AEIO的直接推理研究

丁崇貞

一、前　　言

傳統上將推理分直接推理（Immediate Inference）與間接推理（Mediate Inference）兩種。所謂直接推理，就是僅由一個命題推衍的邏輯結果的過程。所謂間接推理，就是從一個已知命題藉其他命題爲媒介而推衍的一種推理，亦就是其結論是由前提聯合推衍出來的，而不是由單一的前提推衍出來的。（註一）

在邏輯理論的系統中，直接推理就是從A．E．I．O等四命題形式中的任一命題推出另一同樣形式命題的推理。故本文係從ＡＥＩＯ等命題的形式與圖解、換質（Obversion）、換位（Conversion），及從直接推理看ＡＥＩＯ等命題間的關係等方面，分別予以研究。

二、AEIO 四命題的形式

A．E．I．O四命題，傳統上稱之爲主謂式（subject-predicate forms）命題。其形式是：

A：凡S是P（All S is P）或寫作 SAP.

E：無S是P（No S is P）或寫作 SEP.

I：有的S是P（Some S is P）或寫作 SIP.

O：有的S不是P（Some S is not P）或寫作SOP.

前面的兩個形式是全稱命題的形式，後面的兩個形式是特稱命題的形式。「S」與「P」分別代表主詞項（Subject terms）與謂詞項（Predicate terms）。「凡」（all）、「無」（no）與「有的」（some）等量詞（quantifier）代表命題的量。「是」（is）與「不是」（is not）是繫詞（Copula），表示命題的性質。

這四種命題形式，如以“x”爲變項（Variable），以“(x)”爲全稱量化號（Universal quantifier），以“(∃x)”爲存在量化號（Existential quantifier），則可以符號表示如下：

A：$(x)〔Sx \supset Px〕$

〔讀做：對於任何 x 而言，假如 x 是 S，則 x 是 P〕

E：(x)〔Sx⊃－Px〕

〔讀做：對於任何 x 而言，假如 x 是 S，則 x 不是 P〕

I：(∃x)〔Sx・Px〕

〔讀做：至少有一 x，x 是 S 並且又是 P〕

O：(∃x)〔Sx・－Px〕

〔讀做：至少有一 x，x 是 S，可是却不是 P〕

前面兩式稱爲全稱量化式，後面兩式稱爲存在量化式。但是，A與O是矛盾的，即二者彼此互爲否定。E與 I 亦然。這就提示我們：A E I O四命題形式可以有另一種符號表示，就是在O式的前面加一否定號，即與A式是等値的（equivalent）在 I 式的前面加一否定號，即與E式是等値的。於是，A・E・I・O四命題形式又有下面的符號表達式：（註二）

A：－(∃x)〔Sx・－Px〕

E：－(∃x)〔Sx・Px〕

I：－(x)〔Sx⊃－Px〕

O：－(x)〔Sx⊃Px〕

由此可知：A・E・I・O四命題形式可用「全稱量化式」表達，也可用「存在量化式」表達。

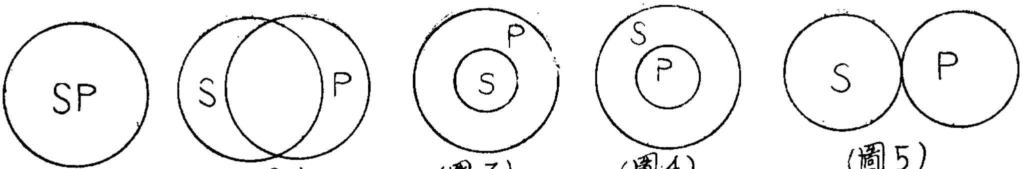
三、AEIO 四命題的圖解

㈠以歐拉圓圖解A E I O

歐拉圓（Euler's Circles）是瑞士數學家歐拉（L. Euler 1701–83）所創。他用圓圈代表類，圖解A E I O四命題，故稱爲歐拉圓。依照歐拉圓、任何兩類事物的相合、相離，僅有五種可能的情形。歐拉以兩個圓圈的相合、重疊與排斥，表示兩類的包含與排斥關係。（註三）今以S圓圈代表主詞類，P圓圈代表謂詞類。此五種可能的情形排列如下：

⑴圖：表示S類與P類是同一的，即：凡S是P，凡P是S。

⑵圖：表示S類與P類重疊，即：有的S是P，有的S不是P，有的P是S，



(圖1)　(圖2)　(圖3)　(圖4)　(圖5)

有的P不是S。

(3)圖：表示S類包含在P類中而成爲P類的一部分，即：「凡S是P」，而非「凡P是S」，但「有的P是S」，「有的P不是S」。

(4)圖：表示P類包含在S類中而成爲S類的一部分，即：「凡P是S」，而非「凡S是P」，但「有的S是P」，有的S不是P」。

(5)圖：表示S類與P類互相排斥，即：無S是P，亦無P是S。

從以上五個圖中，我們可以看出：這五個圖窮盡了S類與P類間所有可能的關係。

由於I與O兩特稱命題的量詞“Some”，是意指「至少一個，但也不排斥全部」，(註四) 故我們用歐拉圓 (Euler's Circles) 圖解A (SAP)、E (SEP)、I (SIP)、O (SOP) 時，顯然可見：

A (SAP) 可以(1)(3)兩圖表示，而排斥(2)(4)(5)三圖。

E (SEP) 可以(5)圖表示，而排斥(1)(2)(3)(4)四圖。

I (SIP) 可以(1)(2)(3)(4)四圖表示，而排斥(5)圖。

O (SOP) 可以(2)(4)(5)三圖表示，而排斥(1)(3)兩圖。(註五)

然而，以歐拉圖圖解AEIO四命題固然很淸明白，但如S類爲零，或P類爲零，則歐拉圓就無法圖解AEIO四命題了。於是，邏輯學者就以下面的方式圖解AEIO四命題了。

(二)用類的關係圖解AEIO

1. 類 (Class)

一般說來，一個類是一羣具有相同性質的事物的集合。一個類中的分子相互間必具有某些共同的特性，而一個個物 (individual) 之所以被納入某一個類而成爲該類中的一個分子 (member)，正因爲它具有被納入某一個類所具有的特性。譬如：只有當一個人是政治家時，我們才說他是屬於政治家之類，才說他是政治家之

類的一分子，而他之所以被納入政治家之類，正因為他具有「政治家」此一特性。（註六）

其次，我們再來研究類的「界定形式」（defining form）。當我們說「蘇格拉底是有死的」這一命題時，如果蘇格拉底確實是有死的，則這一命題就是眞的。當這個命題是眞時，則蘇格拉底就屬於「有死的之類」。同理，如果「柏拉圖是有死的」這一命題為眞，則柏拉圖屬於有死的之類；如果「阿波羅是有死的」這一命題為眞，則阿波羅不屬於有死的之類。但由於「阿波羅是有死的」這一命題為假，因此阿波羅不屬於有死的類。將其內容抽離出來，這三個命題均具有如下的形式：

(1) x 是有死的。

這三個命題的主詞「蘇格拉底」、「柏拉圖」、「阿波羅」均是上式(1)中的變項（variable）"x" 的值（value），有些詞取(1)式中的變項 'x' 後所得的命題為眞，而有些詞取代(1)式中的變項 'x' 後所得之命題為假。凡取代 'x' 後得出眞的命題的詞，它所指稱的事物是有死的；凡取代 "x" 後得出假的命題的詞，它所指稱的事物不是有死的。因此，決定某個物是否為有死的之類中的一分子的標準是：以指稱某個物的詞取代(1)式中的變項 'x' 後所得出的命題是否為眞，若為眞，則該個物屬於有死的之類，並為其一分子，若為假，則該個物不屬於有死的之類，並不為其一分子。在(1)式中，'x' 的所有眞值（truth value）的集合即構成有死的之類。欲確定某一個物是否屬於有死的之類，則必須知道該個物是否為 "x" 的一個眞值。因此，我們說 " x 是有死的" 一形式是有死的之類的界定形式。（註七）

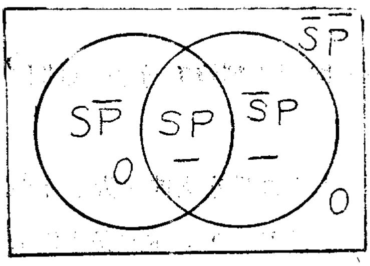
在 " x 是有死的" 一式中，如以 "M" 表示「有死的之類」的特性，則此式的符號表達式為 "Mx"。"Mx" 即是一切確說某個物是有死的的命題的共同型式，這個表達式稱為命題的函值。所以，一個類被認為是所有具有某種性質的事物的集合，或是滿足某一命題函值的所有的事物。（註八）

