

國立政治大學風險管理與保險學系碩士班

碩士論文

臺灣的分紅壽險選擇權與保證利益的時間價值

TIME VALUE OF OPTIONS AND GUARANTEES OF
TAIWAN'S PARTICIPATING LIFE INSURANCE



指導教授：蔡政憲 博士

研究生：林耕伍 撰

中華民國 111 年 7 月

摘要

近年受疫情與經濟大環境影響，人們趨向穩健理財，因此具保本與投資雙重性質的分紅保單逐漸成為熱門商品。再者，由於近期臺灣逐步接軌IFRS 17，保單評價回歸現時基礎，因此讓近期銷量增長的分紅保單評價成為關注的焦點，但IFRS 17對於分紅保單中關於未來費差、死差、利差的保單期間未實現價值變化的衡量僅文字上原則性規範，並未提供實際做法，故本文透過文獻與精算會計報告回顧挑選實務上較為常見的作法：隨機情境法，用來衡量市面上的分紅保單關於未實現價值變化部分，此價值變化部分也就是所謂的選擇權與保證利益的時間價值，最後根據保單計算結果提出建議。

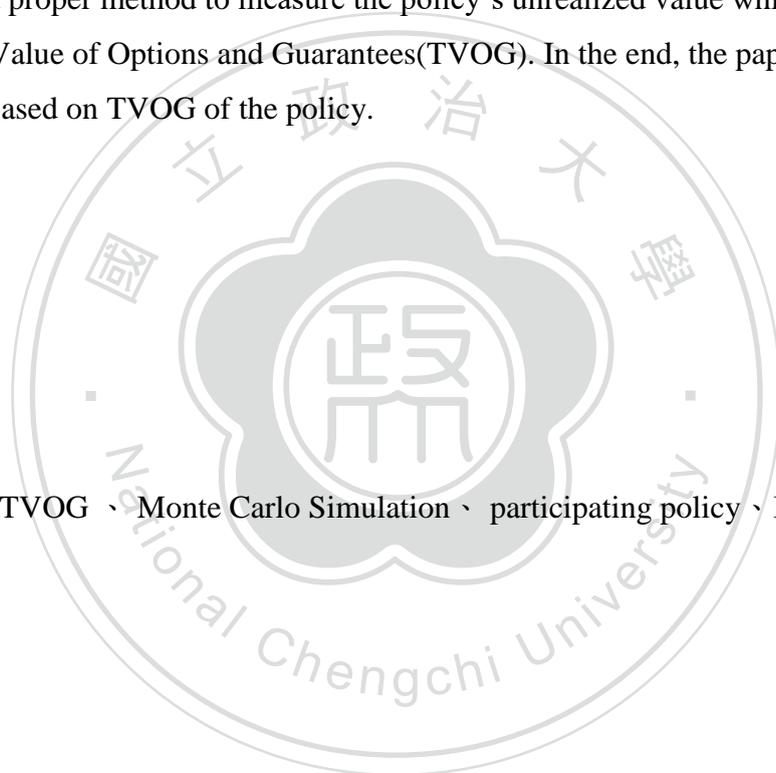
關鍵詞：TVOG、蒙地卡羅模擬、分紅保單、IFRS 17



Abstract

Due to the impact of COVID-19 and economic environment, people manage their wealth more conservative, which makes participating policies with guarantees more popular. On the other hand, since insurance companies in Taiwan have gradually phased in IFRS 17 emphasizing on fair valuation of the policy on the market basis, the valuation of participating policies has become more and more important; however, IFRS 17 doesn't provide the details of measuring unrealized value regarding expense margin, mortality margin, and interest margin. Therefore, this paper reviews literature and actuarial accounting reports and finds that stochastic modeling is a proper method to measure the policy's unrealized value which is so-called Time Value of Options and Guarantees(TVOG). In the end, the paper provides suggestions based on TVOG of the policy.

Keywords : TVOG 、 Monte Carlo Simulation 、 participating policy 、 IFRS 17



目次

第一章 緒論	1
第一節 研究背景.....	1
第二節 研究動機與目的.....	2
第三節 研究方法與研究架構.....	3
第二章 IFRS 17 選擇權與保證利益的時間價值介紹與文獻回顧	4
第一節 選擇權與保證利益的時間價值介紹.....	4
一、選擇權與保證利益的時間價值所屬架構.....	4
二、選擇權與保證利益的時間價值介紹.....	5
第二節 選擇權與保證利益的時間價值評價文獻回顧.....	5
一、隨機情境法.....	6
二、複製資產組合.....	7
三、隨機模型封閉解.....	8
第三章 選擇權與保證利益的時間價值分析模型與假設	9
第一節 分紅終身壽險保單之介紹.....	9
一、費差分紅.....	10
二、死差分紅.....	11
三、利差分紅.....	11
第二節 模型介紹.....	12
一、Lee Carter 模型.....	12
二、Vasicek-Hull-White 利率模型.....	14
第四章 選擇權與保證利益的時間價值分析	17
第一節 費差分紅模擬.....	17
第二節 死差分紅模擬.....	21
第三節 利差分紅模擬.....	26
第四節 選擇權與保證利益的時間價值計算.....	29
第五章 結論與建議	31
參考文獻	32

表次

表1 保單精算假設	9
表2 保單各年期之責任準備金	9
表3 保單各年期之死亡率與解約率	9
表4 保單各年度佣金率和固定費用	17
表5 各年度保單費用率和模擬分配參數	19
表6 各期派發分紅占所有模擬路徑之比例	20
表7 模擬分配變異數與費差分紅變化	21
表8 K_t 的AR(1)估計結果	23
表9 模擬 K_t 的平均值與理論平均的對比	23
表10 各期利差益機率	28
表11 各期利差紅利金流平均	29
表12 保單之選擇權與保證利益的時間價值計算結果	29



圖次

圖1 2016年1月至2022年6月保單分紅利率	1
圖2 IFRS 17與隱含價值觀點財報架構.....	5
圖3 保單殘存率	21
圖4 保單解約率	21
圖5 Lee Carter模型參數 αx	22
圖6 Lee Carter模型參數 βx	22
圖7 Lee Carter模型參數 Kt	22
圖8 各年度的死差分紅機率	25
圖9 近年保單分紅利率變化表	26
圖10 短利率模擬圖	27
圖11 短利率之平均值	27
圖12 短利率之變異數	27



第一章 緒論

第一節 研究背景

近年受新冠疫情以及受國際貨幣政策影響，民眾擔心通膨持續惡化造成經濟惡化最終導致實質資產縮水，為了維持原有的實質資產水準，除了開始改變其消費型態與習慣外，也讓民眾開始重視理財規劃，據保誠人壽問卷調查統計¹，臺灣民眾定期檢視理財規劃的頻率有所提升，從疫情前的約6、7個月檢視一次縮短至疫情後的每5.5個月檢視一次，理財態度相較疫情前保守，故人們傾向於挑選固定收益相關或保本型的投資工具，同時，由於各國政府對於疫情的態度趨向共存化，臺灣也不例外，使得臺灣民眾更加重視健康保障，臺灣民眾對於同時滿足保證型且能顧及自身健康保障的商品需求與日俱增，由於分紅保單除了傳統長期壽險的保障，並擁有與保戶共享紅利與抗通膨保本性質，使分紅保單成為熱銷的商品。

受疫情大降息影響，臺灣市場利率持續走低，造就基於定存利率的分紅保單分紅利率創下連續多個月低於1%歷史紀錄(見下圖1為2016年1月至2022年6月保單分紅利率走勢)，同時保單責任準備金的預定利率亦受市場利率影響而創下新低，使壽險業難以設計出具有競爭力的商品。直至2022年開始美國聯準會(FED)進入升息循環，臺灣央行隨即於今年開始升息，利率的上漲使民眾預期帶有利率保證的商品可增加收益，更進一步地帶動分紅保單的銷量。



圖 1 2016年1月至2022年6月保單分紅利率²

隨著2022年國際逐漸進入升息循環，2月份時臺灣部分壽險公司出現「預期式升息」，即保險公司在市場利率尚未升息，先調高保單的宣告利率，此舉引起金

¹ 陳欣文，2022，保誠人壽分紅保單一三明治族助力，<https://reurl.cc/anmRZD>，搜尋日期：2022年6月25日

² 資料來源：中華民國人壽保險商業同業公會，<https://reurl.cc/Op30bl>

管會注意，擔心保單投資效率跟不上預期造成保單虧損，故未來經濟波動對保單調整所引起保單價值「未實現」部分的虛值變化亦是政府監管機關關注焦點。

會計制度與精算原則的進步，迫使保險公司須重新檢視各種保險合約負債的評價方法，國際會計準則理事會(IASB)於2017年5月18日頒布《國際財務報導準則第17號保險合約》(IFRS 17)，用於取代舊有的會計制度 IFRS 4，後續與2020年6月公布IFRS 17的最終版本。IFRS 17雖有助於統一保險業財報之間的整合，但新制度中負債評價從原有的鎖定基礎轉換至現實基礎、負債評價與利率緊密連動以及考量如選擇權與保證利益的時間價值關於保單價值虛值的計算的特性，提高保險公司評價的複雜度，因此各國視情況延緩實施，臺灣也將於2026年1月正式接軌實施，以因應未來可能面對的評價上挑戰。此外，鑑於IFRS 17對保險公司股本、財報的高要求，保險公司因此偏好發行更多低保證商品，如分紅保單、投資型保單，但投資型保單不保本的特性，民眾更加傾向於購買分紅保單。

現今的經濟環境的變化，儘管讓分紅保單銷量有所成長，然而會計新制度與市場環境有緊密連結，保險公司在環境有所改變時，所導致保單本身價值實值或是虛值的變化，皆須更加謹慎評估。

第二節 研究動機與目的

上節提到經濟環境造就分紅保單虛值變化，關於虛值變化的衡量，歐洲保險公司財務長論壇之歐洲隱含價值準則(European Embedded Value principle ; EEV)³引入選擇權與保證利益的時間價值(Time Value of Options and Guarantees ; TVOG)的概念來衡量之，EEV 準則僅提到TVOG適用於變額年金、變額萬能等保險商品，並未明確提及是否適用其他保單本身有隱含選擇權的概念的商品，如分紅壽險。

再者，由於IFRS 17僅提供原則性規範，並未提及實務上的操作細節，故保險公司尚須自行判斷IFRS 17相關內容，並根據公司本身的狀況與經驗，選擇最適合的做法，導致同一概念有不同做法的情況產生，讓臺灣保險公司無所適從，綜上述兩個原因，本文從最為常見的分紅保單一分紅壽險切入，期望透過分析實際分紅保單的例子，提供一個較為合理的計算方式與說明供參考。

