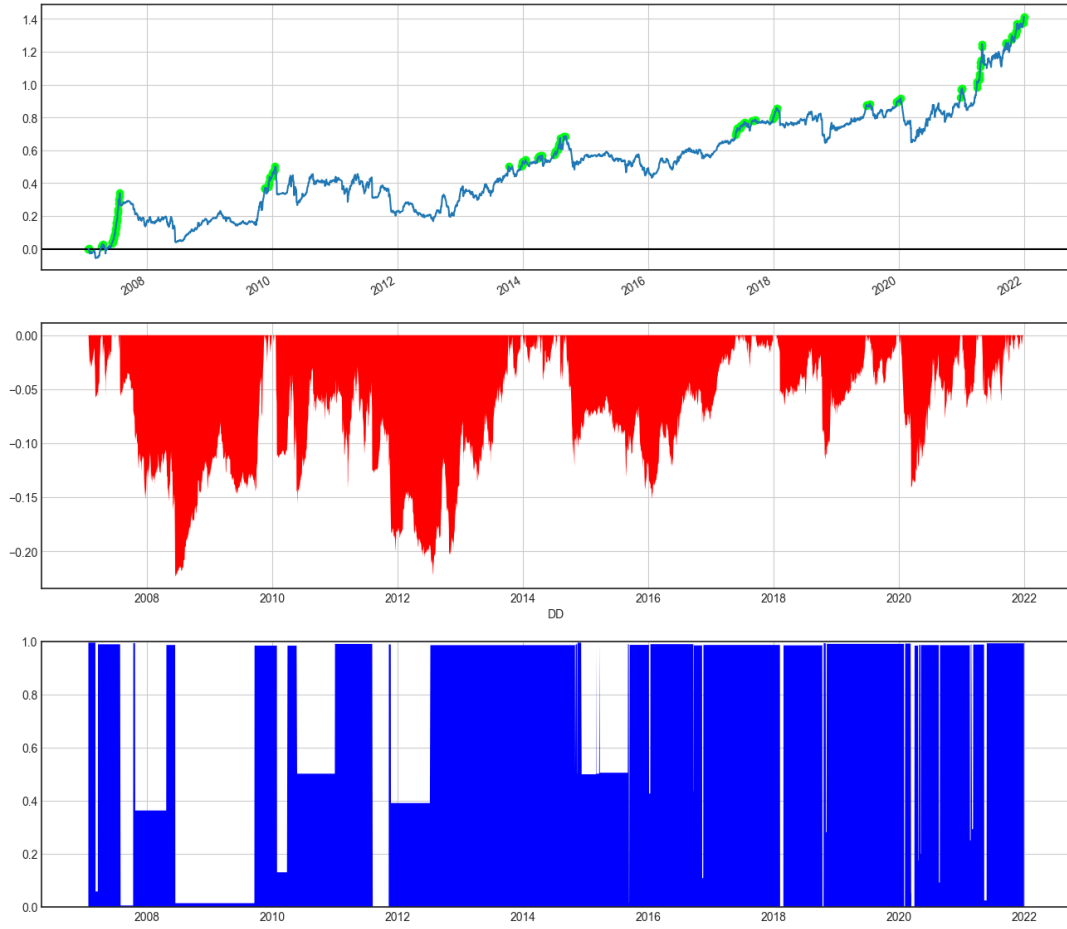


圖 11 MinRisk\_rs 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

## 第五節 股債分別優化

本節單獨對股票市場使用分層式風險平價、逆變異數與最小化變異數三種方式計算權重，並使用下期為狀態 1 的機率作為股市權重。本節同樣只在狀態 1 機率大於 98%與小於 51%時更改投資組合權重。

### 一、策略績效

#### (1) 狀態轉換分層式風險平價投組 (HRP\_rs2)

HRP\_rs2 在 2008 年與 2020 年的最大策略虧損分別為 20.0%與 14.6%，且與 HRP\_rs 相比 HRP\_rs2 的權益曲線較平滑，在 2020 年之前 HRP\_rs2 比 HRP 更好，表示對於 HRP 相關的投資組合而言，捨去債券與股市的相關性，並直接使用狀態轉換機率進行權重計算，能夠產出績效最佳的投資組合。