2. 兩類的分配

假設在一個「討論界域」（Universe of discourse）內，有 'S' 與 'P' 兩類。由於每一個類有一個補類（complementary class），故 'S' 類與 P 類就分別地有「$\bar{S}$」與「$\bar{P}$」兩個補類。於是，一個討論界域就自然地被分為四個次類（subclasses）。這四個次類可以這兩對補類彼此相乘的邏輯積（logical product）表示，就是：

「SP」，「$S\bar{P}$」，「$\bar{S}P$」與「$\bar{S}\bar{P}$」。（註九）

一個討論界域之分為四個次類，在幾何圖上是在一個矩形內畫兩個重疊的圓表示。於是，在這個矩形內的區域，被分為四個個別的部分（regions）。在這些部分如加上「O」的記號，就指明這個次類是空的（null），即這個次類沒有分子；如加上「—」記號，即指明這個次類至少有一分子。由於這個約定，顯然可以看出下圖是：



（圖6）

SP這一次類有分子，以符號表示為：$SP \neq 0$

$\bar{S}P$這一次類有分子，以符號表示：為$\bar{S}P \neq 0$

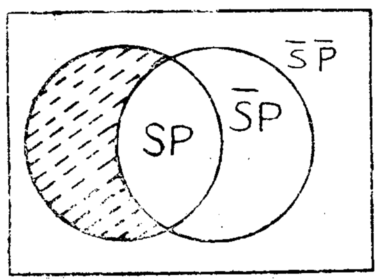
$S\bar{P}$這一次類沒有分子，以符號表示為：$S\bar{P} = 0$

$\bar{S}\bar{P}$這一次類沒有分子，以符號表示為：$\bar{S}\bar{P} = 0$

3. 以類的關係圖解A E I O

A：凡S是P（SAP）

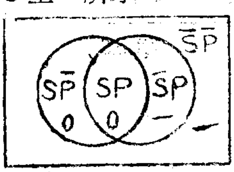
如圖7，將是S而非P的部分塗掉，表示是S而非P的這一次類等於0，亦即表示「是S而非P的次類沒有分子」。於是，凡是S類的分小，都是P類的分子。換言之，即是「凡S是P」。故$S\bar{P} = 0$，即是A命題，或說是SAP。



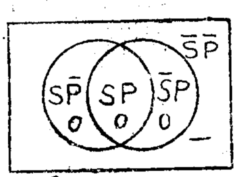
（圖7）$-(\exists x)[x \in S \cdot x \in \bar{P}]$

$S\bar{P} = 0$

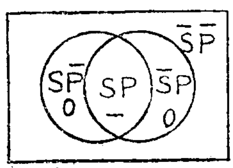
在此我們必須指出的是：當 $S\bar{P}$ 這一次類是空的時候，不管 SP，$\bar{S}P$，$\bar{S}\bar{P}$ 三個次類是空的或是有分子存在，SAP 都是眞的。如圖8至15所示。



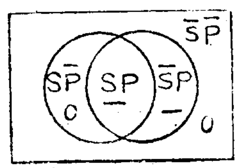
（圖8）$S=0$



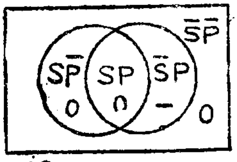
（圖9）$S=0, P=0$



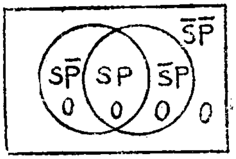
（圖10）



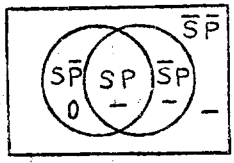
（圖11）



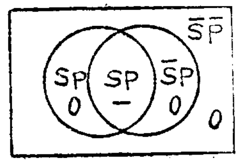
（圖12）$S=0$
$\bar{S}\bar{P}=0$



（圖13）$S=0, P=0,$
$\bar{S}=0, \bar{P}=0$



（圖14）



（圖15）$\bar{S}=0$
$\bar{P}=0$

此外，我們並可從「凡S是P」解釋爲類名（class terms」：

A：凡S是P：$(x)\ [Sx \supset Px] \equiv$

$(x)\ [x\varepsilon S \supset x\varepsilon P] \equiv$

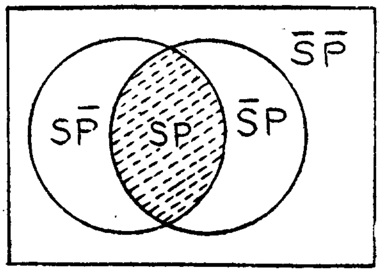
$\sim(\exists x)\ [x\varepsilon S \cdot x\varepsilon \bar{P}] \equiv$

$\sim(\exists x)\ [x\varepsilon S\bar{P}] \equiv$

$S\bar{P}=0$

這就是說：假如函值"Sx・－Px"沒有值(no values)，則 $S\bar{P}$ 類沒有分子。(註十)

E：無S是P（SEP）

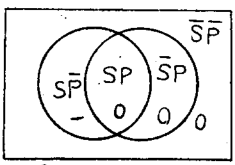


(圖16) $-(\exists x)[x\varepsilon S \cdot x\varepsilon P]$

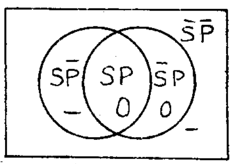
SP＝O

如圖16，將是S而又是P的部分塗掉，表示「是S而又是P」的這一次類等於0。亦即是 SP 這一次類是空類，沒有分子。即表示S類與P類互相排斥。既然「是S而又是P之次類沒有分子」，故無S是P。因此，SP＝0，即是E命題或說是 SEP。

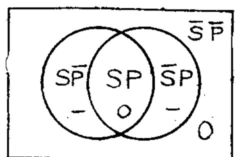
在此，我們必須指出：不管$S\bar{P}$，$\bar{S}P$，$\bar{S}\bar{P}$ 等三次類是空類或有分子存在，只要 SP＝0，即 SEP 這個命題是眞的。如圖8，9，12，13，17，18，19，20，所示。



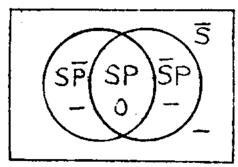
(圖17) P=0
S̄=0
P̄=0



(圖18) P=0



(圖19)



(圖20)

此外，我們並可從「無S是P」解釋爲類名：

E：無S是P：$(x)\ [Sx \supset -Px] \equiv$

$\sim(\exists x)\ [Sx \cdot Px] \equiv$

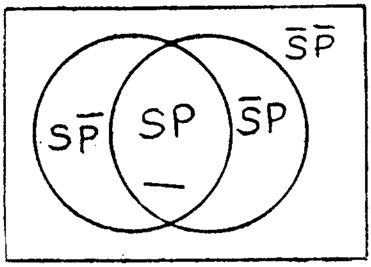
$\sim(\exists x)\ [x\varepsilon S \cdot x\varepsilon P] \equiv$

$\sim(\exists x)\ [x\varepsilon SP] \equiv$

SP＝0

這就是說：假如函值"Sx・Px"沒有值(values)，則SP類沒有分子，或SP＝0。

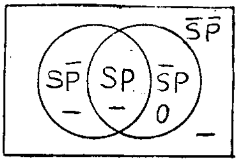
I：有的S是P（SIP）



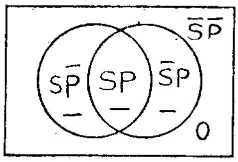
(圖21) $(\exists x)[Sx \cdot Px]$
$SP \neq 0$

如圖21，我們在 SP 這一部分劃一個「—」記號，表示這一次類有分子存在，不是空類。故 $SP \neq 0$，即是「有的S是P」，或寫作 SIP。

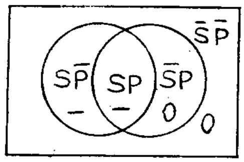
不管$S\bar{P}$，$\bar{S}P$，$\bar{S}\bar{P}$三個次類是空的，或有分子存在，只要 SP 這一次類有分子有存在，即 SIP 是眞的。如圖10，11，14，15，22，23，24，25等所示。