³ 參考自Chief Financial Officer Forum. 2016. *European Embedded Value Principles*. <https://reurl.cc/2Zn9En>. 第5頁關於財務上的選擇權與保證部分。

第三節 研究方法與研究架構

本文主要分析某家分紅壽險保單的選擇權與保證利益的時間價值，透過文獻探討各方的作法，選擇出較適切的方法，並透過該方法分析保單費差分紅、死差分紅、利差分紅各部分的計算方式，最後針對計算數值結果保險公司、保戶、主管機關提供建議。全文共分五章，分別如下：

一、緒論

包含研究背景、動機、架構進行簡要說明。

二、IFRS 17 選擇權與保證利益的時間價值介紹與文獻

包含選擇權與保證利益的時間價值的概念介紹以及、計算方法相關文獻回顧

三、選擇權與保證利益的時間價值分析模型假設

包含提供實作保單的精算假設、分紅計算公式，以及後續模擬所使用的模型介紹與選用原因。

四、選擇權與保證利益的時間價值分析

分別模擬費差分紅、死差分紅、利差分紅，並分析其計算結果，最後統合三者計算結果計算該保單的選擇權與保證利益的時間價值並分析。

五、結論與建議

總結選擇權與保證利益的時間價值分析作法，並對發行本張保單的保險公司方以及主管機關方提供建議，最後說明本文不足之處。

第二章 IFRS 17 選擇權與保證利益的時間 價值介紹與文獻回顧

第一節 選擇權與保證利益的時間價值介紹

一、選擇權與保證利益的時間價值所屬架構

Deloitte(2018)報告⁴提到IFRS 17 公報的一般衡量模型(General Measurement Model ; GMM)架構下，保險合約負債(Current Liabilities ; CL)可拆分成最佳估計負債(Best Estimate Liabilities ; BEL)、風險調整(Risk Adjustment ; RA)和合約服務邊際(Contractual Service Margin ; CSM)，其中BEL定義為現時估計之精算假設下各期支出減去收入的現值，可視為保單的履約現金流的平均值；RA則為對於保險契約現金流金額與時點的不確定性所需的金額，可視為為保單的履約現金流的變異數；CSM為保單預期未來獲利，由履約現金流決定CSM認列。

然而IFRS 17 公報僅在衡量未來現金流量的章節以文字規範「對於標的項目現金流量以非線性方式反映經濟情況，例如現金流反映保單相關的選擇權或隱含的選擇權，可使用隨機情境法衡量之」，其並未明確提到選擇權與保證利益的時間價值(Time Value of Options and Guarantees ; TVOG)的概念與詳細作法，作為補充，採用在歐洲、亞洲地區普遍使用的隱含價值(Embedded Value)的觀點，此觀點為比較同業間的財務表現的重要指標，優點在於基於經濟觀點且可根據當地對於保險公司分配盈餘的法規做在地化調整。在隱含價值(Embedded Value ; EV)觀點下，保險合約負債由經濟觀點且未考量課稅效果的負債和未來獲利的現值(Present Value of Future Profits ; PVFP)組成，而PVFP又可細分為有效業務價值(Value of Inforce ; VIF)、資本成本(Cost of Capital ; CoC)和TVOG，其中PVFP定義為使用經風險調整利率所折現之未來可從有效業務中分配給股東的法定利潤現值，而CoC定義為在評價日所須的資本金額扣除未來釋出該資本的現值與用於該資本擔保資產的稅後盈餘，所需之資本水準由公司的內部目標和法定資本決定；VIF為PVFP扣除TVOG與CoC，代表業務所產生的價值；而TVOG部分下文將進行說明。

⁴ 參考自Deloitte. 2018. *IFRS 17 and Embedded Value Reporting*. <https://reurl.cc/d2Ykn6>. Accessed Apr. 15, 2022.

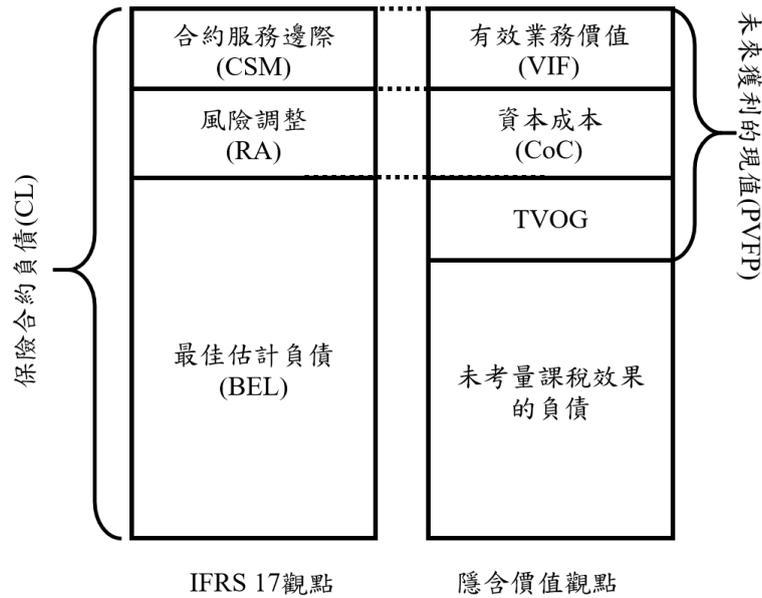


圖2 IFRS 17與隱含價值觀點財報架構

儘管EV觀點並非為隸屬於IFRS 17的架構下，但Deloitte(2018)提到EV觀點卻可用於計算對應會計項目，進而降低會計上的偏誤，如上圖2 IFRS 17觀點與隱含價值觀點的財報架構所示，稅前的PVFP在不考量當地規定與投資金流下，可視為IFRS 17下的BEL；EV觀點下的VIF類似於在IFRS 17下的CSM，因CSM代表保險契約所產生的獲利，而VIF代表業務所產生的價值，EV觀點下的CoC可視為IFRS 17下的RA；而EV觀點下的TVOG則可視為IFRS 17下的BEL額外的部分，用來解釋保險契約中具有選擇權性質的部分。

二、選擇權與保證利益的時間價值介紹

Harewood and LaSorella (2009)將TVOG定義為給定潛在金融市場的變化下對於保單相關選擇權與保證價值的變動，參考財務上選擇權的價值可拆分為在履約價值(intrinsic value)和時間價值(time value)的概念，時間價值為選擇權的市場價格與履約價值的差額，因此在隱含價值評價中，履約價值為在基礎確定情境(base deterministic scenario)下的負債現金流量現值，而扣除履約價值剩餘的部分即為TVOG，然而負債價值資訊無法單從保險契約中獲取，而IFRS 17公報對於TVOG亦無明確的定義，因此對於TVOG計算方式，下節將逐一介紹計算各種方法。

第二節 選擇權與保證利益的時間價值評價文獻

回顧

因TVOG於IFRS 17內無明確的說明，且本文將聚焦在分紅保單的TVOG評價，由於分紅保單分紅部分有隱含保證的部分，評價分紅保單的負債價值即為TVOG，故除了參考TVOG直接評價的文獻外，亦可借鑒分紅保單負債評價的文獻。本節將介紹TVOG的三種算法，同時分析各算法的優缺點並提供各家學者關於TVOG算法、分紅保單負債評價或精算原則手冊相關文獻，最後總結出適合於分紅保單的作法，下文將介紹TVOG主流的三種算法⁵：

一、隨機情境法(Stochastic modeling)

隨機情境法為TVOG在實務上最常使用的方法，亦為IFRS 17推薦的作法，本方法透過在模擬大量的可能經濟情境下計算成本，而非在確定性模型提供最佳估計方案下的點估計，其中模擬的方法又可分為兩種：

(一)風險中立測度評價：為一在隨機模型中預測現金流的技術，在市場一致假設的基礎上使用一系列大量的經濟可能情境對特定日期可觀察到的市場價格進行最佳化，在風險中立的世界中，所有投資人皆為風險中立，他們對於資產的必要報酬率皆為無風險利率，因此在大量模擬情境所產生的資產和保險合約負債的預測現金流皆採用無風險利率折現，保險合約負債之現金流量現值為所有隨機情境之平均值。風險中立測度評價的優點在於無須主觀挑選合適的折現率對應預測現金流，此外由於本方法的假設與市場上的衍生性商品波動度、市場價格和相關係數的假設一致，所以反映了市場上對於負債的價格和預期的避險成本，缺點在於可能產生非實際的機率分配。

(二)真實世界測度評價：基於一系列大量的經濟情境進行評估，其中市場變數反映了出象的現實機率分佈和市場的風險偏好，保險合約負債之現金流量現值為所有隨機情境之平均值，真實世界情境的最佳化通常與歷史資料攸關，其結果易受對於各情境的假設影響。真實世界測度評價的優點在於更加貼近於實際市場價格的動態，便於估計極端事件的影響，但有難以取得必要的市場資料、存續期間長的項目難以預測的缺點。

過去文獻探討皆以隨機情境法為主，在分紅保單負債評價文獻裡，Grosen

⁵ 參考凱晟精算顧問有限公司，2021，*IFRS 17 主要關鍵導入議題委託研究案期末報告*: 121、Singapore Actuarial Society. 2020. *Options and Guarantees*: 8-10與Society of Actuaries. 2016. *Nested Stochastic Modeling for Insurance Companies*: 10-12.

and Jørgensen(2000)探討各種保證利率水準對分紅保單負債公允價值的影響，文獻中不考量股東權益，假設資產等於負債，負債又可拆分責任準備金與分紅準備金，透過在風險中立測度下採用蒙地卡羅模擬一系列的資產報酬率和保證利率得到的一系列資產價值，進而假設的資產等於負債推算出各期責任準備金，最後計算責任準備金的期望值即為該契約的價值；Hieber, Natolskic and Werner (2019)探討關於多期利率保證對分紅保單負債公允價值的影響，文獻中採用Vasicek的變形— Hull White 利率模型進行利率模擬，來考量不同到期日與保證利率之負債價值。

在TVOG算法文獻裡，Komański and Sokoliński(2015)則比較的隨機情境法(Stochastic modeling)中傳統蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Simulation；MC)與最小平方蒙地卡羅法(Least Square Monte Carlo；LSM)計算TVOG，發現傳統蒙地卡羅模擬法因涉及網狀模擬(nested simulation)相較LSM耗時，然而LSM卻有選擇迴歸(regression function)的問題，故仍選擇隨機情境法為佳