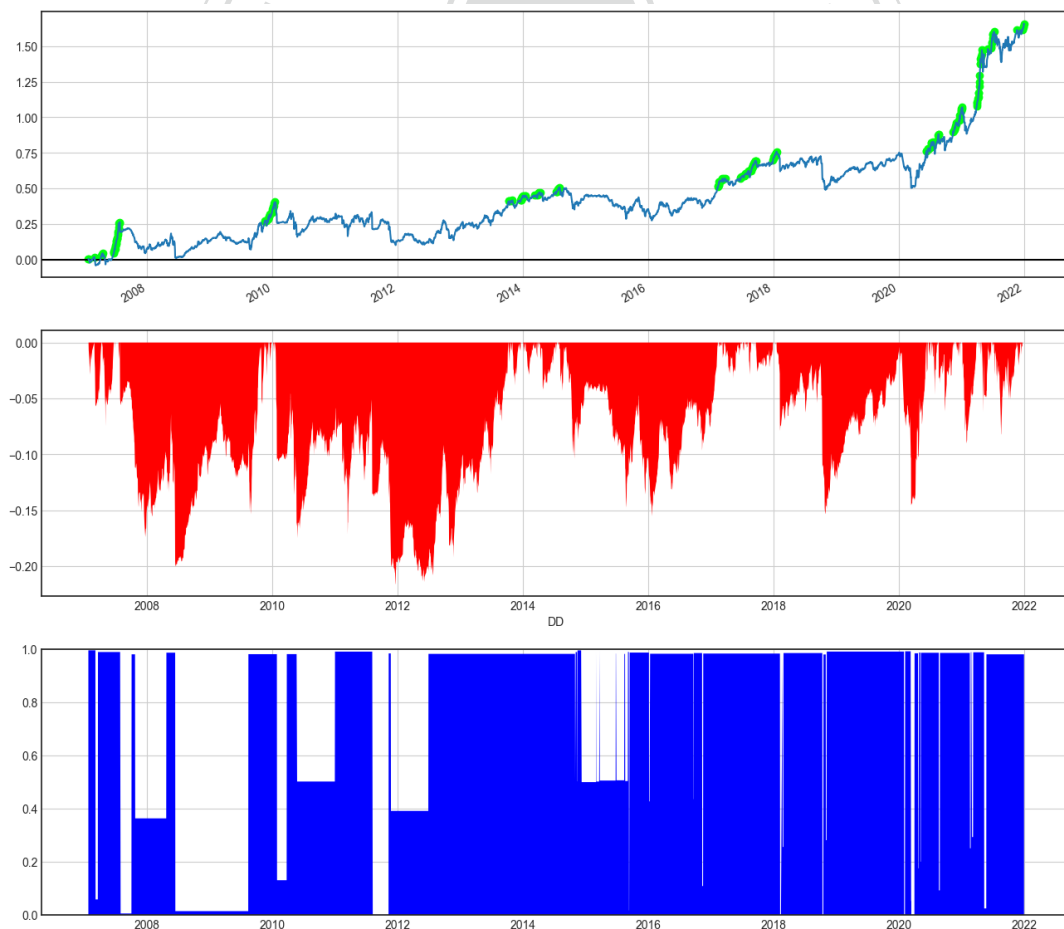


圖 12 HRP\_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

## (2) 狀態轉換逆變異數加權投組 (IVP\_rs2)

IVP\_rs2 與 IVP 相比獲利能力更佳。原因在於 IVP 使用 SHY 與股市之間變異數的比例來決定股債分配，因此在股市剛離開大波動時期時，IVP 會因為使用歷史波動而仍選擇投放較少資金在股市，而 IVP\_rs2 使用狀態轉換模型，可以更快速的配合股市高波動與低波動時期之間的轉變，因此在 2020 年 IVP\_rs2 的策略虧損較低，且在後續股票市場回升時，IVP\_rs2 能夠選擇投入較高的資金在股市中，進而提高淨利率。