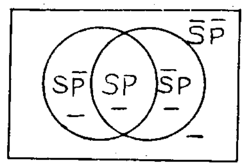
(圖22)



(圖23)



(圖24)



(圖25)

此外，我們亦可從「有的S是P」解釋爲類名：

I：有的S是P：$(\exists x)\ [Sx \cdot Px] \equiv$

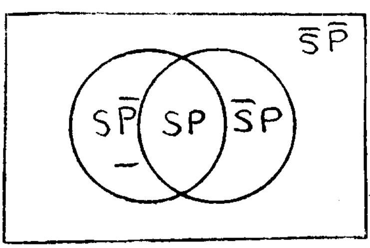
$(\exists x)\ [x \varepsilon S \cdot x \varepsilon P] \equiv$

$(\exists x)\ [x \varepsilon SP] \equiv$

$SP \neq 0$

這就是說：假若函值"Sx・Px"至少有一個值，則 SP 類至少有一個分子，或 $SP \neq 0$。

O：有的S不是P（SOP）



(圖26) $(\exists x)\ [Sx \cdot -Px]$
$S\bar{P} \neq 0$

如圖26，我們在 $S\bar{P}$ 這一部分劃一個「—」記號，表示這一次類有分子存在，不是空類。換言之，即是「有S不是P」。故 $S\bar{P} \neq 0$，即是O命題，或寫作 SOP。

不管SP，$\bar{S}P$，$\bar{S}\bar{P}$三個次類是空類或有分子存在，只要 $S\bar{P} \neq 0$，即 SOP 都是眞的。如圖17，18，19，20，22，23，24，25所示。

同時，我們從「有的S不是P」亦可推出類名來：

$$O：有的S不是P：(\exists x)\ [Sx \cdot -Px] \equiv$$
$$(\exists x)\ [x\varepsilon S \cdot x\varepsilon\overline{P}] \equiv$$
$$(\exists x)\ [x\varepsilon S\overline{P}] \equiv$$
$$S\overline{P} \neq 0$$

這就是說；假若函值"$Sx \cdot \sim Px$"至少有一個値，則 $S\overline{P}$ 類至少有一個分子，或 $S\overline{P} \neq 0$

總之：由類的關係的圖解，使我們知道：

$S\overline{P} = 0$，即是「凡S是P」，或寫爲SAP，或$(x)\ [Sx \supset Px]$。

$SP = 0$，即是「無S是P」，或寫爲SEP，或$(x)\ [Sx \supset -Px]$。

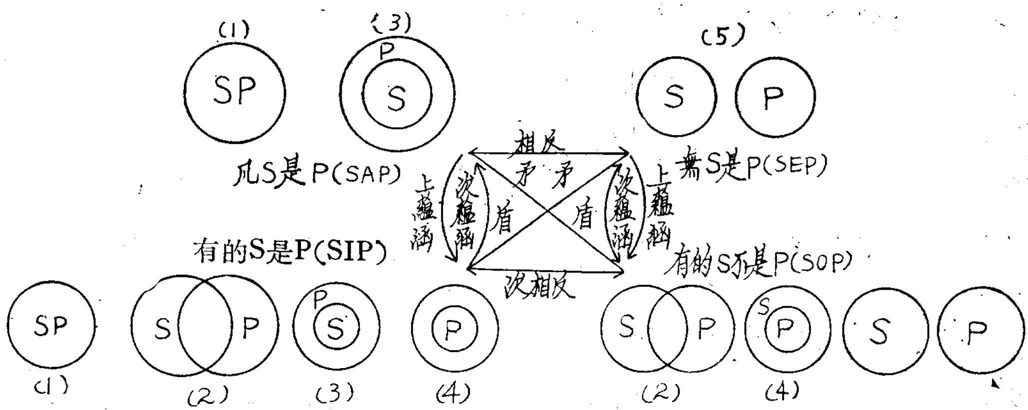
$SP \neq 0$，即是「有的S是P」，或寫爲SIP，或$(\exists x)\ [Sx \cdot Px]$。

$S\overline{P} \neq 0$，即是「有的S不是P」，或寫爲SOP，或爲$(\exists x)\ [Sx \cdot -Px]$。

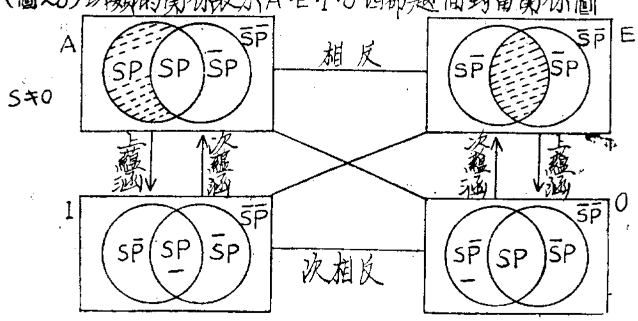
㈢由圖解看AEIO間的對當關係

1.當S類$\neq 0$時，由以歐拉圓與類的關係對A(SAP)、E(SEP)、I(SIP)、O(SOP)四命題的圖解，可知此四命題間的對當關係如下兩圖所示。茲綜述於後：

(圖27) 以歐拉圓表示A・E・I・O四命題的對當關係圖



(圖28)以類的關係表示A・E・I・O四命題間對當關係圖



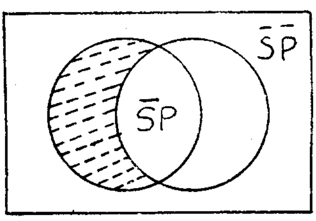
SAP 與 SOP，及 SEP 與 SIP 間的對當關係

由於歐拉圓（Euler's Circles）的五個圖窮盡了 S 類與 P 類間可能有的五種關係，故從圖27可見： SAP 與 SOP 兩命題不僅窮盡了歐拉圓的所有的五個圖，而且兩命題又沒有共同的圖解。所以，SAP 與 SOP 間是矛盾對當關係。 同理可證，SEP 與 SIP 間亦是矛盾關係。

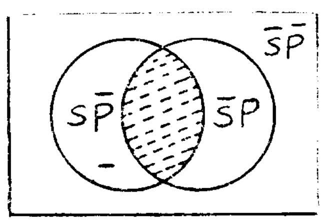
再度圖28來看：當 $S\bar{P}$ 類是空時，SAP 是眞的；而當 $S\bar{P}$ 類有分子存在時，SOP 是眞的。同時，當圖解 SOP 的假而未圖解 SAP 的眞是不可能的。 由此表示 "－SOP" 與 SAP 是等値的。所以，SAP 與 SOP 間是矛盾關係。當SEP 是眞時，SP 類是空的；當 SIP 是眞時，SP 類有分子存在。同時，當圖解 SIP 的假而未圖解 SEP 的眞時是不可能的。 這亦表示 "－SIP" 與 SEP 是等値的。所以，SEP 與 SIP 間是矛盾關係。

SAP 與 SIP，及 SEP 與 SOP 間的對當關係

從圖27中可以看出：當圖解 SAP 時，SIP 也被圖解出來。當圖解 SEP 時，SOP 亦被圖解出來。 由此可見：SAP 蘊涵 SIP，SEP 蘊涵 SOP。 析言之，即是由 SAP 至 SIP 是上蘊涵關係（Superimplication），由SEP 至 SOP 亦是上蘊涵關係。 由於次蘊涵關係（Sub-implication）是上蘊涵關係的逆轉， 故可推知由 SIP 至 SAP 是次蘊涵關係 ， 由 SOP 至 SEP 亦是次蘊涵關係 。（註十一）但從圖28看：當 $S \neq 0$ 時，SAP 必須由下面圖29來確定，SEP 必須由下面圖30來確定。而在圖29中可以看到，凡是包含 SAP 的圖解均能圖解 SIP 。（註十二）故 SAP 蘊涵（imply）SIP。在圖30中可以看到：凡是包含 SEP 的圖解均能圖解



（圖29）



（圖30）

SOP ，故 SEP 蘊涵 SOP 。析言之：即是：由 SAP 至 SIP 是上蘊涵關係，由 SEP 至 SOP 亦是上蘊涵關係。由 SIP 至 SAP 是次蘊涵關係，由 SOP 至 SEP 亦是次蘊涵關係。