在精算會計原則報告書中，舊制的精算原則(Actuarial Guideline 43；AG-43)由於折現率採固定折現率，違反IFRS 17折現率反映金流的財務風險概念，故不考慮採用AG-43；而在美國保險監理官協會(National Association of Insurance Commissioners；NAIC)新推出用於取代AG-43的評價手冊(Valuation Manual 21；VM-21)提到對於附保證的商品，因為未來負債現金流與標的項目呈非線性關係，規定使用隨機情境法衡量未來現金流之價值，藉以計算單一確定情境下無法反映TVOG，儘管這與IFRS 17提倡的衡量方式一致，但VM21同IFRS 17亦為準則式規範。

在國內的相關論文中，詹志清(2020)建構解約率的實證模型，可用於後續IFRS 17或ICS實施後衡量不同商品的TVOG；孫鑫(2020)以分紅保險為例研究IFRS 17中國大陸現行會計制度負債衡量，文中提到以中國當地採用償二代規則中的TVOG因子法衡量。

二、複製資產組合(Replicating Portfolio)

複製資產組合法為決定一投資組合，在每種可能的未來情境下其現金流與保險合約負債現金流量能夠相匹配，因此複製投資組合的價值等於負債的價值。複製資產組合法有以下兩種方法：

(一)靜態複製資產組合：即買進並持有的策略，買進就不會變動資產配置，如購買

賣權避保證利益風險。

(二)動態複製資產組合：即在各種情境下再平衡投資組合，以維持現金流與負債的曝險相匹配，但缺點為複製資產組合需要隨機方式產生風險中立和真實機率的配適值以及難以反映保單持有人的行為，因此本文不考慮使用複製資產組合法。

三、隨機模型封閉解 (Closed-form solution)

隨機模型封閉解為假設未來現金流服從某些機率分配，為常用於估算擔保成本的一種方法，而不必使用隨機情境法模擬。常見的封閉解如Black Scholes 公式用於隱含選擇權 (embedded option) 的評價，但對於較為複雜的產品如萬能壽險和本文的分紅保單卻不適用，原因在於隨機模型封閉解的公式是基於靜態的，難以反映動態的市場環境與保單持有人的行為。

此外本文於文獻中談到中國大陸根據當地保險市場情況，當地監管機關於償二代規則中推行的TVOG算法簡化版一因子法，但王靈芝(2015)透過選擇權定價與蒙地卡羅法計算，發現TVOG因子出現低估情況，再者，因子法須滿足各家保險公司具相同死亡率、利率的假設，考量保險公司的訂價差異，因子法並不合適。

綜合上述各方法優缺點分析，本文認為實務上最常用的隨機情境法較為合適，測度方面由於真實世界測度對於存續期間長的壽險合約預測效果不佳，故採風險中立測度較合理。另外參考市場一致隱含價值(Market Consistent Embedded Value; MCEV) 指引⁶與前文提到TVOG為負債現金流量現值扣除履約價值剩餘的觀念，TVOG為履約價值和全部可能情境之現金流量現值之機率加權平均⁷的差異，令最佳估計負債(BEL)為計算風險中立測度下以隨機情境衡量之最佳估計負債；內涵價值(Intrinsic Value)為於風險中立測度下決定單一確定情境下之負債現金流量現值，而TVOG 為BEL和Intrinsic Value之差，故可表達為下式1：

$$\text{BEL} = \text{Intrinsic Value} + \text{TVOG} \quad (\text{式 1})$$

結合本文TVOG算法結論與分紅保單分紅部分隱含保證的特性，本文採用風險中立測度的隨機情境法，透過模擬分紅保單金流扣除依據保單提供的資訊所計算出來確定值求得該分紅保單之TVOG。

⁶ 參考Noel Harewood and Kenneth LaSorella. 2009. *Embedded Value (EV) Reporting*. American Academy of Actuaries Life Financial Reporting Committee: US: 19-20.

⁷ 機率加權平均在此指最佳估計負債(BEL)

第三章 選擇權與保證利益的時間價值分析模型與假設

第一節 分紅終身壽險保單之介紹

進入TVOG分析前，須先針對欲分析保單假設做初步分析，本文所採用的分紅保單精算假設為被保險人特徵為臺灣男性30歲，保單年期為20年，保額為100萬元，預定利率4%，並透過第五回經驗生命表提供的死亡率得到平準保費與準備金，而分紅率的部分僅提供死差分紅率80%，關於保單精算假設、保單各年期之責任準備金、保單各年期之死亡率與解約率數值分別整理如下表1、表2、表3：

表1 保單精算假設

被保險人年齡	性別	保險期間	平準保費	保額	預定利率
30	男	20	45,300	1,000,000	4%
死差分紅率					
80%					

表2 保單各年期之責任準備金

年期	責任準備金	年期	責任準備金
0	0	11	437,654.83
1	9,434.42	12	490,341.50
2	45,215.22	13	545,162.55
3	82,420.72	14	602,227.49
4	121,089.84	15	661,664.40
5	161,268.41	16	723,620.17
6	203,011.18	17	788,259.03
7	246,381.42	18	855,759.96
8	291,450.46	19	926,313.67
9	338,297.29	20	1,000,000
10	387,003.56		

表3 保單各年期之死亡率與解約率

年期	死亡率	解約率
0	0.0000000	0%
1	0.0016317	20%
2	0.0016758	10%
3	0.0017469	9%
4	0.0018459	8%
5	0.0019710	7%
6	0.0021186	6%
7	0.0022851	5%
8	0.0024678	5%
9	0.0026649	5%

10	0.0028818	3%
11	0.0031248	3%
12	0.0034011	3%
13	0.0037161	3%
14	0.0040743	3%
15	0.0044658	3%
16	0.0048780	3%
17	0.0052974	3%
18	0.0057114	3%
19	0.0061119	3%
20	0.0065151	0%

關於保單分紅計算根據保單的分紅會涉及殘存率，本期殘存率（ P_t ）為前一年的殘存率（ P_{t-1} ）與1扣除本期死亡率與本期解約率的修正項的乘積而得， $q_{m,t}$ 代表第t期的預定死亡率， $q_{s,t}$ 代表第t期解約率，故殘存率的計算公式表達如下式2：

$$P_t = P_{t-1} \times (1 - q_{m,t} - q_{s,t}) \quad (\text{式2})$$

分紅保單除了提供保單基本精算條件外，各家保險公司關於分紅計算方式可能不同，因此分紅保單亦會提供保單分紅公式，本文所採用的分紅保單包含利率分紅、死亡分紅、費用分紅三大部分，下文將針對這三者分紅進行逐一說明：

一、費差分紅

根據保單說明，費差分紅為「預估費用與實際費用之差」，由於該保單費用計算為平準保費乘上費用率，故在此先討論預估費用率與實際費用率的差異，最後再乘上平準保費即可。費差分紅會隨實際費用率不同而分為兩種情況：（一）當實際費用小於預估費用率，即為費差益，代表保險公司因實際費用支出較預期少而獲利，故會派發支出減少的部分作為紅利予保戶。（二）當實際費用大於預估費用率，即為費差損，保險公司因實際費用支出較預期多，故不派發紅利，此外，由於分紅為該張分紅保單的經營績效，保險公司並不會將所有的紅利分予保戶，而是留一部分作為保險公司的獲利，故會乘上費差分紅率作為保險公司的獲利，同時亦須考量保戶死亡和解約的情況，因此須再乘上殘存率，綜上述，第t期的費差分紅可表達如下式3：

$$\text{費差分紅}_t = \alpha_E \times \text{Max}(E(\text{Exp}R_t) - \text{Exp}R_t, 0) \times LP \times P_{t-1} \quad (\text{式3})$$

其中 α_E 為費用分紅率； $E(\text{Exp}R_t)$ 為第t期的預估費用率； $\text{Exp}R_t$ 為第t期的實際費用率； LP 為平準保費； $\text{Max}(E(\text{Exp}R_t) - \text{Exp}R_t, 0) \times LP$ 為費差兩種情況之金流。

二、死差分紅

根據保單說明，死差分紅為「計算保費之預定死亡率與實際死亡率之差乘以保單的危險保額」，其中，該保單的危險保額為身故保險金，而預定死亡率與實際死亡率會隨實際死亡率不同而有盈虧，分為兩種情況：(一)當實際死亡率小於預定死亡率，名為死差益，保險公司因實際死亡率較預期低支出減少而獲利，故派發支出減少的一部分作為紅利。(二)當實際死亡率大於預定死亡率，名為死差損，保險公司則不派發紅利，同時再考量保戶死亡和解約的殘存率以及死差分紅率，故第t期的死差分紅公式可表達如下式4：

$$\text{死差分紅}_t = \alpha_D \times \text{Max}(q_G - q_x, 0) \times DB \times P_{t-1} \quad (\text{式4})$$

其中 α_D 為死差分紅率； q_x 為被保險人x歲時的實際死亡率； q_G 為預定死亡率； $\text{Max}(q_G - q_x, 0) \times DB$ 為死差損、死差益的兩種情況的金流，此項又名為淨危險保額(Net Amount at Risk)； DB 為身故保險金。

三、利差分紅

根據保單利率分紅公式說明利率分紅為「該保單年度實際投資報酬率與預定利率之差乘以期中保單價值準備金」，其中實際投資收益率與保單預定利率的差額會隨實際投資收益率的不同導致盈餘或虧損，因此保險公司分紅的情況有兩種：(一)當實際投資收益率大於預定利率時，即為利差益，保險公司因實際投資收益較預期高而獲利，故會派發較預定利率多出來的部分作為紅利給予保戶。(二)當實際投資收益率小於預定利率，即為利差損，保險公司則不派發紅利。而當中的期中保單價值準備金計算則以前一期責任準備金和當期責任準備金取平均計算之。同時亦須考量保戶死亡和解約的殘存率以及利差分紅率。綜合上述，第t期的利率分紅公式可表達為下式5：

$$\text{利差分紅}_t = \alpha_I \times \text{Max}(r_t - r_G, 0) \times \frac{V_t + V_{t-1}}{2} \times P_{t-1} \quad (\text{式5})$$

其中 α_l 為利差分紅率； r_t 為第t期實際的投資收益率； r_G 為預定利率； $Max(r_t - r_G, 0)$ 為利差分紅的兩種情況； P_{t-1} 為第t-1期殘存率； V_t 為第t期的責任準備金， V_{t-1} 為第t-1期的責任準備金，以取第t-1期的責任準備金和第t期的責任準備金的平均值作為期中保單價值準備金。