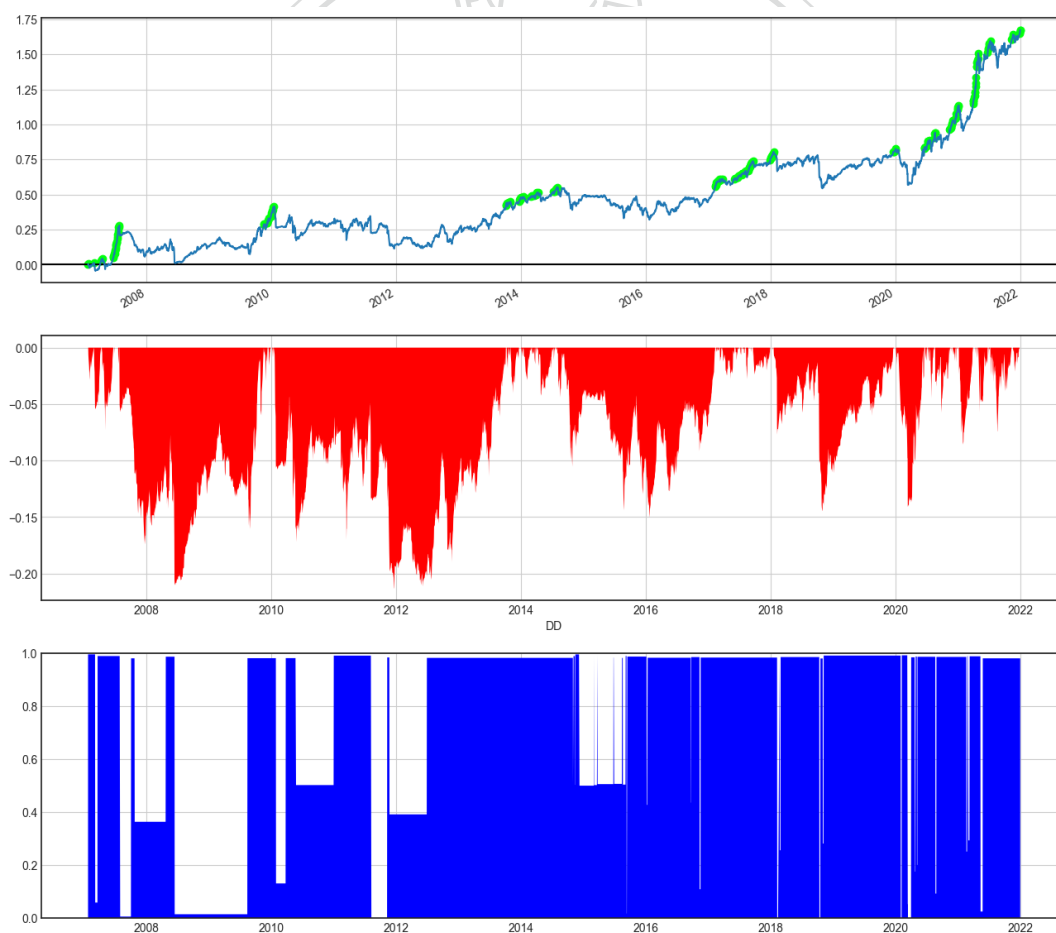


圖 13 IVP\_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

### (3) 狀態轉換最小化變異數投組 (MinRisk\_rs2)

MinRisk\_rs2 績效表現優於 MinRisk\_rs，權益曲線與 MinRisk 相似。

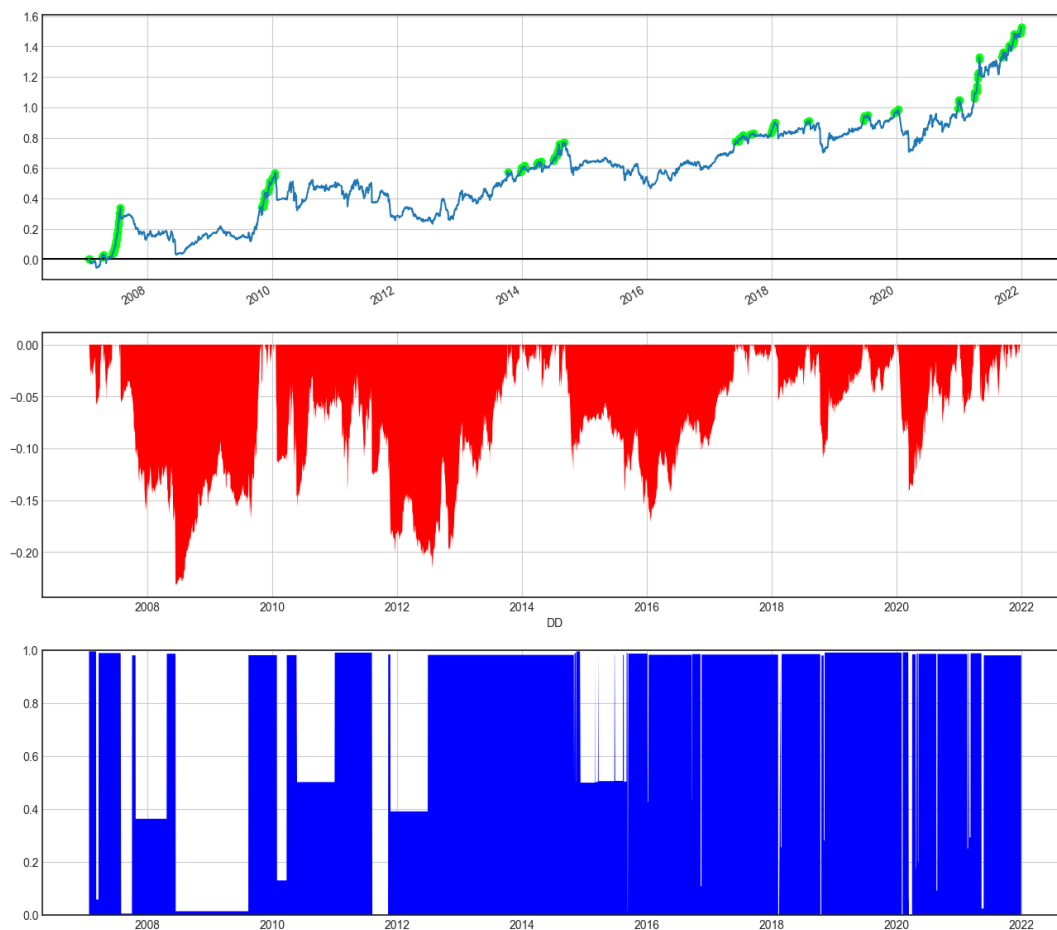


圖 14 MinRisk\_rs2 績效 (上) 策略虧損 (中) 股票占比 (下)

## 第六節 投資組合比較

### 一、回測績效

表 6 策略績效比較表為不同投資組合建構方式與其加入狀態轉換機率前後的績效比較。每種投資組合在配合狀態轉換機率後都能得到更高的淨利率，進而得到較高的夏普比率，也提升了投資組合的最大策略虧損報酬，因此考慮狀態轉換的投資組合績效會優於未考慮狀態轉換的投資組合。另外，可以發現投資組合在加入狀態轉換模型後，相比於淨利率的提升，交易成本上升幅度較低，原因在於狀態轉換機率的閾值能減少不必要的交易。

表 6 策略績效比較表

	淨利率 (%)	$\sigma^*$ $10^3$	夏普 比率	索提 諾比 率	最大策略 虧損 (%)	最大策 略虧損 報酬	交易成 本 (%)
HRP	101.2	7.10	0.497	0.652	37.4	2.26	7.66
HRP_rs	125.6	7.07	0.571	0.757	22.4	4.24	18.4
HRP_rs2	165.8	6.77	0.700	0.909	21.6	5.46	19.2
IVP	77.6	4.20	0.645	0.836	18.8	2.44	1.95
IVP_rs2	167.4	6.60	0.720	0.932	21.3	5.55	19.2
MinRisk	30.8	2.10	0.589	0.839	7.61	2.98	2.52
MinRisk_rs	141.4	6.16	0.689	0.910	22.3	4.25	19.0
MinRisk_rs2	152.9	6.23	0.717	0.949	23.2	4.54	19.8

HRP 在原始投資組合就投入了較高的資金在股票市場，因此是原始投資組合中淨利率最高的。在加入了狀態轉換機率後，能夠順應市場變化調倉，因此提高了投資組合淨利率，並降低波動性。無論是夏普比率還是最大策略虧損報酬，HRP\_rs2 皆比 HRP\_rs 高。IVP 淨利率與波動度皆介於 HRP 與 MinRisk 之間，夏普比率則是三個原始策略中最高。而 IVP\_rs2 不論是夏普比率還是最大策略虧損