SAP 與 SEP 間的對當關係

從圖27的對當關係圖上，我們可以看出：當 SAP 是眞時， SEP 是假。當 SAP 是假時，SEP 眞假不定。故知 SAP 與 SEP 間是相反關係。

從圖28的對當關係圖上，我們亦可看出：當 SAP 是眞時， SIP 是眞，而 SEP 則是假。當 SAP 是假時，SIP 眞假不定，故 SEP 亦眞假不定。所以，SAP 與 SEP 間是相反關係。

SIP 與 SOP 間的對當關係

從圖27的對當關係圖上，可以看出：SIP 與 SOP 有②⑷兩圖是相同的，因此，當 SIP 是眞時， SOP 眞假不定；而當 SIP 是假時， SOP 則是眞的。所以 SIP 與 SOP 間是次相反關係。

再從圖28的對當關係圖來看，可以看出：假若 SAP 是眞時，則 SIP 是眞。當 SIP 是眞時，則 SEP 是假。當 SEP 是假時，SOP 眞假不定。故 SIP 是眞時，SOP 眞假不定。但是，假如 SIP 是假時，則 SEP 是眞。當 SEP 是眞時，SOP 必是眞的。所以，如 SIP 是假時，則 SOP 是眞。因此，SIP 與 SOP 間是次相反關係。

2.當S類＝0時，A・E・I・O四命題間的對當關係無法用歐拉圓表示，，只有用類的關係來說明了。

在前面A・E・I・O四命題的圖解中，我們曾看到：當S類＝0時，卽 S$\bar{P}$ 與 SP 兩個次類都是零，如此，則 SAP 是眞的，SEP 是眞的，SIP 是假的，SOP 是假的。因此之故， A・E・I・O的對當關係是： SAP 與 SOP 間是矛盾關係，SEP 與 SIP 間亦是矛盾關係，SAP 與 SIP 間是獨立關係，SEP 與 SOP 間是獨立關係，SAP 與 SEP 間是獨立關係， SIP 與 SOP 間亦是獨立關係。總之，當S類＝0時，A・E・I・O四命題間的對當關係，除了矛盾關係外，其餘都是獨立關係。（註十三）

四、換質（Obversion）

所謂直接推理，就是僅由一個已知命題推衍的一種推理。也就是從A・E・I・O等命題形式中一個命題推出另一同樣形式命題的推理。在這種推理中，不是變

更A・E・I・O等命題的詞項在命題中的位置，就是由其矛盾名詞（contradictory terms）代替其位置。（註十四）

S，P兩個名詞及其矛盾名詞"$\bar{S}$"（non-S），"$\bar{P}$"（non-P）能够聯合成八種傳統的命題形式。這八種形式的架構如下：（註十五）

1. S——P	5. P——S
2. S——$\bar{P}$	6. P——$\bar{S}$
3. $\bar{S}$——P	7. $\bar{P}$——S
4. $\bar{S}$——$\bar{P}$	8. $\bar{P}$——$\bar{S}$

以(1)爲原命題（original proposition），斷言主詞類S對謂詞類P，守着某種關係。下面就是我們期望決定的關係：

(2)假定S類對假定P類的矛盾類守着某種關係，即是：S——$\bar{P}$。

(3)假定S類的矛盾類對假定P類守着某種關係，即是：$\bar{S}$——P。

(4)假定S類的矛盾類對假定P類的矛盾類守着某種關係，即是：$\bar{S}$——$\bar{P}$。

(5)假定P類對假定S類守着某種關係，即是：P——S。

(6)假定P類對S類的矛盾類守着某種關係，即是：P——$\bar{S}$。

(7)假定P類的矛盾類對S類守着某種關係，即是$\bar{P}$——S。

(8)假定P類的矛盾類對S類的矛盾類守着某種關係，即是：$\bar{P}$——$\bar{S}$。

這些形式所需要的推理，初看起來似乎是很複雜的，可以簡單地減少爲兩種基本的運算。這兩種基本的運算就是換質與換位（Conversion），而且，每種基本運算可以按照很簡單的規則達成。玆先討論換質。

換質是直接推理的一種方式，在這種方式中，是由一個已知命類推出以原命題的主詞爲主詞，以原命題謂詞的矛盾名詞爲謂詞的新命題。

因此，原命題的形式是S——P，新命題是S——$\bar{P}$。新命題稱爲換質式（obverse）。

換質所要注意的是：原命題與換質後的新命題的性質不同，但命題的量要保持相同。換言之，就是：如原命題爲O命題。換質後即爲I命題；原命題如爲A命題，換質後即爲E命題。此外，原命題與換質後的新命題是等值的。玆將A・E・I・O等命題的換質，分別以形式表示如後：

A：凡S是P $\xrightarrow{\text{換質}}$ 無S是 $\bar{P}$

亦即　　SAP $\xrightarrow{\text{換質}}$ SE $\bar{P}$

由於　　$SAP = (S\bar{P} = 0)$

而　　　$SEP = (SP = 0)$

故　　　$SE\bar{P} = (S\bar{P} = 0)$

因此，由A命題換質爲E命題，等於從 $S\bar{P} = 0$，推衍至 $S\bar{P} = 0$，或等於從"$-(\exists x)[Sx \cdot \sim Px]$"推衍至"$-(\exists x)[Sx \cdot \sim Px]$"。A命題的類符號與其換質式是同一的，所以，A命題與換質後的命題是等値的。

E：無S是P $\xrightarrow{\text{換質}}$ 凡S是 $\bar{P}$

亦即　　SEP $\xrightarrow{\text{換質}}$ SA $\bar{P}$

而 $SEP = (SP = 0)$，依 $SAP = (S\bar{P} = 0)$ 的方式運算，$SA\bar{P} = (S\bar{\bar{P}} = 0)$，根據雙重否定原則（not non-P = P），故 $SA\bar{P} = (SP = 0)$

所以，由E命題換質爲A命題，等於從 $SP = 0$，推衍至 $SP = 0$，或等於從"$-(\exists x)[Sx \cdot Px]$"推衍至"$-(\exists x)[Sx \cdot \sim\sim Px]$"。E命題的類符號與其換質式是同一的。所以，E命題與其換質後的命題是等値的。

I：有的S是P $\xrightarrow{\text{換質}}$ 有的S不是 $\bar{P}$

亦即　　SIP $\xrightarrow{\text{換質}}$ SO $\bar{P}$

I命題與其換質式等値，可以很明顯地看出來。因爲I命題的類符號的表達式是：$SP \neq 0$，所換衍出來的O是：$S\bar{\bar{P}} \neq 0$

當然　　$\bar{\bar{P}} = P$

也就是　　$(\exists x)[Sx \cdot Px] = (\exists x)[Sx \cdot \sim\sim Px]$

何以換質所得到的等値命題不變更命題的量呢？這是很顯然的，因爲沒有特稱命題等値於全稱命題。這是跟隨周延的一般原則（a general rule about distri-bntion）而來的。所謂周延原則是：沒有在原命題中不周延的名詞，可以在推衍的命題中是周延的。從特稱命題推衍爲全稱命題，即違犯了這項規則。（註十六）

O：有的S不是P $\xrightarrow{\text{換質}}$ 有的S是 $\bar{P}$

亦即是　SOP $\xrightarrow{\text{換質}}$ SI $\bar{P}$

由於　　$SOP = (S\bar{P} \neq 0)$，$SI\bar{P} = (S\bar{P} \neq 0)$，

所以，O命題與其換質式是等値的。

總之，A命題換質爲E命題，E命題換質爲A命題，I命題換質爲O命題，O命題換質爲I命題。同時，必須瞭解所有命題的換質，就是在尋求一個等値命題的過程，這個等値命題的謂詞必須是原命題謂詞的正確的否定。

五、換位 (Conversion)

換位是直接推理的一種方式，在這種方式中，是從一個已知命題至另一個互換詞項的命題。也就是從一個已知命題推出以原命題的謂詞爲主詞，以原命題的主詞爲謂詞的新命題。所推出的命題稱爲換位式（Converse）。這種推理的普通形式是

S —— P　　　　∴　P —— S

但是，換位的運算並非必然產生與原命題具有同樣眞値的命題。有時原命題是眞的，而換位後的命題却是假的。例如：「凡人是哺乳動物」一命題，換位後變爲「凡哺乳動物是人」。從這個例子中可以明顯地看出：原命題是眞的，換位後的命題是假的。因此，換位時必須遵守換位的規則。