第二節 模型介紹

上節介紹本文欲探討的保單金流計算方式，但金流中關於未來實際的費用率、利率與死亡率卻無從得知，所以必須透過蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Simulation ; MC)對未來的各種情境進行模擬用以應對未來各種的可能變化，關於作法的部分，費用率的部分可透過常態分配直接進行模擬，但利率與死亡率的部分前人已有相關作法，死亡率模型採用以實務上常用的Lee Carter模型為主，而利率則以Hull White模型為主，故在本節將針對上述死亡率模型、利率模型分別進行介紹與討論：

一、Lee Carter 模型⁸

Brouhns (2002) 提出死亡人數服從Poisson 分配且使用與死力(μ_x)相關的log link function 來建構Lee Carter 模型，其中模型不考慮世代效果(cohort effect)，而中央死亡率($m_{x,t}$)會隨年齡(x)和年度(t)變化，因此給定每個年齡值x，Lee and Carter(1992) 定義預測美國未來中央死亡率 $m(x,t)$ 服從一個離散時間的隨機過程：

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x K_t + \epsilon_t \quad (\text{式6})$$

其中 α_x 代表年齡組死亡率的平均曲線，隨年齡x改變； β_x 代表年齡組相對死亡率的變化速度，隨年齡x改變； K_t 代表死亡率強度的變化量⁹，隨年度t改變； ϵ_t 為誤差項。

⁸ 參考自 Villegas, A.M., Millossovich, P., and Kaishev, V.K. 2018. StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling. *Journal of Statistical Software*, 84 (3): 6以及Nocito, S. 2015. *Stochastic Mortality Projections: A Comparison of the Lee-Carter and the Cairns-Blake-Dowd models Using Italian Data*. Unpublished doctoral dissertation, University of Studies of Turin, Italy兩篇內容。

⁹ 參考自余清祥，2015，修勻學：參數修勻法，<https://reurl.cc/NAW7Y5>，搜尋日期:2022年6月1日。

為了預測中央死亡率，透過AR(1)過程對 K_t 進行建模與預測，由於 K_t 合理的適配值經常為線性關係且為一個有飄移項的隨機漫步，因此假設 K_t 為：

$$K_t = c + K_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_k) \text{ iid} \quad (\text{式7})$$

其中 c 為飄移項， ε_t 為平均數為零且變異數為 σ^2_k 常態的白雜訊過程。

Lee Carter模型只能透過轉換才能被認定(identifiable)，因為對於任意非零實數常數 c_1 、 c_2 ，式(1)的參數可轉換成：

$$(\alpha_x, \beta_x, K_t) \rightarrow \left(\alpha_x + c_1 \beta_x, \frac{1}{c_2} \beta_x, c_2(K_t - c_1) \right)$$

使 $\ln(m(x,t))$ 不變，為了解決模型的認定(identifiable)問題，Lee and Carter(1992)建議建立以下兩限制式(見式8、式9)，假設資料涵蓋年齡 x_0 至 x_w ，年度涵蓋 t_0 至 t_n ：

$$\sum_{x=x_0}^{x_w} \beta_x = 1, \quad (\text{式8})$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_n} K_t = 0 \quad (\text{式9})$$

等同於在轉換式選擇參數 c_1 、 c_2 ：

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=t_0}^{t_n} K_t, \quad c_2 = \sum_{x=x_0}^{x_w} \beta_x \quad (\text{式10})$$

但上式10不好理解，Nocito(2015)提到在給定以上限制式8、式9下， α_x 的估計值 $\widehat{\alpha}_x$ 透過最小平方方法(Ordinary Least Square；OLS)對 $(\sum_{x=x_0}^{x_w} \sum_{t=t_0}^{t_n} \ln(m_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x K_t)^2$ 中 α_x 一階偏微分可得到如下式11的結果，代表該年齡組的平均死亡率：

$$\sum_{t=t_0}^{t_n} \ln(m_{x,t}) = (t_n - t_0) \alpha_x + \beta_x \sum_{t=t_0}^{t_n} K_t \quad (\text{式11})$$

$$\widehat{\alpha}_x = \frac{\sum_{t=t_0}^{t_n} \ln(m_{x,t})}{t_n - t_0} \quad (\text{式12})$$

如式12所示，參數 α_x 的估計值 $\widehat{\alpha}_x$ 為各年度(t)中央死亡率的對數值的平均，此外，參數 β_x 、 K_t 的估計值 $\widehat{\beta}_x$ 、 \widehat{K}_t 則對由 $[\ln(m_{x,t}) - \alpha_x]$ 作為矩陣元素所構成的矩陣Z進行奇異值分解(Singular Value Decomposition；SVD)，給定 $Z = USV^T$ 下， β_x 、 K_t 的估計值如下：

$$\widehat{\beta}_x = \frac{\overline{u}_1}{\sum_{x=x_0}^{x_w} u_{1x}} \quad (\text{式13})$$

$$\widehat{K}_t = \overline{s}_1 \left(\sum_{x=x_0}^{x_w} u_{1x} \right) \overline{v}_1^T \quad (\text{式14})$$

其中， \overline{u}_1 代表在矩陣 ZZ^T 有最大特徵值的特徵向量； \overline{v}_1 代表在矩陣 $Z^T Z$ 有最大特徵值的特徵向量； \overline{s}_1 代表在U或V矩陣有最大特徵值的單元素向量。

但此時仍有許多學者重新校準模型參數式12、式13、式14，目的是為了得到與給定年度下的死亡人數實際觀察值更好匹配的結果，以及讓原本 \widehat{K}_t 滿足式8的限制式，因此Barugola and Maccheroni (2014)提出下式15、16、17：

$$\alpha_x^* = \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{K}_t \quad (\text{式15})$$

$$\beta_x^* = \widehat{\beta}_x \left(\sum_{x=x_0}^{x_w} \widehat{\beta}_{1x} \right) \quad (\text{式16})$$

$$K_t^* = (\widehat{K}_t - \bar{K}) \left(\sum_{x=x_0}^{x_w} \widehat{\beta}_{1x} \right) \quad (\text{式17})$$

其中 $\bar{K} = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_n} \widehat{K}_t$ ，代表各年度(t)的 \widehat{K}_t 值的平均值； $\sum_{x=x_0}^{x_w} \widehat{\beta}_{1x}$ 代表所有 $\widehat{\beta}_x$ 的加總，總和為1，本文將應用式15、16、17結果作為死亡率模型—Lee Carter模型的參數估計方法，並以式6、式7模擬中央死亡率。

二、Vasicek-Hull-White 利率模型¹⁰

Vasicek(1977)提出第一個短利率模型，在Q測度下均值回歸(mean reverting)的短利率(r_t)滿足以下隨機過程：

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dW_t \quad (\text{式18})$$

其中 a 、 θ 、 σ 皆為非負常數， W_t 為布朗運動，上式代表短利率會以速率 a 回歸至長期利率水平 θ ，再疊加服從常態分佈的回歸力道(σdW_t)，但Vasicek模型沒有足夠的自由參數可供債券價格的參數校正，即無法同時挑選適當的參數 a 、 θ 、 σ 以解出式

19：

¹⁰ 參考自 Hunt, P. J., and Kennedy, J. E. 2000. *Financial Derivatives in Theory and Practice*. England: John Wiley and Son LTD.、Hull, J. C. 2015. *Options, Futures and other Derivatives (9th .ed)*. US: PEARSON

$$D_{0T} = E_Q[\exp(-\int_0^T r_u du)] \quad (式19)$$

其中 D_{0T} 為到期日T在時點0的債券價格， r_u 為短利率，故基於以上缺點，Hull and White(1990)延伸Vasicek的模型，將原本短利率(r_t)隨機過程參數 a 、 θ 、 σ 變成時間的函數形式 a_t 、 θ_t 、 σ_t ：

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t)dt + \sigma_t dW_t \quad (式20)$$

上式很明顯看出Vasicek-Hull-White模型的缺點在於短利率 r_t 可使用負值，這明顯不合理，然而這項不合理之處只要模型本身參數校準和使用情境無太多問題仍可使用，而Vasicek-Hull-White模型優點在於模型本身的易解性(tractable)而被廣泛使用，這項易解性使得模型參數校準時能更有效率，上式為一個著名的隨機微分方程式可產生高斯過程的解而容易解出方程式的解，即考量隨機過程 $y_t := \phi_t r_t$

其中

$$\phi_t = \exp\left(\int_0^t a_u du\right) \quad (式21)$$

再套用Ito's公式至 y_t 產生：

$$dy_t = \phi_t \theta_t dt + \phi_t \sigma_t dW_t \quad (式22)$$

因此：

$$y_t = y_0 + \int_0^t \phi_u \theta_u du + \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u \quad (式23)$$

$$= y_0 + \int_0^t \phi_u \theta_u du + \tilde{W}(\varepsilon_t) \quad (式24)$$

其中：

$$\varepsilon_t = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 dW_u \quad (式25)$$

及 \tilde{W} 為一個適用於filtration $\{\tilde{F}_t\} = \{\tilde{F}_{\varepsilon_t^{-1}}\}$ 的布朗運動， \tilde{W} 的隨機過程為：

$$\tilde{W} := \int_0^{\varepsilon_t^{-1}} \phi_u \sigma_u dW_u \quad (式26)$$

式26提供短利率過程 $r_t (= \phi_t^{-1} y_t)$ 所需的計算式。

然而，由於部分市場流動性較差，相關報價可能不可靠，導致波動度不顯著，以及

市場可能不合當時的Hull and White提出模型的典型市場利率型態，故基於以上原因，Brigo and Mercurio(2001)¹¹將短利率(r_t)改寫為如下式27：

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t \quad (\text{式27})$$

其中 a 、 σ 皆為非負常數， θ_t 則透過市場的利率期間結構校準取得，上式可透過積分得到：

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (\text{式28})$$

其中：

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2a(t-s)})^2 \quad (\text{式29})$$

$$\theta_t = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}) \quad (\text{式30})$$

其中 $f^M(0, T)$ 代表從時點0至到期日T的市場瞬時遠期利率，表達為：

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial P^M(0, T)}{\partial T} \quad (\text{式31})$$

其中 $P^M(0, T)$ 為市場報價

此外， r_t 在給定 F_s (filtration)下為一常態分配，其分配參數如下式32、33：

$$E(r_t | F_s) = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} \quad (\text{式32})$$

$$\text{Var}(r_t | F_s) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2a(t-s)}) \quad (\text{式33})$$