報酬都是所有投資組合之中最佳的。MinRisk 則是原始投資組合中最大策略虧損報酬最高的，然而該投資組合淨利率遠低於其他策略，MinRisk\_rs 與 MinRisk\_rs2 則改善了原始投資組合債券比例較高的問題，即使波動度與最大策略虧損提升了，仍在其他衡量指標下仍勝過未加入狀態轉換的投資組合。

此外，不論是比較 HRP\_rs 與 HRP\_rs2 或是 MinRisk\_rs 與 MinRisk\_rs2，都能發現在給定股債的比例之下，不考慮股債關係的投資組合會優於考慮股債關係的投資組合。從圖 15 可以觀察到 MinRisk\_rs2 的共變異數矩陣條件數都低於 MinRisk\_rs，因此該投資組合在樣本外的表現更加穩定；然而 HRP\_rs 表現卻比 MinRisk\_rs 差，且 HRP\_rs2 的改善幅度也較佳。

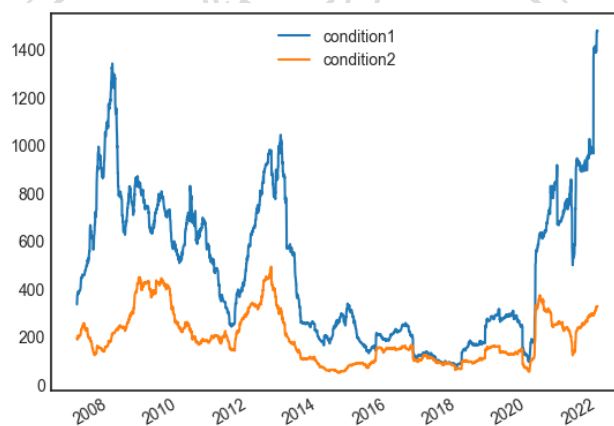


圖 15 計算權重時共變異數矩陣的條件數，藍色與橘色分別為納入債券與未納入債券的共變異數矩陣

另外，IVP 為加入狀態轉換模型前後皆為最好的投資組合，此結果與 De Prado (2016) 所述不同。從圖 16 中可以看到用產業當作資產分類時，資產與資產間的相關性非常相似，因此 IVP 投資組合即使忽略了資產的相關性仍能保有較好的績效。HRP 分層中最底層為電機類股（代號 15）與資訊電子類股（代號 23），相關性為 0.86，而產業間相關性最低的則為鋼鐵類股（代號 20）與觀光類股（代號 27），相關性為 0.52，其中觀光類股被分到了股票的最外層。由此可見由於資產間關係相似，所有資產的相關性皆大於 0.5，減弱了 HRP 分層效果。HRP 中 SHY 作為最外層的資產，與整體股市形成最後的聚合的過程不會採納其與股市負相關