保證有效換位的規則有二：㈠凡詞項在原命題（convertend）中是不周延的，不可在換位命題(converse)中是周延的。㈡換位命題的性質與原命題的性質相同。

由於E命題的主詞項與謂詞項都是周延的，（註十七）I命題的主詞項與謂詞項均是不周延的，故此兩命題可藉互換主詞項與謂詞項的位置，其他不變，就可達到換位的目的。於是，

E：無S是P $\underline{\underline{\text{換位}}}$ 無P是S

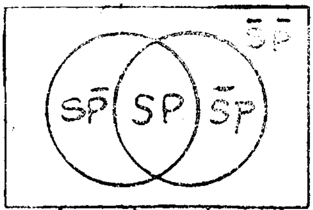
或寫做　SEP $\underline{\underline{\text{換位}}}$ PES

I：有的S是P $\underline{\underline{\text{換位}}}$ 有的P是S

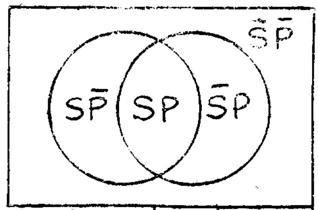
或寫做　SIP $\underline{\underline{\text{換位}}}$ PIS

故E．I兩命題的換位，稱爲簡單換位（Simple Conversion）。同時，由簡單換位所得之換位命題與原命題是等値的。即是：SEP與PES等値，SIP與PIS等値。這種等値關係由類的關係對命題的圖解中更是明顯。如下圖所示：

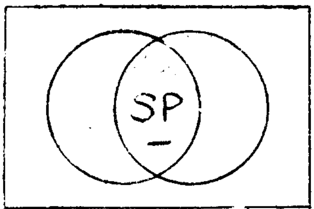
從圖上我們可以看出：SEP與SIP的類符號（class notation）與其換位式的類符號其間所表示的等値，完全是由於“SP”與“PS”是同一的（identical)。SEP是



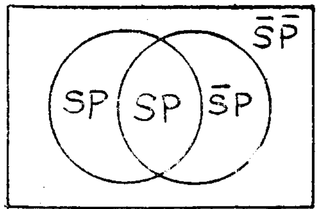
(圖31)無S是P(SEP)



(圖32)無P是S(PES)



(圖33)有的S是P(SIP)



(圖34)有的P是S(PIS)

$$SP=0;$$

它的換位式是

$$PS=0$$

S I P是

$$SP\neq 0$$

它的換位式是

$$PS\neq 0$$

而SEP與SIP的函値符號(functional notation)與其換位式亦是相同的(parallel)：SEP是

$$\sim(\exists x)\ [Sx\cdot Px]$$

它的換位式是

$$\sim(\exists x)\ [Px\cdot Sx]$$ 。(註十八)

S I P是

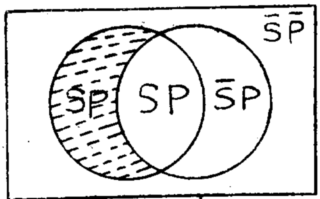
$$(\exists x)\ [Sx\cdot Px]$$

它的換位式是

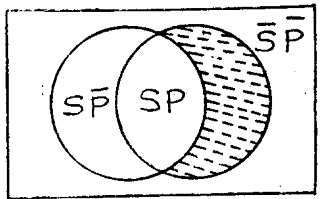
$$(\exists x)\ [Px\cdot Sx]$$

但是，由於A命題的主詞項是周延的，謂詞項是不周延的，故A命題不能行簡單換位的運算。此種情形可由類的關係對命題的圖解予以證明。如下圖所示。

如：凡S是P $\xrightarrow{\text{簡單換位}}$ 凡P是S。



(圖35)凡S是P($S\bar{P}=0$)



(圖36)凡P是S($\bar{S}P=0$)

因爲「凡S是P」是$S\bar{P}=0$，卽是$S\bar{P}$這一類是空類，而「凡P是S」是$\bar{S}P=0$，卽是$\bar{S}P$這一類是空類。但是$S\bar{P}$與$\bar{S}P$是不同的類，卽是「凡S是P」不等於「凡P是S」。故可證明A命題不能行簡單換位的運算。

A命題不能行簡單換位，不能產生傳統邏輯學者所稱的換位式(converse)，亦可從命題函值的運算中推出：

$$\text{凡S是P} \equiv -(\exists x)[Sx \cdot -Px]$$

$$\equiv -(\exists x)[\sim Px \cdot Sx]$$

$$\equiv -(\exists x)[x\varepsilon\bar{P} \cdot x\varepsilon S]$$

$$\equiv (\bar{P}S=0)$$

最後的等値式讀作："凡非P是非S"。這不是A命題主詞項與謂詞項的簡單換位。(註十九)

但是，傳統的邏輯學者說明：A命題可以行「限量換位」(Conversion by limitation)。卽是

凡S是P $\xrightarrow{\text{限量換位}}$ 有的P是S。

亦卽 SAS $\xrightarrow{\text{限量換位}}$ PIS。

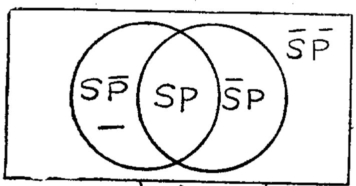
很顯然地，如此推衍出的命題與原命題是不相等的，因爲沒有一個特稱命題等値於一個全稱命題。同時，所推衍出的命題也與原命題詞項的周延情形不同：原命題的主詞項是周延的，而其換位式的謂詞項却是不周延的。所以A命題與其限量換位所得之命題是不等値的，其間是上蘊涵的關係。

此時，我們必須指出：A命題可以行「限量換位」，必須在S類不等於零的假設下。因爲唯有在此假設下，「凡S是P」才能蘊涵「有的P是S」，亦卽SAP才能蘊涵PIS。但如S類=0，則SAP就不能蘊涵PIS，如此則A命題就無法行「限

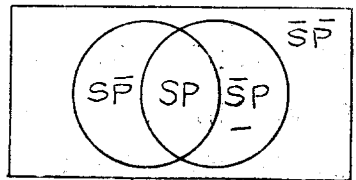
量換位了」。

最後研究O命題的換位：由於O命題的主詞項是不周延的，謂詞項是周延的，故O命題完全不能換位。因爲「有的S不是P「（O命題）換位所得到的命題不是「有的P不是S」，便是「有的P是S」（I命題）。但第一個選項違反換位的第一個規則，不能成立；而第二個選項又違反換位的第二個規則，亦不能成立。故O命題不能換位。

O命題的不能作換位的運算，亦可從O命題的圖解上證明：如下面二圖所示：



(圖37)有的S不是P($S\bar{P}\neq 0$)



(圖38)有的P不是S($\bar{S}P\neq 0$)

由於「有的S不是P」是 $S\bar{P}\neq 0$，假定「有的S不是P」的換位命題是「有的P不是S」，而「有的P不是S」是 $\bar{S}P\neq 0$。由於$S\bar{P}$與 $\bar{S}P$ 是不同的類，所以，當「有的S不是P」是眞時，「有的P不是S」不能必然是眞的。因此，我們不能由其中一個命題，正確地推出另一命題。亦卽是「有的S不是P」與「有的P不是S」不能正確地蘊涵着它的換位形式。

O命題的不能作換位的運算，亦可從命題函値的運算中推出：

有的S不是P $\equiv$ $(\exists x)\,[Sx \cdot \sim Px]$

$\equiv (\exists x)\,[\sim Px \cdot Sx]$

$\equiv (\exists x)\,[x\varepsilon\bar{P} \cdot x\varepsilon S]$

$\equiv (\bar{P}S\neq 0)$

最後的等値式讀作「有的$\bar{P}$是S」，它不再是「有的S不是P」的換位式，亦卽不是S與P兩個詞項的互換。所以，O命題不能換位。（註二十）

六、引申形式 (Derivative Forms)