綜合上述優缺點分析討論，本文最終採用 a 、 σ 為常數且 θ_t 為時間函數的短利率隨機過程(見式27)進行模擬，原因為此隨機過程較符合市場實際的狀況。而驗證模擬的短利率正確性的部分，本文將在下文應用短利率機率分配參數的理論值(見式32、33)與模擬的結果作對比，進而確定模擬結果符合短利率對應的機率分配。

¹¹ 詳見 Brigo and Mercurio. 2001. *Interest Rate Models Theory and Practice*. US: Springer

第四章 選擇權與保證利益的時間價值分析

本節將依據第三章第一節分紅終身壽險保單所提供的資訊，分別於本章的第一節、第二節、第三節對費差分紅、利差分紅、死差分紅三個部分的金流透過蒙地卡羅法進行模擬，並檢查各金流模擬正確性，最後在各節末探討數值的合理性以及對於保險公司的意義。本章的最後一節，利用前三節的金流的結果，計算選擇權與保證利益的時間價值。關於費差分紅、利差分紅、死差分紅的模擬方式與選擇權與保證利益的時間價值的計算分別討論如下：

第一節 費差分紅模擬

費差分紅的模擬主要為各年度費用的模擬，由於據本文第三章第一節保單資訊，費用為平準保費乘上費用率，由於平準保費為保險期間各年度保費的平均值，此為定值，故在此僅須模擬各年度費用率，再乘上平準保費，即為各年度費用，首先需要該保單的費用數據(包含佣金率、固定費用)，如下表4所示：

表4 保單各年度佣金率和固定費用

保單年度	佣金率	固定費用
0	62.40%	4,530
1	27.00%	1,359
2	20.60%	1,359
3	14.00%	1,359
4	13.00%	1,359
5	12.00%	1,359
6	10.00%	1,359
7	10.00%	1,359
8	10.00%	1,359
9	10.00%	1,359
10	7.00%	1,359
11	7.00%	1,359
12	7.00%	1,359
13	7.00%	1,359
14	7.00%	1,359

15	7.00%	1,359
16	7.00%	1,359
17	7.00%	1,359
18	7.00%	1,359
19	7.00%	1,359
20	0.00%	0

上表4所提供固定費用的為費用而非費用率，須先透過保單費用計算公式(費用為平準保費乘上費用率)將固定費用轉成固定費用率。 $FExp_t$ 表示為固定費用， LP 為平準保費為45,300元，固定費用率 ($FExpR_t$) 可表達如下式34：

$$FExpR_t = FExp_t / LP \quad (式34)$$

保單各年度的費用率為各年度的佣金率和各年固定費用率之加總(見下式35)，再者，由於僅有保單各年度的費用率的資訊，無法得知各年度的費用率的實際機率分配，故本文在蒙地卡羅進行模擬時，假設以常態分配作為模擬各年度費用率的機率分配，其中分配的平均值以保單各年度的費用率為代表，目的是反應各年的保單費用率，而分配的變異數本文採用保單各年費用率的10%(見下式36)，目的是反應個別年度的費用率的潛在變化，為本文筆者主觀估計，模擬期數從保單第0年至第20年，共21期，模擬路徑數為10萬，共計210萬筆模擬費用率，最後，保險公司不可能有負的費用率，須模擬結果各年費用率小於0之數值變為0(見下式37)，上述各關係式表達如下：

$$\mu_{ExpR_t} = CMR_t + FExpR_t \quad (式35)$$

$$ExpR_t \sim N(\mu_{ExpR_t}, 10\% \times \mu_{ExpR_t}) \quad (式36)$$

$$ExpR_t^M = \text{Max}(ExpR_t, 0) \quad (式37)$$

其中 CMR_t 代表第t年佣金率， $FExpR_t$ 代表第t年的固定費用率， μ_{ExpR_t} 代表第t年該保單的費用率， $ExpR_t$ 為第t年模擬的費用率。在計算費差分紅金流前，須確保模擬結果符合當初設定費用率模擬的機率分配，下表5比對各年度保單費用率與模擬分配平均值、變異數：

表5 各年度保單費用率和模擬分配參數

保單年度	保單費用率(μ_{Expt})	模擬分配平均值	模擬分配標準差
0	0.724	0.7243	0.07165
1	0.3	0.2998	0.0302
2	0.236	0.2359	0.0235
3	0.17	0.1702	0.0170
4	0.16	0.1600	0.0160
5	0.15	0.1499	0.0149
6	0.13	0.1298	0.0130
7	0.13	0.1298	0.01298
8	0.13	0.1297	0.0129
9	0.13	0.1301	0.0131
10	0.1	0.09969	0.0100
11	0.1	0.1002	0.0099
12	0.1	0.0998	0.0099
13	0.1	0.0999	0.0098
14	0.1	0.1001	0.0101
15	0.1	0.0998	0.0101
16	0.1	0.1001	0.0100
17	0.1	0.1000	0.0099
18	0.1	0.1000	0.0099
19	0.1	0.0998	0.0100
20	0	0	0

確保模擬各年度的費用率正確性後，模擬的費用率可計算費差分紅，首先根據保單費差分紅計算公式(見式3)，第t期的費差分紅為預期費用率減模擬出來的費用率、平準保費、殘存率以及分紅率這四者之乘積，其中本文假設預期費用率為保單費用率乘上1.05倍作為未來通膨修正。因該保單並未提供費差分紅率，故根據財政部《本業銷售分紅及不分紅人壽保險單應遵守原則》規定，保險公司依前一會計年度該保單累積的可分配盈餘分紅，其分紅比率不得低於70%¹²，同時參考保

¹² 《本業銷售分紅及不分紅人壽保險單應遵守原則》規定公司簽證精算人員應於預定紅利宣告日前，向公司董事會提報紅利分配報告，建議該年度之可分配紅利盈餘金額與分配予要保人之比例，並由董事會核定。上述核定之可分配紅利盈餘，其分

單提供的死差分紅率為80%，故本文假設費差分紅率為80%，綜合上述資訊，第t年期的費差分紅模擬數學式表達為下式38：

$$80\% \times \text{Max}(1.05 \times \mu_{\text{Exp}R_t} - \text{Exp}R_t^M, 0) \times 45,300 \times P_{t-1} \quad (\text{式38})$$

其中 $\mu_{\text{Exp}R_t}$ 代表第t年該保單的費用率，為佣金率和固定費用率之總和； $\text{Exp}R_t^M$ 為第t年期模擬的費用率，為透過式36、式37的模擬結果； P_{t-1} 為第t-1年期的殘存率，由保單的解約率和死亡率透過式2計算而得。

得知各期的費差分紅金流後，須透過選擇適當的折現率折現，參考實務上常用的做透過Smith-Wilson模型¹³，在風險中立的測度下以模型得出無風險利率曲線將各期的金流進行折現至今日(第0期)，並將10萬筆模擬之現值取期望值，即可得到費差分紅現值為3,543.85元，單純從數值上來看，此費差分紅現值對比利用各期平準保費收入以相同無風險利率曲線進行折現所得之保費收入現值442,305.92元，並無不合理之處，原因為保險公司不可能設計、發行虧損保單，故費差分紅現值應小於保費收入現值。從細部區分各年期折線前金流來看，下表6為各期派發紅利占所有模擬路徑(10萬種情境)路徑之比例，即可視為當期考量各種費用率情境下分紅的機率，由表6知各期派發紅利的機率近七成，代表本文所探討的保單有高機率為費差益，故費差分紅為正值實屬合理。

表6 各年期費差分紅機率

第0期	第1期	第2期	第3期	第4期	第5期	第6期	第7期
0	0.6935	0.6901	0.6906	0.6894	0.6921	0.6927	0.6923
第8期	第9期	第10期	第11期	第12期	第13期	第14期	第15期
0.6936	0.6925	0.6927	0.6892	0.6918	0.6952	0.6953	0.6898
第16期	第17期	第18期	第19期	第20期			
0.6941	0.6931	0.6924	0.6932	0			

此外，透過敏感度分析式36模擬費用率分配中的變異數，分別採用保單各年費用率的10%的倍數(5%、20%)，可得費差分紅結果如下表7，從表7得知，當模擬費用率

配子要保人之比例不得低於百分之七十。

¹³ 詳見Society of Actuaries. 2019. *Yield Curve Extrapolation Methods Methodologies for Valuing Liability Cash Flows That Extend Beyond the Maximum Yield Curve*: 18-26.

的波動愈大，費差分紅愈大，但各期分紅機率平均越小，原因在於模擬費用率的波動愈大，愈有可能產生較低的模擬費用率，故費差益愈大造成費差分紅愈大；而當費用率波動愈大，越有可能產生較多的高費用率模擬值，因此較不易分紅，綜合上述分析，此變異數為單各年費用率的10%下的費差分紅值為合理值。

表7 模擬分配變異數與費差分紅變化

變異數為保單各年 費用率的乘數	5%	10%	20%
費差分紅	2,751.22	3,543.85	5,446.27
各期分紅機率平均	84.19%	69.23%	59.94%

對於保險公司來說，費差分紅為保單的實際費用支出低於預期的費用支出時所產生額外的淨收益，業務員離職而停止發放的佣金、降低營銷成本與規模效應皆有助於降低保單的實際費用率，進而產生費差益，但本文所討論的分紅保單產生費差益的原因本文認為來自於實際費用率的降低，代表保險公司費用管理良好；此外由於該保單保險期間長與保單後期仍有接近三成的殘存率（見下圖3），使保單能隨著年期增加逐漸產生費差益，導致後期的仍有一定的費差分紅金流，進而提升費差分紅現值。

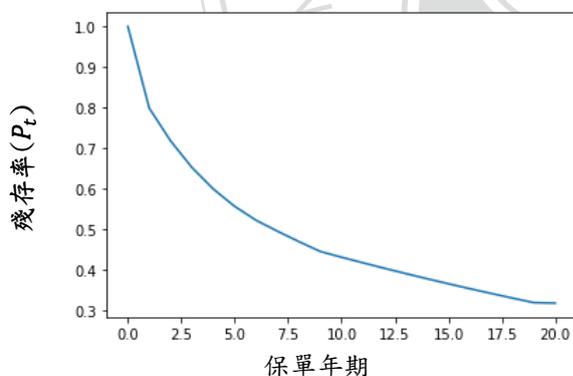


圖3 保單殘存率

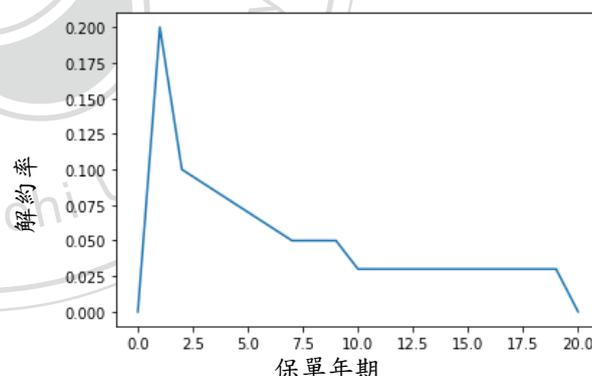


圖4 保單解約率

對於保戶而言，前期高機率享有費差額外所帶來的利益以及分紅率高於規定的分紅率的特性，有助於穩固保戶對於該保單是否發放紅利的信心，降低保戶未來解約的機率，故該保單後期的解約率有所降低(如上圖4所示)。