的特性，因此可能為 HRP\_rs 比 HRP\_rs2 表現差的原因之一。

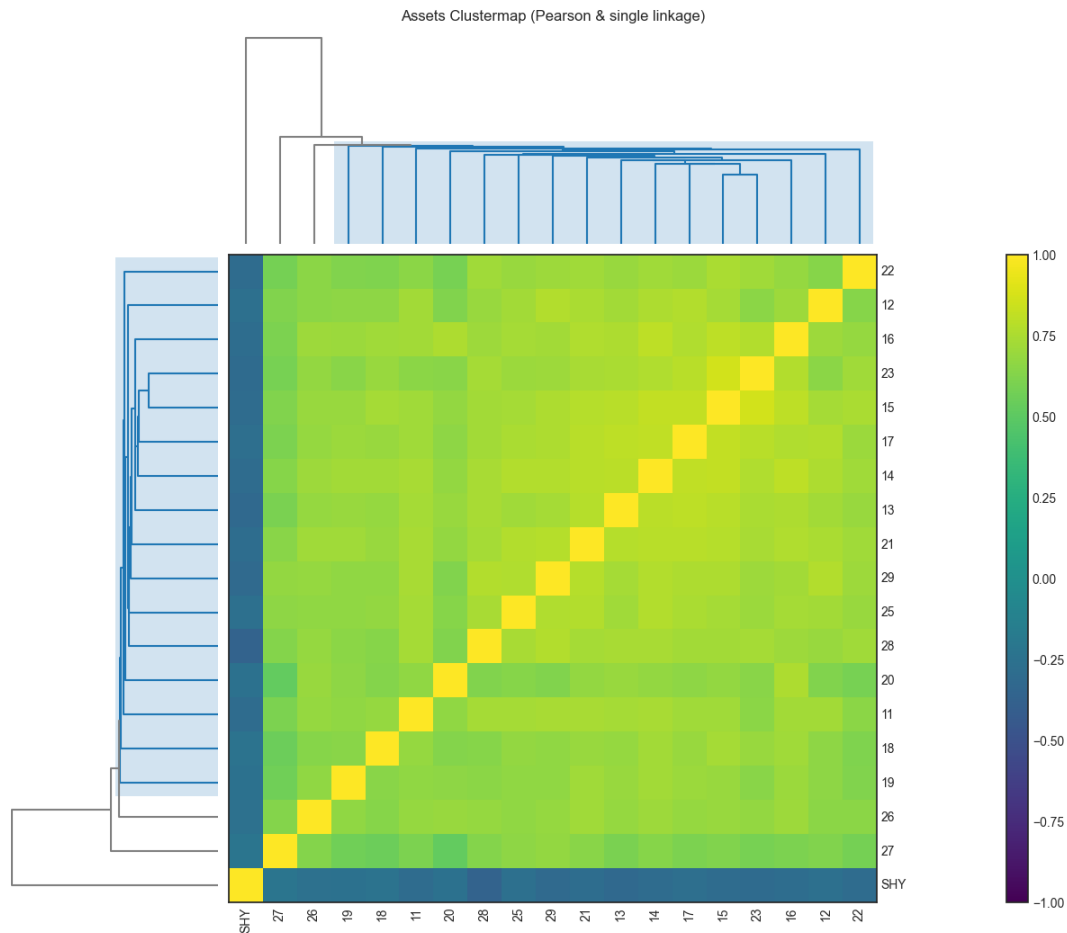


圖 16 資產在交易期間相關性熱力圖與分層圖

## 二、風險貢獻程度

圖 17 至圖 19 為不同標的在投資組合中平均風險貢獻值，其中使用權重計算後的 250 筆資料來估計共變異數矩陣，來觀察投資組合在持倉時所面對的風險。HRP 是唯一在股票部位曝險較多的投資組合，導致其債券的風險貢獻程度為負。然而在 HRP\_rs 與 HRP\_rs2 中就解決了這個問題，兩者皆提高了債券的曝險。HRP\_rs 比起 HRP\_rs2 更集中在造紙類股（代號 19）與觀光類股（代號 27）之中。代表這些產業類股與美債的關係與其他產業不同，導致這些產業在有美債的分層中移到了較上層的分類。

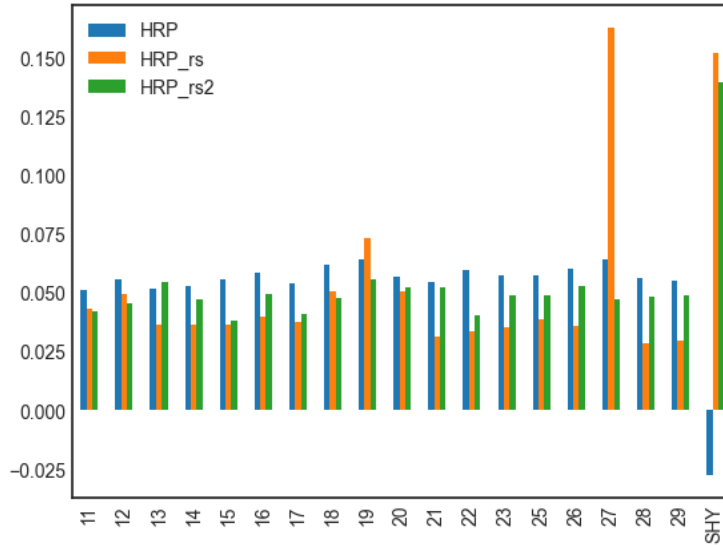


圖 17 HRP 平均風險貢獻值

圖 18 可以觀察到 IVP 策略風險貢獻值較平均，表示 IVP 投資組合在樣本外仍可以有效的分散風險，IVP\_rs2 則是一樣改善了 SHY 曝險較低的問題。從風險貢獻的角度切入，IVP 能較平均分散風險。