A・E・I・O等命題藉着換質與換位的反覆使用，又可得到以下五種形式。茲分述之：

1. 換主詞的質位（Obverted conversion）

這是直接推理的一種方式，在這種方式中，從已知命題推出以原命題的謂詞爲主詞，以原命題主詞的矛盾名詞爲謂詞的另一命題。（註二一）於是，其形式是：

$$S — P \qquad \therefore\ P — \bar{S}$$

A・E・I三個命題容許這種運算。由於O命題不能換位，故O命題不能作這種運算。

A・E・I三命題主詞換質位如下：

$$A: SAP \xrightarrow{\text{限量換位}} PIS \xrightarrow{\text{換　質}} PO\bar{S}$$

$$E: SEP \xrightarrow{\text{換　位}} PES \xrightarrow{\text{換　質}} PA\bar{S}$$

$$I: SIP \xrightarrow{\text{換　位}} PIS \xrightarrow{\text{換　質}} PO\bar{S}$$

命題換主詞質位後所引申得來的命題，稱爲換質位式（obverted converse）。

2. 反易（Contraposition）

反易是直接推理的一種方式，在這種推理中，所推出的命題是以原命題謂詞的矛盾名詞爲主詞。（註二二）

這個定義按照「謂詞」包含兩種情形：①是以原命題的主詞爲謂詞；②是以原命題主詞的矛盾名詞爲謂詞。於是，個別地區分爲「部分反易式」（Partial contrapositive）與「全反易式」（Full contrapositive）兩種。

於是，原命題的形式是：$S — P$

部分反易式是：　$\bar{P} — S$

全反易式是　　$\bar{P} — \bar{S}$

由原命題換質再換位，就可得到「部分反易式」，部分反易式再換質，就可得到「全反易式」。由於E命題的換質式是A命題形式，而A命題的換位是「限量換位」，故E命題的反易式是I與O命題形式。由於I命題的換質式是O命題，O命題又不能換位，故I命題沒有反易式。

A・E・I・O四命題的反易式可以符號表示如下表：

（表一）

1.	原命題	SAP	SEP	SIP	SOP
2.	(1)的換質式	$SE\bar{P}$	$SA\bar{P}$	$SO\bar{P}$	$SI\bar{P}$
3.	(1)的部分反易式	$\bar{P}ES$	$\bar{P}IS$	無	$\bar{P}IS$
4.	(1)的全反易式	$\bar{P}A\bar{S}$	$\bar{P}O\bar{S}$	無	$\bar{P}O\bar{S}$

3. 逆轉（Inversion）

逆轉是直接推理的一種方式，在這種推理中，所推出的命題是以原命題主詞的矛盾名詞爲主詞的新命題。由於新命題的謂詞可以是原命題的謂詞，或是原命題謂詞的矛盾名詞。故逆轉也可區分爲兩種：即「部分逆轉式」（Partial inverse）與「全逆轉式」（Full inverse）。（註二三）

於是，原命題的形式是：S —— P

部分逆轉式是：　　　$\bar{S}$ —— P

全逆轉式是　　　　　$\bar{S}$ —— $\bar{P}$

一個命題的這兩種逆轉，是藉着交互地換質與換位得到。我們可以藉A・E・I・O等命題形式的直接推理的整個範圍，說明「逆轉」的過程。

A：凡S是P：藉限量換位可以推知：

(1)換位式（Converse）：有的P是S。(1)式換質得

(2)換質位式：有的P不是$\bar{S}$。

這是O命題形式，O命題不能換位。於是從原命題開始，先行換質可以推出：

(3)換質式（Obverse）：無S是$\bar{P}$。(3)式換位得：

(4)部分反易式（Partial contrapositive）：無$\bar{P}$是S。(4)式換質得：

(5)全反易式（Full contrapositive）：凡$\bar{P}$是$\bar{S}$。(5)式限量換位，即得：

(6)全逆轉式（Full inverse）：有的$\bar{S}$是$\bar{P}$。(6)式換質得：

(7)部分逆轉式（Partial inverse）：有的$\bar{S}$不是P。

這是一個O命題形式，O命題不能換位，於是A命題的直接推理至此爲止。從此，我們可知：A命題是先得到「全逆轉式」，後得到「部分逆轉式」。

E：無S是P：藉換位可推得：

(1)換位式：無P是S。(1)式換質可得：

(2)換質位式：凡P是$\bar{S}$。(2)式限量換位，可得：

(3)部分逆轉式：有的$\bar{S}$是P。(3)式換質可得：

(4)全逆轉式：有的$\bar{S}$不是$\bar{P}$。

這是一個O命題形式，於是至此爲止。我們再回到原命題，從換質開始：

(5)換質式：凡S是$\bar{P}$。(5)式限量換位，可得：

(6)部分反易式：有的$\bar{P}$是S。(6)式換質，可得：

(7)全反易式：有的$\bar{P}$不是$\bar{S}$。

由於O命題不能換位，故至此爲止。

I：有的S是P，藉換位可以推出：

(1)換位式：有的P是S。(1)式換質得：

(2)換質位式：有的P不是$\bar{S}$。

此式是O命題形式，不能再換位。

從原命題再由換質開始：可得：

(3)換質式：有的S不是$\bar{P}$。

此式是O命題形式，不能再換位。

O：有的S不是P。我們不能換位，故藉換質得：

(1)換質式：有的S是$\bar{P}$。(1)式換位得：

(2)部分反易式：有的$\bar{P}$是S。(2)式換質得：

(3)全反易式：有的$\bar{P}$不是$\bar{S}$。此式不能再換位。

從以上的例子，我們可以看出：從兩個全稱命題形式，我們有七種可能的直接推理，從兩個特稱命題形式，可有三種可能的直接推理。這些直接推理可總括成下表（表二）。在表內中間線內的命題是原命題，由中間向上是由換位開始，然後換質、換位；由中間向下是由換質開始，然後交互地換位、換質。「↑」記號表示推理的方向。

(表二) 直接推理一覽表

全逆轉式		$\bar{S}O\bar{P}$		
部分逆轉式		$\bar{S}IP$		
換質位式	$PO\bar{S}$	$PA\bar{S}$	$PO\bar{S}$	
換位式	PIS	PES	PIS	
原命題	SAP	SEP	SIP	SOP
換質式	$SE\bar{P}$	$SA\bar{P}$	$SO\bar{P}$	$SI\bar{P}$
部分反易式	$\bar{P}ES$	$\bar{P}IS$		$\bar{P}IS$
全反易式	$\bar{P}A\bar{S}$	$\bar{P}O\bar{S}$		$\bar{P}O\bar{S}$
全逆轉式	$\bar{S}I\bar{P}$			
部分逆轉式	$\bar{S}OP$			

但是，在這裡，我們指出：要保證這些推理的有效（validity），必先假定S，P，$\bar{S}$，$\bar{P}$四類均有分子。（註二四）如S，P，$\bar{S}$，$\bar{P}$四類中有空類，則將造成可笑的推理。在前面A命題的限量換位方面，我們已經指出：A命題必須在S類$\neq 0$的假設下，始能行限量換位；如S類＝0，則「凡S是P」就不能行限量換位了。

七、從直接推理研究 A•E•I•O 等命題間的關係

我們以「S」為主詞項，「P」為謂詞項，可以得到A．E．I．O四個定言命題，我們再以「$\bar{S}$」為主詞項，「$\bar{P}$」為謂詞項，又可得到A'，E'，I'，O'四個定言命題，於是我們得到了八個定言命題：

A：凡S是P　　(SAP)

E：無S是P　　(SEP)

I：有的S是P　　(SIP)

O：並非凡S是P　　(SOP)

A'：凡$\bar{S}$是$\bar{P}$　　($\bar{S}A\bar{P}$)

E'：無$\bar{S}$是$\bar{P}$　　　　（$\bar{S}E\bar{P}$）

I'：有的$\bar{S}$是$\bar{P}$　　　　（$\bar{S}I\bar{P}$）

O'：並非凡$\bar{S}$是$\bar{P}$　　　　（$\bar{S}O\bar{P}$）

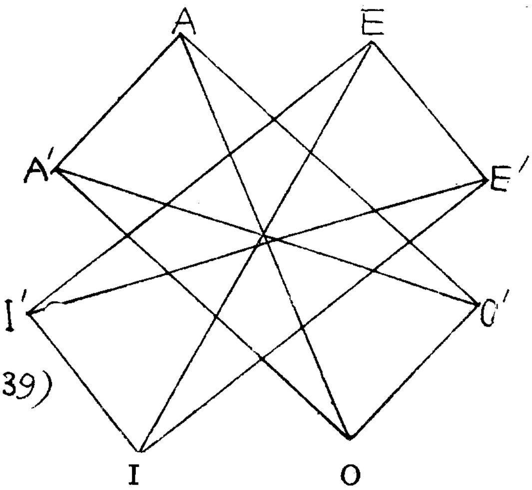
這八個命題藉換質與換位的方法，每個命題又可得到四個等式，於是就可得到32個命題。如下表：