第二節 死差分紅模擬

關於死差分紅的模擬主要模擬的對象為死亡率，但與費用率模擬假設服從常態分配來直接模擬不同，實務上使用Lee Carter模型先對中央死亡率模擬，再轉成死

亡率以獲取模擬的死亡率。Lee Carter模型的模型參數為未知，故須先對模型的參數估計才能做後續的模擬，首先從人類死亡率資料庫(Human Mortality Database)蒐集臺灣男性1970-2019年的中央死亡率資料，再透過本文第三章第二節方法Lee Carter模型(見式6)進行模型參數估計，模型參數過去 α_x 、 β_x 以及 K_t 的估計分別如下圖5、圖6、圖7：

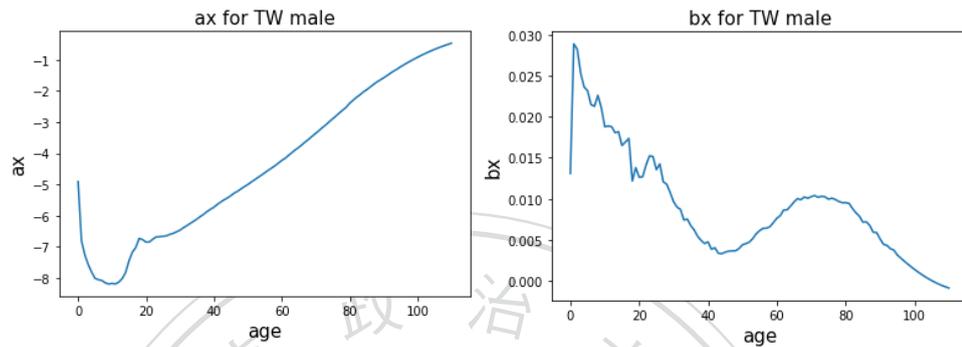


圖5 Lee Carter模型參數 α_x

圖6 Lee Carter模型參數 β_x

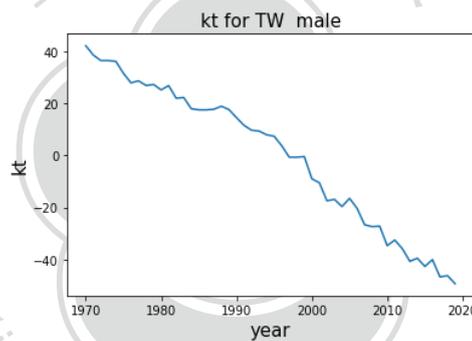


圖7 Lee Carter模型參數 K_t

其中圖5為臺灣男性各歲數(age)對應的 α_x 值；圖6為臺灣男性各歲數(age)對應的 β_x 值；而圖7為過去1970—2019年對應的 K_t 值。圖6顯示臺灣男性在40歲至70歲時 β_x 有上升的趨勢，代表台灣男性在40歲至70歲間有死亡率改善，此外圖7顯示 K_t 隨年度增加而有下跌的趨勢，代表臺灣男性在過去1970-2019年有死亡率改善。

由於實證上Lee Carter模型本身(見式6)適配性較佳，故一般不會透過模擬式6的殘差項直接模擬中央死亡率的對數值，而是採用 K_t 的一階自我歸模型(first order AutoRegression ;AR(1))(見式7)，藉由對式7的模擬殘差項來模擬未來保單期間的 K_t 值，再利用 K_t 的模擬結果帶入Lee Carter模型中(見式6)取得中央死亡率的對數模擬值，由於未知 K_t 的AR(1)的參數，故須先估計參數。首先透過1970—2019年 K_t 數值資料對 K_t 的AR(1)模型對進行參數估計，並得知解釋變數係數(K_{t-1})為1且顯著與常

數項為介於-1~-2間，這與式7解釋變數係數為1的理論值與過去論文估計結果¹⁴相符，其估計結果如下表8：

表8 K_t 的AR(1)估計結果

參數	係數	標準誤	Z值	P-value
常數項(c)	-1.8740	0.387	-4.847	0.000
解釋變數(K_{t-1})	1.0043	0.014	69.299	0.000

再者模擬 K_t 之AR(1)模型的殘差項(ε_t)，其中根據式7，殘差項為服從平均值為零且變異數採用過去1970至2019年的 K_t 值的標準差27.31的平方，再根據表8 AR(1)的估計結果，得到下式39的結果；接著以2019年的 K_t 值作為模擬的起始值，此起始值亦為保單年度第0年之值，再將下式39中殘差項模擬結果矩陣代入下式39的AR(1)模型中，來模擬保單年度第1年至第20年，其中每年度模擬10萬種情境，故產生共200萬筆模擬 K_t 值。然而，在後續模擬 K_t 值代入Lee Carter模型前，因模擬時常發生錯誤的情況導致可能產生不合理的結果，因此需先確保保單各年度模擬 K_t 的平均值與保單各年度理論 K_t 值的平均值需相等驗證模擬的正確性。其中各年度理論 K_t 的平均值為式39取期望值(見下式40)，而各年度模擬 K_t 值則為給定保單年度下10萬筆的 K_t 的平均值。

$$K_t = -1.8740 + 1.0043K_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 27.3184^2) \text{ iid} \quad (\text{式39})$$

$$E(K_t) = -1.8740 + 1.0043 \times K_{t-1} \quad (\text{式40})$$

關於各保單各年度模擬 K_t 值的平均值(即上式39的結果所求得的 K_t 值分別對各年度(t)的10萬條路徑取平均所求得)與各年理論 K_t 的平均值(即上式40中各年度 K_t 的期望值)，結果如下表9所示，表中模擬 K_t 近似於理論的 K_t ，故模擬上並無錯誤。

表9 模擬 K_t 的平均值與理論平均的對比

保單年度	模擬 K_t 的平均值	理論 K_t 的平均值
1	-51.4305	-51.4525
2	-53.5275	-53.5307
3	-55.6335	-55.6776
4	-57.7487	-57.7414
5	-59.8730	-59.8253
6	-62.0065	-61.9424

¹⁴ 參照自黃芳文，2015，*死亡風險的自然避險與商品設計*，國立政治大學風險管理與保險學研究所未出版博士論文，臺北，臺灣。

7	-64.1493	-64.0545
8	-66.3014	-66.1045
9	-68.4628	-68.2426
10	-70.6336	-70.4843
11	-72.8138	-72.5271
12	-75.0034	-74.6700
13	-77.2026	-76.9009
14	-79.4112	-79.0235
15	-81.6295	-81.2526
16	-83.8573	-83.4233
17	-86.0948	-85.6159
18	-88.3420	-87.8484
19	-90.5990	-90.1203
20	-92.8657	-92.3915

求得 α_x 、 β_x 與模擬的 K_t 值後即可模擬 $m_{x,t}$ 。由於本文前文提到Lee Carter模型(見式6)適配良好，殘差較小，因此在模擬 $m_{x,t}$ 時，Lee Carter模型的殘差項可忽略不計，故式6可改寫成如下式41所示：

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x K_t \quad (\text{式41})$$

其中 α_x 、 β_x 估計值採用前文透過歷史資料所估計的估計值，因保單假設為30歲起保，保險期間為20年， α_x 、 β_x 估計值選取30歲(含)至50歲的區段，而 K_t 則採用2019年以及模擬未來20年的 K_t 值，依照30歲對應2019年(保單年度第0年)、31歲對應2020年(保單年度第1年)等等的邏輯，分別選取對應的 α_x 、 β_x 以及模擬的 K_t 代入Lee Carter模型(見式40)得到 $m_{x,t}$ 對數值的模擬結果，再取自然指數得到 $m_{x,t}$ ，最後，在定常人口及均勻死亡(UDD)的假設下¹⁵，可由下式42求出模擬的死亡率(q_x)：

$$q_x = \frac{m(x,t)}{1 + m(x,t)/2} \quad (\text{式42})$$

計算死差分紅前，尚未決定預期死亡率，參考評價手冊21(Valuation Manual 21；VM 21)對於死亡率的計算方式，預期死亡率與死亡改善率有關，故假設當年保戶年齡為 x 下，預期死亡率(q_{Gx})表達為下式43：

$$q_{Gx} = \alpha_D \times (1 - G_{2x}) \times q_x^{16} \quad (\text{式43})$$

¹⁵ 余清祥，2015，*修勻學：生命表的建構與相關考量*，<https://reurl.cc/ZAkLYW>，搜尋日期:2022年6月1日。

¹⁶ 詳見 National Association of Insurance Commissioners. 2021. *Valuation Manual*. .p21-38關於死亡率介紹。

其中，因保險公司分紅時並非派發全部紅利予保戶，故乘上死差分紅率 α_D ；而 G_{2x} 為死亡改善率，隨年齡為 x 變動； q_x 為實際死亡率，隨年齡 x 變動，此值為模擬值。得知預期死亡率、模擬的死亡率後，根據保單死差分紅計算公式(見式4)，死差分紅除了死差本身外，亦包含死差分紅率、身故保險金和殘存率，而依表1保單精算假設身故保險金為100萬，死差分紅率為80%；死亡改善率為簡化分析，本文假設固定常數30%。綜上述假設與死亡分紅公式與預期死亡率公式，年齡為 x 的預期死亡率(q_{Gx})以及第 t 期的死亡分紅分別表達如下式44、式45：

$$q_{Gx} = 80\% \times (1 - 30\%) \times q_x \quad (\text{式44})$$

$$\text{死差分紅}_t = 80\% \times \text{Max}(q_{Gx} - q_x, 0) \times 1,000,000 \times P_{t-1} \quad (\text{式45})$$