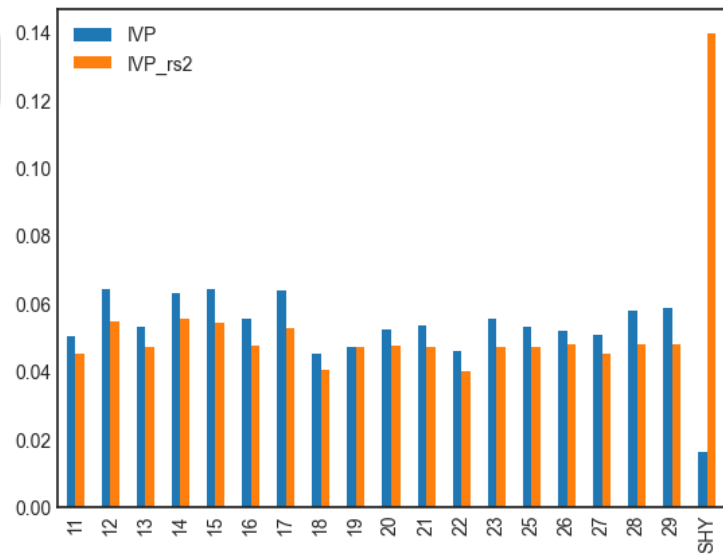


圖 18 IVP 平均風險貢獻值

圖 19 可以看到透過限制股票比例能夠改善 MinRisk 在債券過度曝險的問題，然而 MinRisk\_rs 與 MinRisk\_rs2 仍會在股票市場中選擇少數標的集中曝險，因此 MinRisk 在加入狀態轉換機率後，仍存在集中曝險的問題。



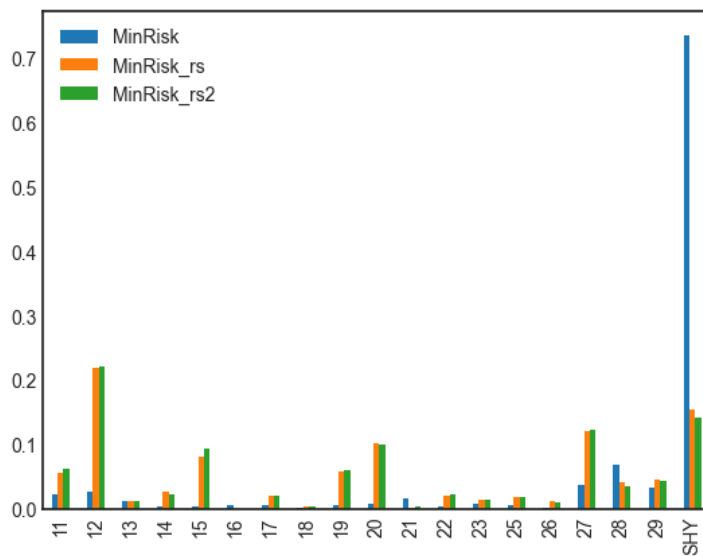


圖 19 MinRisk 平均風險貢獻值



## 第五章 結論與後續建議

本文利用隱藏式馬可夫模型對股市進行分析，最後可將股市時間序列分為低波動高報酬以及高波動低報酬的兩種狀態。投資人能夠透過狀態轉換機率來對投資組合部位進行動態調整，進而有效降低投資組合的下方風險並提升獲利能力。透過不同投資組合在加入狀態轉換前後的比較發現，不論是夏普比率、索提諾比率或是最大策略虧損報酬，加入狀態轉換機率的投資組合表現都較佳。

De Prado (2016) 提到使用二次規劃的 CLA (Critical Line Algorithm) 將資金集中在部分標的中，因此容易受非系統性風險影響，而 IVP 無視資產間的共變異性使得投資組合容易受系統性風險影響，HRP 則是能夠在考慮資產間的相關性的同時分散投資。在本文的實證可以發現 HRP 在原始投資組合中表現並不佳。由於 MinRisk 將資金集中在債券市場，而債券波動度較低，導致其即使單獨在債券大規模曝險，仍比股市的整體風險低；而股市中產業間的相關性皆很高，導致 HRP 的分層架構相似，使 HRP 失去相較於 IVP 的優勢。因此在原始投資組合中，IVP 的表現最佳。討論持倉時的風險貢獻值可以發現，IVP 在分散風險的部分做的最好，此處的原因與 HRP 表現遜於 IVP 一致，是源自於股市中產業間的相關性較高，導致分層架構失去優勢。