（表三）		換質	換位	換質
A	SAP	$SE\bar{P}$	$\bar{P}ES$	$\bar{P}A\bar{S}$
A'	$\bar{S}A\bar{P}$	$\bar{S}EP$	$PE\bar{S}$	PAS
E	$SA\bar{P}$	SEP	PES	$PA\bar{S}$
E'	$\bar{S}AP$	$\bar{S}E\bar{P}$	$\bar{P}E\bar{S}$	$\bar{P}AS$
I	$SO\bar{P}$	SIP	PIS	$PO\bar{S}$
I'	$\bar{S}OP$	$\bar{S}I\bar{P}$	$\bar{P}I\bar{S}$	$\bar{P}OS$
O	SOP	$SI\bar{P}$	$\bar{P}IS$	$\bar{P}O\bar{S}$
O'	$\bar{S}O\bar{P}$	$\bar{S}IP$	$PI\bar{S}$	POS

由於A・O兩命題容許有反易（Contraposition）的運算，故第一行是給予A或O命題的形式。第二行由換質推衍，得到E或I形式的命題。第三行由簡單的換位推衍，得到E或I形式的命題。第四項是由換質推衍，得到A或O形式的命題。由交互的換質與簡單換位的方式得出的等式，就是形式上的互涵（Co-implication）。

從「凡S是P」（All S is P）至「並非凡S是P」（Not all S is P），從「有的S是P」（Some S is P）至「無S是P」，我們已看出矛盾關係，於是，在任何同排中的每個全稱命題對其相當的特稱命題是矛盾關係。亦即A命題對O命題，E命題對I命題，A'命題對O'命題，E'命題對I'命題，都是矛盾關係。（註二五）

同時，我們又可以看出；A命題與A'命題，E命題與E'命題，I命題與I'命題，O命題與O'命題，其間都是獨立關係。現以下面的多角形表示之。（註二六）



(圖39)

在此圖中；

A命題與A′命題間是獨立關係。

E命題與E′命題間是獨立關係。

I 命題與I′命題間是獨立關係。

O命題與O′命題間是獨立關係。

A命題與O′命題間是獨立關係。

A′命題與O命題間是獨立關係。

E命題與I′命題間是獨立關係。

E′命題與 I 命題間是獨立關係。

A命題與O命題間是矛盾關係。

A′命題與O′命題間是矛盾關係。

E命題與 I 命題間是矛盾關係。

E′命題與I′命題間是矛盾關係。

再者，A・E・I・O與A′・E′・I′・O′ 等命題由換質換位及交互的換質與換位得到種種命題。從此，我們再來研究其間的關係。茲將 A・E・I・O 及A′・E′・I′・O′ 等命題的直接推理的整個範圍分別書寫於後。由於由換質與簡單換位所得之命題與原命題等値，故對於「換質」與「簡單換位」用「═══」符號。對於「限量換位」，則用「──→」符號。

A： $SAP \overset{\text{換質}}{=} SE\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}ES \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}A\bar{S} \xrightarrow{\text{限量換位}} \bar{S}I\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}OP$

$\bar{S}I\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}I\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}OS$

$SAP \xrightarrow{\text{限量換位}} PIS \overset{\text{換質}}{=} PO\bar{S}$

$PIS \overset{\text{換位}}{=} SIP \overset{\text{換質}}{=} SO\bar{P}$

E： $SEP \overset{\text{換質}}{=} SA\bar{P} \xrightarrow{\text{限量換位}} \bar{P}IS \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}O\bar{S}$

$\bar{P}IS \overset{\text{換位}}{=} SI\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} SOP$

$SEP \overset{\text{換位}}{=} PES \overset{\text{換質}}{=} PA\bar{S} \xrightarrow{\text{限量換位}} \bar{S}IP \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}O\bar{P}$

$\bar{S}IP \overset{\text{換位}}{=} PI\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} POS$

I： $SIP \overset{\text{換質}}{=} SO\bar{P}$

$SIP \overset{\text{換位}}{=} PIS \overset{\text{換質}}{=} PO\bar{S}$

O： $SOP \overset{\text{換質}}{=} SI\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}IS \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}O\bar{S}$

A'： $\bar{S}A\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}EP \overset{\text{換位}}{=} PE\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} PAS \xrightarrow{\text{限量換位}} SIP \overset{\text{換質}}{=} SO\bar{P}$

$SIP \overset{\text{換位}}{=} PIS \overset{\text{換質}}{=} PO\bar{S}$

$\bar{S}A\bar{P} \xrightarrow{\text{限量換位}} \bar{P}I\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}OS$

$\bar{P}I\bar{S} \overset{\text{換位}}{=} \bar{S}I\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}OP$

E'： $\bar{S}E\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}AP \xrightarrow{\text{限量換位}} PI\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} POS$

$PI\bar{S} \overset{\text{換位}}{=} \bar{S}IP \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}O\bar{P}$

$\bar{S}E\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}E\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}AS \xrightarrow{\text{限量換位}} SI\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} SOP$

$SI\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}IS \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}O\bar{S}$

I'： $\bar{S}I\bar{P} \overset{\text{換質}}{=} \bar{S}OP$

$\bar{S}I\bar{P} \overset{\text{換位}}{=} \bar{P}I\bar{S} \overset{\text{換質}}{=} \bar{P}OS$

O′：$\bar{S}\,O\,\bar{P} \overset{換質}{=} \bar{S}IP \overset{換位}{=} PI\bar{S} \overset{換質}{=} POS$

在這裡，必須提出的是：由原命題對由限量換位所得之命題，是上蘊涵關係（Super-implication）。反過來說，是次蘊涵關係（Sub-implication）。

總之，在S，P，$\bar{S}$，$\bar{P}$ 四類不等於O的假設下，A・E・I・O與A′・E′・I′・O′等命題，由直接推理所得之命題，其間的關係可分析如下：

1. 等值關係（Equivalence）

(1) $SAP = SE\bar{P} = \bar{P}ES = \bar{P}A\bar{S}$ （A）

(2) $\bar{S}A\bar{P} = \bar{S}EP = PE\bar{S} = PAS$ （A′）

(3) $SA\bar{P} = SEP = PES = PA\bar{S}$ （E）

(4) $\bar{S}AP = \bar{S}E\bar{P} = \bar{P}E\bar{S} = \bar{P}AS$ （E′）

(5) $SO\bar{P} = SIP = PIS = PO\bar{S}$ （I）

(6) $\bar{S}OP = \bar{S}I\bar{P} = \bar{P}I\bar{S} = \bar{P}OS$ （I′）

(7) $SOP = SI\bar{P} = \bar{P}IS = \bar{P}O\bar{S}$ （O）

(8) $\bar{S}O\bar{P} = \bar{S}IP = PI\bar{S} = POS$ （O′）

以上八排，凡同排中的任意兩命題間均是等值關係。

2. 矛盾關係（Contradiction）

(1)SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$ 等四命題中任一命題，與 SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$ 四命題中任一命題間是矛盾關係。

(2)$\bar{S}EP$，$\bar{S}A\bar{P}$，$PE\bar{S}$，PAS 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}OP$，$\bar{S}IP$，$PI\bar{S}$，POS 等四命題中的任一命題間是矛盾關係。

(3)$SA\bar{P}$，SEP，PES，$PA\bar{S}$ 等四命題中的任一命題，與 $SO\bar{P}$，SIP，PIS，$PO\bar{S}$ 等四命題中的任一命題間是矛盾關係。

(4)$\bar{S}E\bar{P}$，$\bar{S}AP$，$\bar{P}E\bar{S}$，$\bar{P}AS$ 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}I\bar{P}$，$\bar{S}OP$，$\bar{P}I\bar{S}$，$\bar{P}OS$ 等四命題中的任一命題間是矛盾關係。

3. 獨立關係（Independence）

在圖39的多角形中，我們曾指出：A與A′，A與O′，A′與O，E與E′，E與I′，I與I′，及O與O′等是獨立關係。今分析言之，即是：

(1)SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$ 等四命題中的任一命題，與 $\bar{S}A\bar{P}$，$\bar{S}EP$，$PE\bar{S}$

PAS 等四命題中的任一命題間是獨立關係。

(2)SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$ 等四命題中的任一命題，與 $\bar{S}OP$，$\bar{S}IP$，$PI\bar{S}$，POS 等四命題中的任一命題間是獨立關係。

(3)$\bar{S}A\bar{P}$，$\bar{S}EP$，$PE\bar{S}$，PAS 等四命題中的任一命題，與 SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$ 等四命題中的任一命題間是獨立關係。