其中 q_{Gx} 為預期死亡率，透過式44求得， P_{t-1} 第 $t-1$ 期的殘存率。與費差分紅同理，透過Smith-Wilson方法的無風險利率曲線，將各期的金流進行折現至今日(第0期)，並將10萬筆現值取期望值，即可得到死差分紅現值為268.34元，對比利用各期平準保費收入使用相同無風險利率曲線進行折現所得之保費收入現值442,305.92元，因保險公司發行保單以獲利為目的，不可能讓保戶透過買賣該保單套利，故死差分紅現值小於保費收入現值實屬合理。從各年度折線前金流來看，計算各期派發紅利占所有模擬路徑(10萬種情境)路徑之比例，即為各年度考量各種模擬的死亡率情境下分紅機率，縱軸為給定保單年度下分紅機率，橫軸為以年為單位的保單年度，從第1年度開始至第20年度，各年期的分紅機率如下圖8所示：

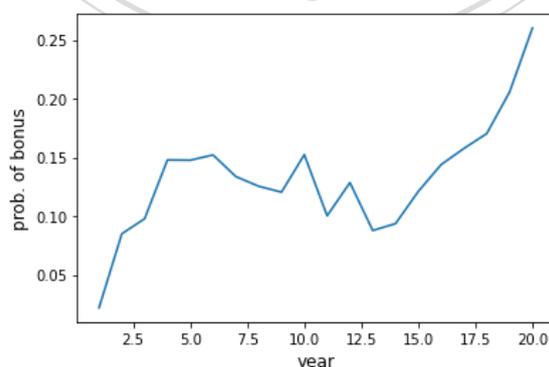


圖8 各年期的死差分紅機率

圖8顯示在給定該保單之被保險人30歲起保的假設下，分紅機率從保單年度第10年(被保險人年齡為40歲)的15.23%顯著提升至第20年度(被保險人年齡為50歲)26%，代表被保險人年齡為40歲至50歲時因死亡率改善的緣故，導致死亡率低於

預期進而較容易分紅，此數據推論與本文前文圖6估計Lee Carter模型 β_x 時發現臺灣男性在40歲至70歲間有死亡率改善的結果相符合，然而綜觀保險期間內的死差分紅機率卻不高(皆小於50%)，故預期死差分紅的現值不會太大，因此死差分紅僅百位數屬合理預期。

對保險公司而言，死差分紅為實際死亡率相較預期死亡率低時所產生的額外的淨收益，但隨著人們醫療技術進步與生活水準的提高，導致實際死亡率有所降低，從而預期會有更多的死差益，而該保單儘管反映死亡率改善影響，使該保單的保險期間內分紅機率有所提升，但保險公司對於該保單理賠管理過於自信，低估預估死亡率，使整體分紅機率皆不足50%，最終導致死差益偏小。

以保戶角度來看，由於保單前期分紅機率皆為0~15%間浮動，代表前期有很大的機率不會分紅，這會讓保戶懷疑公司的經營管理能力，讓保戶喪失該保單未來分紅的信心，進而提高該保單前期的解約率(如圖4保單解約率所示，第一期的解約率高達兩成)。

第三節 利差分紅模擬

利差分紅模擬主要的模擬對象為利率，故須先了解保單分紅利率的變化，方能從中設定合理的參數模擬利率以推論出保單分紅利率的未來可能走勢。保單分紅利率為臺灣銀行、合庫銀行與第一銀行二年期定存利率的平均，近年保單分紅利率變化表如下圖9：

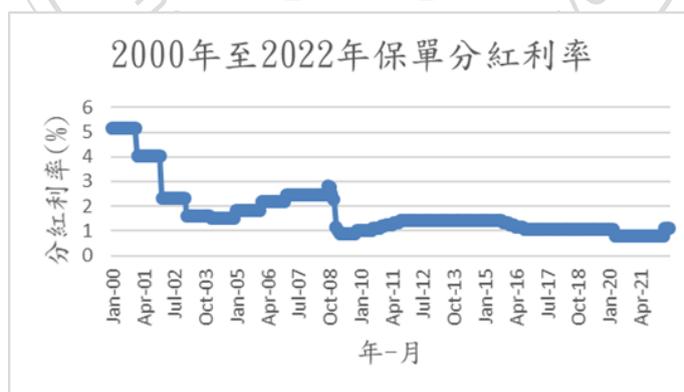


圖9 近年保單分紅利率變化表¹⁷

利率模擬方法採用第三章第二節提到的Hull White利率模型進行短利率模擬，首先觀察圖9關於近年保單分紅利率變化表，分紅利率介於5.15%~0.81%間，因此為了反映圖9關於近年保單分紅利率變化的情況，短利率模擬應介於5%以內較

¹⁷ 資料來源:中華民國人壽保險商業同業公會

為合理，故本文假設反轉速率為0.015、瞬時波動度為0.0075、瞬時遠期利率1.09%以及2022年6月1日當日的零息曲線作為參數進行短利率模擬，其中短利率模擬期數20年，模擬路徑數為10萬，短利率模擬結果如下圖10：

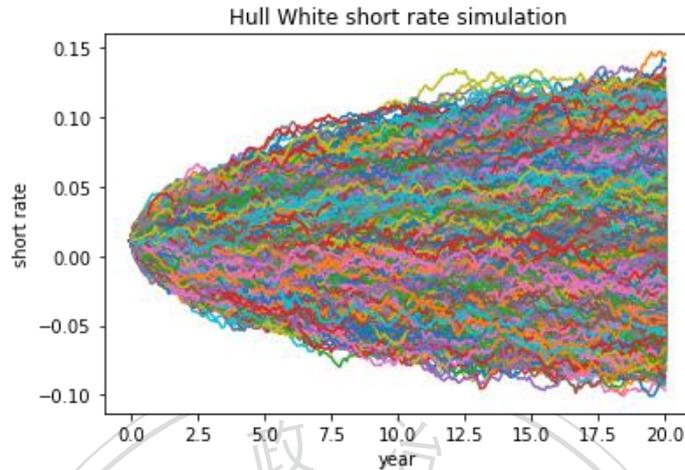


圖10 短利率模擬圖

上圖10中橫軸為保單年度，單位為年，縱軸為短利率之值，模擬之短利率皆介於-0.5%~3%間，就數值上算合理範圍，但因模擬時常程式出錯，無法確定模擬程式本身是否有問題，因此為了驗證模擬正確性，於本文第三章第二節中提到Hull White模型模擬短利率之平均值與變異數的須符合短利率理論之機率分配參數(見式32、33，關於模擬值和理論值的作圖如下圖11、圖12：

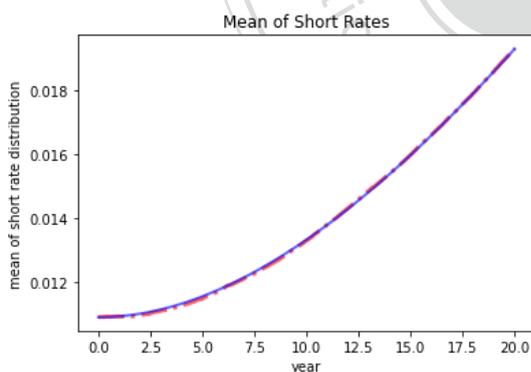


圖11 短利率之平均值

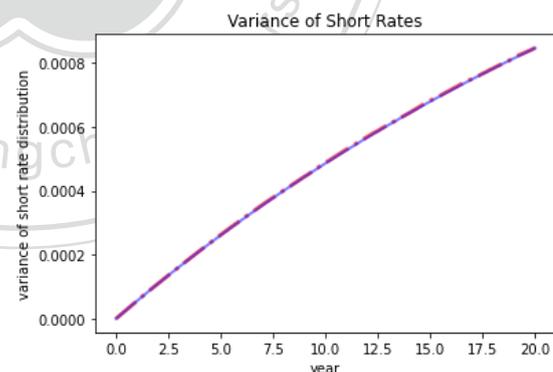


圖12 短利率之變異數

其中上兩圖橫軸為保單年度，單位為年，圖11、圖12縱軸則分別對應平均值和變異數，而圖11、圖12中藍線分別對應各年度短利率理論之機率分配平均數、變異數，紅線分別對應各年度模擬之短利率平均和變異數，圖中代表模擬值的紅線與代表理論值的藍線吻合，故可確定短利率模擬上沒有問題。

計算利差分紅根據保單利差分紅計算公式(見式4)，第t期的費差分紅為利差分紅率、利差、期中保單價值準備金以及殘存率這四者之乘積，其中保證利率為保單

提供的預定利率4%，而利差分紅率由於保單未給定，故同費差分紅作法參考死差分紅率將分紅率設為80%，綜合上述資訊，第t期的利差分紅模擬數學式表達為下式46：

$$\text{利差分紅}_t = 80\% \times \text{Max}(r_t - 4\%, 0) \times \frac{V_t + V_{t-1}}{2} \times P_{t-1} \quad (\text{式46})$$

其中 r_t 為模擬的短利率； P_{t-1} 為第t-1期殘存率； V_t 為第t期的責任準備金， V_{t-1} 為第t-1期的責任準備金，以取第t-1期的責任準備金和第t期的責任準備金的平均值作為期中保單價值準備金。

最終將透過式46計算的各期利差分紅，並透過Smith Wilson方法的無風險利率曲線進行折現，並將10萬筆現值取期望值，即可得到利差分紅現值為5,209.60元，此數值較保費收入現值442,305.92元小，故為合理值。由各期折線前金流角度來看，計算各期派發紅利占所有模擬路徑(10萬種情境)路徑之比例，即為各年度考量各種模擬的利率情境下各期之分紅機率，如下表10所示，各期派發紅利的機率從第一期0.0004%逐年提升至第20期的約24%，原因在於圖11中各期的短利率平均而言上升的趨勢，因此在預定利率為定值4%的條件下，導致後期較前期更容易產生利差益，因此分紅機率逐期提高實屬合理。

表10 各期利差分紅機率

第1期	第2期	第3期	第4期	第5期	第6期	第7期	第8期
0.00004	0.0025	0.0117	0.0248	0.0396	0.0548	0.0703	0.0851
第9期	第10期	第11期	第12期	第13期	第14期	第15期	第16期
0.0993	0.1138	0.1273	0.1398	0.1537	0.1661	0.1787	0.1912
第17期	第18期	第19期	第20期				
0.2036	0.2158	0.2296	0.2408				

發放紅利會對保險公司產生現金流壓力，以下表11該保單利差分紅的各期金流平均來看，得知該保單分紅發放的型態為逐期增加，而非初期即發放較多的紅利，因此有助於保險公司降低即期的現金周轉壓力，能夠讓保險公司有多餘的現金用於對長期資產的投資，進而提升該保單的投資效益；此外，儘管本文模擬未來20年的利率波動大，但表10所示的利差分紅機率皆低於五成，因此本文認為保單訂定過於樂觀的預定利率，導致該保單產生利差益可能性降低。