與 De Prado (2016) 使用的 CLA 不同，本文使用目標函式為最小化變數的權重 MinRisk 來做比較。MinRisk 在原始策略中過度集中在債券，如同 CLA 一樣無法有效地分散投資。然而債券市場在資料期間並沒有出現與股市無關的非系統性變異，因此 MinRisk 債券權重較固定，並無出現大幅度換倉而造成過高的交易成本，此處與 De Prado (2016) 所模擬的結果不同。MinRisk\_rs 與 MinRisk\_rs2 即使提高了股票比例，但因為產業之間的相關性較固定，因此換倉比例並不比 HRP 高。

後續研究中，應著重在提升狀態轉換模型的分類能力，並且優化對於狀態轉換機率的應用。可加入有別於大盤報酬的特徵到隱藏式馬可夫模型中，或是使用

適應性隱藏式馬可夫模型 (Adaptive Hidden Markov Model) 來應對金融市場的變化。也可使用更靈活的投資組合設定，來改善交易成本過高的問題。此外，關於投資組合之間的比較，可參考 Bailey et al. (2012) 提出的概率性夏普比率 (Probabilistic Sharpe Ratio)，亦或是 Lo (2002) 提出夏普比率的信賴區間。



## 參考文獻

- Ang, A., & Bekaert, G. (2002). International asset allocation with regime shifts. *The Review of Financial Studies*, 15(4), 1137-1187.
- Bailey, D. H., & Lopez de Prado, M. (2012). The Sharpe ratio efficient frontier. *Journal of Risk*, 15(2), 13.
- Bulla, J., Mergner, S., Bulla, I., Sesboüé, A., & Chesneau, C. (2011). Markov-switching asset allocation: Do profitable strategies exist?. *Journal of Asset Management*, 12(5), 310-321.
- Cajas, D. (2022). Riskfolio-lib (3.0.0). Retrieved from <https://github.com/dcajasn/Riskfolio-Lib>
- Costa, G., & Kwon, R. (2020). A Regime-Switching Factor Model for Mean-Variance Optimization. *Journal of Risk*.
- De Prado, M. L. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *The Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59-69.
- Konstantinov, G., Chorus, A., & Rebmann, J. (2020). A network and machine learning approach to factor, asset, and blended allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 46(6), 54-71.
- Kritzman, M., Page, S., & Turkington, D. (2012). Regime shifts: Implications for dynamic strategies (corrected). *Financial Analysts Journal*, 68(3), 22-39.
- Lo, A. W. (2002). The statistics of Sharpe ratios. *Financial analysts journal*, 58(4), 36-52.
- Meucci, A. (2009). Managing diversification. *Risk*, 74-79.
- Nystrup, P. (2014). Regime-based asset allocation. Do profitable strategies exist. *Master's thesis, Technical University of Denmark*.
- Nystrup, P., Madsen, H., & Lindström, E. (2017). Long memory of financial time series

and hidden Markov models with time-varying parameters. *Journal of Forecasting*, 36(8), 989-1002.

Papenbrock, J. (2011). *Asset Clusters and Asset Networks in Financial Risk Management and Portfolio Optimization* (Doctoral dissertation, Dissertation, Karlsruhe, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2011).

Pfizinger, J., & Katzke, N. (2019). A constrained hierarchical risk parity algorithm with cluster-based capital allocation. *Stellenbosch University, Department of Economics*.

Prajogo, A. U. (2011). Analyzing patterns in the equity market: ETF investor sentiment and corporate cash holding. Princeton University.

Visser, I., Raijmakers, M. E., & Molenaar, P. C. (2000). Confidence intervals for hidden Markov model parameters. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 53(2), 317-327.

Wang, M., Lin, Y. H., & Mikhelson, I. (2020). Regime-switching factor investing with hidden Markov models. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(12), 311.

Yue, S., Wang, X., & Wei, M. (2008). Application of two-order difference to gap statistic. *Transactions of Tianjin University*, 14(3), 217-221.