(4)$SA\bar{P}$，SEP，PES，$PA\bar{S}$ 等四命題中的任一命題，與 $\bar{S}AP$，$\bar{S}E\bar{P}$，$\bar{P}E\bar{S}$ $\bar{P}AS$ 等四命題中的任一命題間是獨立關係。

(5)$SA\bar{P}$，SEP，PES，$PA\bar{S}$ 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}OP$，$\bar{S}IP$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}OS$ 等四命題中任一命題間是獨立關係。

(6)$\bar{S}AP$，$\bar{S}E\bar{P}$，$\bar{P}E\bar{S}$，$\bar{P}AS$ 等四命題中任一命題，與 $SO\bar{P}$，SIP，PIS，$PO\bar{S}$ 等四命題中任一命題間是獨立關係。

(7)$SO\bar{P}$，SIP，PIS，POS 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}OP$，$\bar{S}I\bar{P}$，$\bar{P}I\bar{S}$，$\bar{P}OS$ 等四命題中任一命題間是獨立關係。

(8)SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$ 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}O\bar{P}$，$\bar{S}IP$，$PI\bar{S}$，POS 中任一命題間是獨立關係。

4. 相反關係（Contrariety）

在對當關係中，我們已知SAP 與 SEP 兩命題間是相反關係，故可推知：

(1)SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$ 等四命題中任一命題，與 SEP，$SA\bar{P}$，$PA\bar{S}$，PES 等四命題中任一命題間是相反關係。

(2)$\bar{S}A\bar{P}$，$\bar{S}EP$，$PE\bar{S}$，PAS 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}EP$，$\bar{S}AP$，$\bar{P}E\bar{S}$，$\bar{P}AS$ 等四命題中任一命題間是相反關係。

5. 次相反關係（Sub-contrariety）

在ＡＥＩＯ的對關係中，SIP 與 SOP 兩命題間是次相反關係，故可推知：

(1)$SO\bar{P}$，SIP，PIS，POS 等四命題中任一命題，與 SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$ 四命題中任一命題間是次相反關係。

(2)$\bar{S}OP$，$\bar{S}I\bar{P}$，$\bar{P}I\bar{S}$，$\bar{P}OS$ 等四命題中任一命題，與 $\bar{S}O\bar{P}$，$\bar{S}IP$，$PI\bar{S}$，POS 等四命題中任一命題是次相反關係。

6. 上蘊涵關係（Super-implication）

在A・E・I・O的對當關係中，已知由SAP至SIP，及由SEP至SOP是上蘊涵關係，故可推知：

(1)由 SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$，$\bar{S}A\bar{P}$，$\bar{S}EP$，$PE\bar{S}$，PAS 等八命題中任一命題，至$SO\bar{P}$，SIP，PIS，$PO\bar{S}$，$\bar{S}I\bar{P}$，$\bar{S}OP$，$\bar{P}I\bar{S}$，$\bar{P}OS$等八命題中任一命題，是上蘊涵關係。

(2)由 SEP，PES，$PA\bar{S}$，$SA\bar{P}$，$\bar{S}AP$，$\bar{S}E\bar{P}$，$\bar{P}E\bar{S}$，$\bar{P}AS$ 等八命題中任一命題，至SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$，$\bar{S}IP$，$\bar{S}O\bar{P}$，$PI\bar{S}$，POS等八命題中任一命題，是上蘊涵關係。

7. 次蘊涵關係（Sub-implication）

次蘊涵關係是上蘊涵關係的逆轉，故我們可以推知：

(1)由$SO\bar{P}$，SIP，PIS，$PO\bar{S}$，$\bar{S}I\bar{P}$，$\bar{S}OP$，$\bar{P}I\bar{S}$，$\bar{P}OS$等八命題中任一命題，至 SAP，$SE\bar{P}$，$\bar{P}ES$，$\bar{P}A\bar{S}$，$\bar{S}A\bar{P}$，$\bar{S}EP$，$PE\bar{S}$，PAS 等八命題中任一命題，是次蘊涵關係。

(2)由SOP，$SI\bar{P}$，$\bar{P}IS$，$\bar{P}O\bar{S}$，$\bar{S}O\bar{P}$，$\bar{S}IP$，$PI\bar{S}$，POS等八命題中任一命題，至 SEP，PES，$PA\bar{S}$，$SA\bar{P}$，$\bar{S}AP$，$\bar{S}E\bar{P}$，$\bar{P}E\bar{S}$，$\bar{P}AS$ 等八命題中任一命題，是次蘊涵關係。

總而言之，從直推推理中，可以推衍出許多具有A・E・I・O四種形式的命題。這些命題間有等値、矛盾、、獨立、相反、次相反、上蘊涵、與次蘊涵等邏輯關係。

附　註：

（註　一）參 Mace, C.A., The Principles of Logic. (1933) P. 111. 及 Ambrose Alice & Morris Lazerowitz: Fundamentals of Symbolic Logic. (1959) P. 229.

（註　二）Ambrose, Alice & Morris Lazerowitz: Fundamentals of Symbolic Logic. P. 181. & Barker, Stephen F.: The Elements of Logic. Chapter IV. (1965).

（註　三）Emmet, E.R., The Use of Reason. (1960) pp. 36-37.

（註　四）Bockênski, I.M., A History of Formal Logic. (1961). P. 52.

（註 五）The Encyclopedia of Philosophy. (1967) V. 5. P. 40. Emmet, E.R., The Use of Reason. P. 32. Stebbing, L.S., A Modern Introduction to Logic. (1961) pp. 72-73. Schiller, F.C.S., Formal Logic. P. 155. & Mace, C. A., The Principles of Logic. P. 104.

（註 六）巴克著，石元健編譯：邏輯引論、商務、第二〇六頁。

（註 七）同前註，第二〇七至二〇八頁。

（註 八）Ambrose, Alice & Morris Lazerowitz: Fundamentals of Symbolic Logic. P. 206.

（註 九）Blyth, John W., A Modern Introduction to Logic. (1957) P. 176.

（註 十）同註八，P. 217. 此處"⊃"符號是蘊涵的符號。"ε"符號是意大利邏輯學者皮亞諾(Peano, G.)所創設的，其意謂「是……之類的一個分子」。如"xεS"的表達式，即是說「x是S類的分子」，"$x\varepsilon\overline{P}$"的表達式「是說x不是P類的一分子。」

（註十一）Stebbing, L., A Modern Introduction to Logic. P. 59.

（註十二）同註八，P. 227.

（註十三）Ibid., P. 236.

（註十四）同註一，P. 112.

（註十五）Ibid., P. 112.

（註十六）同註八，P. 241.

（註十七）嚴格地說：凡是某一個命題對某一詞項所指稱的分子的全類，皆明白有所說及，則該詞項就是周延的，否則，就是不周延的。

（註十八）同註八，pp. 242-243.

（註十九）Ibid., P. 243.

（註二十）Ibid., P. 243.

（註二一）同註一，P. 113.

（註二二）"Full Contrapositive"是Dr. Keynes提出的，其他的邏輯學者稱"Partial Contrapositive"爲Contrapositive稱"Full Contrapositive"爲"Obverted Contrapositive"(見Mace, C. A., The Principles oʒ Logic. p. 116.)

（註二三）同註一，P. 116.

（註二四）Ibid., P. 120.

（註二五）Johnson, W.E., Logic. pt. 1, (1922) P. 141.

（註二六）Ibid., P. 142.

本文參考書：

1. Ambrose, Alice & Morris Lazerowitz: Fundamentals of Symbolic Logic. N.Y., Rinehart & Company, Inc., (1959)
2. Barker, Stephen F., The Elements of Logic (1965)，石元健編譯：邏輯引論、商務。(1967)
3. Blyth, John W., A Modern Introduction to Logic. 虹橋書店，(1957)
4. Bochénski, I.M., A History of Formal Logic. Translated and edited by Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, (1961)
5. Emmet, E.R., The Use of Reason. 虹橋書店。(1960)
6. The Encyclopedia of Philosophy, V.5. New York, The Macmillan Company & The Free Press. (1967)
7. Johnson, W.E., Logic, Part I. Cambridge, (1921)
8. Mace, C.A., The Principles of Logic. London, (1934)
9. Schiller, F.C.S., Formal Logic. London, (1912)
10. Stebbing, L.S., A Modern Introduction to Logic. New York & Evanston, Harper & Row, Publishers, (1961)