表11 各期利差紅利金流平均

第1期	第2期	第3期	第4期	第5期	第6期	第7期	第8期
0.00004	0.0003	0.1433	1.8986	7.4179	17.7813	33.5637	54.7187
第9期	第10期	第11期	第12期	第13期	第14期	第15期	第16期
81.9233	116.6302	157.5438	208.1015	265.3384	330.6041	401.4602	483.3819
第17期	第18期	第19期	第20期				
568.3995	666.4324	768.6161	887.1958				

由於保戶傾向於越早拿到分紅越好，因此買了分紅保單會特別在意前幾年的分紅水準，根據表10來看保單初期幾乎領不到分紅，如此分紅型態可能會讓保戶喪失對於該保單未來投資效益的信心，進而提高該保單前期的解約率(如圖4保單解約率所示，第一期的解約率高達兩成)。

第四節 選擇權與保證利益的時間價值計算

選擇權與保證利益的時間價值為在風險中立測度下以隨機情境衡量之現金流量減去確定情境下之負債現金流量，綜合上三節的分紅計算皆為隨機情境減去確定情境之結果，因此可將各項分紅計算結果視為對應項目的選擇權與保證利益的時間價值，而該保單的選擇權與保證利益的時間價值則透過加總各項分紅(包含費用、死亡、利率)的計算結果得知，該保單之選擇權與保證利益的時間價值計算結果總結如下表12：

表12 保單之選擇權與保證利益的時間價值計算結果

	費用	死亡	利率	保單整體
TVOG值	3,543.8574	268.3482	5,209.6019	9,021.8075
占比	39.28%	2.97%	57.75%	100%

從表12數值分開來看，該保單選擇權與保證利益時間價值以利率部分57.75%占比最大，原因在於利差分紅計算考量到期中責任準備金，儘管保單費用率(見表5)大於利率，各期產生費差益機率皆大於利差益機率，但用於計算利差分紅的期中責任準備金相較於用於費差分紅計算的平準保費來得大，故在利差益發生機率非零的情況下，利率分紅會大於費用分紅，而死差分紅占比墊底原因在於死亡率為費用率、死亡率和利率三者中最小所致。

依保單整體現金流來看，該保單選擇權與保證利益時間價值為9,021.81元，反映的是該保單隱含選擇權與保證的價值，為一虛值，此數值小於該保單的保費收

入現值442,305.92元，故以保險公司觀點並無保費少收的問題。而表12得知，該保單選擇權與保證利益時間價值以利率部分占比最大，一旦保險公司投資策略有誤，對於該保單隱含之選擇權與保證利益的清償能力影響極大，同時保戶對於前期分紅型態較為敏感，占比大的利率分紅對於保戶解約影響最為顯著，因此管理該保單之利差損益尤為重要，而關於利率部分管理有以下討論：

- 一、本文認為可能有保單訂定過高的預定利率之問題存在，原因在於該保單在產品銷售層面由於受各家保險公司同質性商品眾多而激烈競爭所致，高預定利率有助於吸引更多保戶購買，但在分紅層面觀點卻非如此，因為定價保守(即設定之預定利率低)才能有多的紅利分出來予保戶，預定利率反而越低越好，高預定利率反而會降低分紅機率，促使保戶選擇不購買或解約，故預定利率高低會影響該保單的銷售狀況，也是保險公司應面臨的課題。
- 二、利率受保險公司投資獲利能力影響，一旦投資出現虧損，自然不會分紅，反之一旦獲利，保險公司面臨兩個選擇：分紅或再投資，若各期直接分紅，其價值僅表12列的5,209.60元；若選擇再投資，則可賺取貨幣上的時間價值，會大於表12所列的利率分紅5,209.60元；另外，選擇適當的投資標的才能增加分紅的機率，即增加虛的價值轉成實值的機率。

第五章 結論與建議

本文首先選擇TVOG的計算方法，本文採用風險中立測度下的隨機情境法透過蒙地卡羅模擬保單未來20年的費用率、死亡率、利率，再分別檢查這三項模擬數值與理論是否相合，接著依照某家公司的分紅保單分紅公式計算費差分紅、死差分紅與利差分紅的金流，分析結果後發現該保單分別有高機率產生費差益，代表發行該保單之保險公司費用管理良好，能夠有效降低並控制費用率水平或設定較低的預定利率，保戶可享少繳保費獲得保障或多領費差紅利之權利，但低機率產生死差益和利差益，代表發行該保單之保險公司的理賠管理與投資能力可能存在問題，造成理賠支出大於預期以及投資收益低落，因此該公司須加強審核保戶出險情形與投資策略與投資標的是否合適。

最後，本文加總該保單的費差分紅、死差分紅與利差分紅的現值取得該保單的TVOG，觀察數據發現以大至小排序分別為利率、費用、死亡，這意味著該保單的保證的時間價值以利率影響最大，鑑於該公司投資能力不足的因素，再加上該保單的TVOG因利率占比大易受利率影響的緣故，因此投資獲利不確定性的提升會降低保戶對於該保單整體分紅的信心，間接影響保戶的該保單的購買意願與解約動機。

就監管層面，TVOG為保戶繳交保費所換取的權益，因此須立法保障，故財政部發布「分紅保單資訊揭露規範」規定，分紅保單連續二年未能達標合理的紅利金額的累積值時，保險公司應向主管機關提出改善措施，這規定造就降低分紅不穩定性，進而降低該保單TVOG的波動度，維護保戶的權益。

儘管本文提供分紅保單詳細的計算過程，但仍有不足之處，例如，本文並未探討TVOG的敏感度分析，藉由調整保單期間以及模擬參數(如利率、死亡的部分)，討論對TVOG影響為何，或是實際利用本文提供的保單資訊，套用本文於第二章提及的各種TVOG算法，計算並比較其結果，甚至是本文的方法套用更多具保證性質的商品，探討各商品間的TVOG間的關聯，期望未來藉由本文的啟發，後人能根據本文的方法做進一步分析。

參考文獻

一、中文文獻

- 1、王靈芝，2015，基於一致性原則的償二代TVOG風險因子校準，*保險研究*，12期: 30-39。
- 2、余清祥，2015，*修勻學：生命表的建構與相關考量*，<https://reurl.cc/ZAkLYW>，搜尋日期:2022年6月1日。
- 3、余清祥，2015，*修勻學：參數修勻法*，<https://reurl.cc/NAW7Y5>，搜尋日期:2022年6月1日。
- 4、孫鑫，2020，*IFRS17與大陸現行會計準則負債公允價值之研究：以分紅保險為例*，國立政治大學風險管理與保險學研究所未出版之碩士論文，臺北，臺灣。
- 5、財政部，2002，*本業銷售分紅及不分紅人壽保險單應遵守原則*，<https://reurl.cc/QLMMDo>，搜尋日期：2022年6月15日
- 6、陳欣文，2022，*保誠人壽分紅保單：三明治族助力*，<https://reurl.cc/anmRZD>，搜尋日期：2022年6月25日。
- 7、凱晟精算顧問有限公司，2021，*IFRS 17主要關鍵導入議題委託研究案期末報告*。
- 8、黃芳文，2015，*死亡風險的自然避險與商品設計*，國立政治大學風險管理與保險學研究所未出版博士論文，臺北，臺灣
- 9、萬歷歷，2016，*償二代壽險責任準備金評估的理論研究及實證分析*，南開大學經濟學研究所未出版之碩士論文，天津，中國。
- 10、詹志清，2020，*臺灣個人壽險解約與銷售通路之實證研究*，逢甲大學金融學位學程未出版之博士論文，臺中，臺灣。

二、英文文獻

- 11、Grosen, A., and Jørgensen, P. L. 2000. Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26 (2000) : 37–57
- 12、Villegas, A.M., Millosovich, P., and Kaishev, V.K. 2018. StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling. *Journal of Statistical Software*, 84 (3): 1-34.
- 13、Brigo, D., and Mercurio, F. 2001. *Interest Rate Models Theory and Practice*. US: Springer

- 14 、 Chief Financial Officer Forum. 2016. *European Embedded Value Principles*.
<https://reurl.cc/2Zn9En>. Accessed Mar. 20, 2022.
- 15 、 Deloitte. 2018. *IFRS 17 and Embedded Value Reporting*. <https://reurl.cc/d2Ykn6>.
Accessed Apr. 15, 2022.
- 16 、 Hull, J. C. 2015. *Options, Futures and other Derivatives (9th .ed)*. US:PEARSON
- 17 、 International Accounting Standards Board. 2017. *IFRS 17 Insurance Contracts*.
<https://reurl.cc/Wr6z1e>. Accessed March. 2, 2022.
- 18 、 National Association of Insurance Commissioners. 2016. *Actuarial Guideline XLIII:
CARVM FOR VARIABLE ANNUITIES*.
- 19 、 National Association of Insurance Commissioners. 2021. *Valuation Manual*.
- 20 、 Noel Harewood and Kenneth LaSorella. 2009. *Embedded Value (EV) Reporting*.
American Academy of Actuaries Life Financial Reporting Committee: US: 19-20.
- 21 、 Hunt, P. J. ,and Kennedy, J. E. 2000. *Financial Derivatives in Theory and Practice*.
England : John Wiley and Son LTD.
- 22 、 Hieber, P., Natolskic, J., and Werner, R. 2019. Fair valuation of cliquet-style return
guarantees in (homogeneous)heterogeneous life insurance portfolios. *Scandinavian
Actuarial Journal*. 6: 478–507.
- 23 、 Komański, P., and Sokoliński, O. 2015. *Least-Squares Monte Carlo Simulation for
Time Value of Options and Guarantees Calculation*. Unpublished doctoral dissertation,
University of Warsaw, Poland.
- 24 、 Nocito, S. 2015. *Stochastic Mortality Projections: A Comparison of the Lee-Carter
and the Cairns-Blake-Dowd models Using Italian Data*. Unpublished doctoral dissertation,
University of Studies of Turin, Italy.
- 25 、 Singapore Actuarial Society. 2020. *Options and Guarantees* .
- 26 、 Society of Actuaries. 2016. *Nested Stochastic Modeling for Insurance Companies*.
<https://reurl.cc/6Z8n5y>. Accessed Apr. 16, 2022.
- 27 、 Society of Actuaries. 2019. *Yield Curve Extrapolation Methods Methodologies for
Valuing Liability Cash Flows That Extend Beyond the Maximum Yield Curve* .