指數分配族之充分統計量

鄭隆輝

(作者現爲本校商學院統計學系專任副教授)

1.緒　　言

本文主要內容在於討論指數分配族之充分統計量的一些特性及應用。Patil〔8〕曾討論過 一隨機變數一 母數之指數分配族，所定義之機率密度函數（p. d. f.）爲 $f(x;\theta) = q(x)e^{\theta x}/g(\theta)$，後又與Bildikar〔2〕討論了關於多變數多母數指數分配族，所定義之機率密度函數爲 $f(x_1,\cdots,x_s;\theta_1,\cdots,\theta_s) = h(x_1,\cdots,x_s)\exp[x_1\theta+\cdots+x_s\theta_s - q(\theta_1,\cdots\theta_s)]$。不過所討論的範圍仍限於線性指數型分配（linear exponential−type distributions）。因此本文開始時先討論一般多母數指數分配族之聯合充分統計量及其特性。所定義之機率密度函數爲 $f(z;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\exp[\sum_j a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)b_j(z)+c(z)-d(\theta_1,\cdots,\theta_m)]$，但指數分配族之聯合充分統計量之聯合分配仍屬於多變數多母數之指數分配族 ，因此，當 $a_j(\theta_r,\cdots,\theta_m)=\theta_j, j=i,\cdots,m$ 時，有一部分雖然與 Patil 所討論之方式略不同，但仍獲得相同的結論。

最後討論了充分統計量與獨立性之關係，因指數分配族之聯合充分統計量具有完全性，因此依Basu〔1〕，Hogg和Craig〔3〕之定理可導出一些有關獨立性的結果。

2.指數分配族之機率密度函數及其充分統計量

設隨機變數或隨機向量 Z之p.d.f.爲

$$(2.1)\qquad f(z;\theta_1,\cdots,\theta_m) = \exp\Big[\sum_{j=1}^{m} a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)b_j(z)+c(z)-d(\theta_1,\cdots,\theta_m)\Big],$$

式中母數 $(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Omega$，$\Omega$爲母數空間，$d(\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 爲一有界解析函數（bounded analytic function）。則稱分配族 $\{f(z;\theta_1,\cdots,\theta_m) \mid (\theta,\cdots,\theta_m)\in\Omega\}$ 爲一指數分配族，例如一變數或多變數之常態分配，波氏分配，二項或多項分配，負二項或負多項分配等皆屬之。因不失一般性，本文中設Z爲一連續型之隨機變數，並設此分配爲 regular case〔3〕，在運算時具有regularity conditions〔9〕。

設 $Z_1,\cdots,Z_n$ 爲一組隨機樣本，樣本數 $n>m$，則由其概度函數

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} L &= f(z_1;\theta_1,\cdots,\theta_m)\cdots f(z_n;\theta_1,\cdots,\theta_m) \\ &= \exp\Big[\sum_j\sum_i a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)\,b_j(z_i) - nd(\theta_1,\cdots,\theta_m)\Big]\cdot\exp\Big[\sum_i c(z_i)\Big] \end{aligned}$$

得知 $X_j = \sum_{i=1}^{n} b_j(Z_i)$，$j=1,\cdots,m$ 爲 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 之聯合充分統計量，且爲具有完全性之最小充分統計量（joint minimal sufficient statistics）。

又由 $X_j=\sum_i b_j(Z_i)$ ，$j=1,\cdots,m$ 之關係式，知即可導出$X_1,\cdots X_m$ 之聯合分配，故可設$X_1,\cdots,X_m$之聯合機率密度函數 (j.p.d.f.) 爲

(2.3) $$g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots\theta_m)=\exp\left[\sum_j a_j(\theta_1,\cdots\theta_m)x_j+p(x_1,\cdots,x_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]$$，式中 $q(\theta_1,\cdots,\theta_m)=nd(\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 。

顯然知充分統計量 $X_1,\cdots,X_m$ 之聯合分配亦屬於指數分配族，而且知 $X_1,\cdots,X_m$ 之動差母函數 (m.g.f.) 爲

$$M(t_1,\cdots,t_m)=E\left[\exp\left(\sum_j t_jX_j\right)\right]$$

$$=\int\cdots\int \exp\left[\sum_j t_jx_j+\sum_j a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)x_j+p(x_1,\cdots,x_m)-q(\theta_1\cdots,\theta_m)\right]$$

$dx_1\cdots dx_m$，設 $t_j+a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)=a_j(s_1,\cdots,s_m)$，且當$t_j=0$則 $\theta_j=s_j$，$j=1,\cdots,m$，得

(2.4) $$M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[q(s_1,\cdots s_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]\int\cdots\int\exp$$

$$\left[\sum_j a_j(s_1,\cdots,s_m)x_j+p(x_1,\cdots,x_m)-q(s_1\cdots,s_m)\right]d_1x\cdots dx_n$$

$$=\exp\left[q(s_1,\cdots,s_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]。$$

若設$Y_j=\frac{1}{n}X_j$，$j=1,\cdots,m$則仍爲$\theta_1,\cdots,\theta_m$之聯合充分統計量，由(2.4)知$Y_1,\cdots,Y_m$之m.g.f爲

(2.5) $$M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[q(s_1,\cdots,s_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]，$$

唯式中$\frac{t_j}{n}+a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)=a_j(s_1,\cdots,s_m)$，$j=1,\cdots,m$。

又由 (2.3) 知 $\int\cdots\int g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)\,dx_1\cdots dx_m=1$， 兩邊對$\theta_k$ 微分，得

$$\int\cdots\int\left[\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial\theta_k}x_j-\frac{\partial q}{\partial\theta_k}\right]g(x_1,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m=0$$，即

$\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial\theta_k}E(X_j)=\frac{\partial q}{\partial\theta_k}$，$k=1,\cdots,m$，解此m個方程式，當行列式 $J=\frac{\partial(a_1,\cdots,a_m)}{\partial(\theta_1,\cdots,\theta_m)}\neq 0$，得充分統計量$X_1,\cdots,X_m$之希望數爲

$$E(X_1)=\frac{1}{J}\frac{\partial(q,\cdots,a_m)}{\partial(\theta_1,\cdots,a_m)},\cdots,\quad E(X_m)=\frac{\partial(a_1,\cdots,q)}{\partial(\theta_1,\cdots,\theta_m)}$$

3.當$a_j(\theta.,\cdots,\theta_m)=a_j(\theta_j)$，$j=1\cdots,m$ 。

由 (2.4) 知聯合充分統計量$X_1,\cdots,X_m$之m.g.f.爲

(3.1) $M(t_1\cdots,t_m)=\exp〔q\ (s_1,\cdots s_m)-q\ (\theta_1,\cdots,\theta_m)〕$，式中

$a_j\ (\theta_j)\ +t_j=a_j\ (\theta_j)\ +t_j=a_j\ (s_j)$ ，$j=1,\cdots,m$。

其次再考慮各統計量X_j，$j=1$，…，m之希望數，變異數及相關係數，有效性等問題。

因$\int\cdots\int g\ (x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)\ dx_1\cdots dx_m=1$，對$\theta_k$微分，得

$\int\cdots\int(a'_k x_k-\frac{\partial q}{\partial\theta_k})\ g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)dx_m,\cdots,dx_m=0$ ，式中$a'_k=\frac{da_k}{d\theta_k}(\theta_k)$

得 $a'_k E\ (X_k)=\frac{\partial q}{\partial\theta_k})$ ，$k=1,\cdots,m$。

故得知

統計量X_k之希望數爲$E\ (X_k)\ =\ 〔\frac{\partial q}{\partial\theta_k}(\theta_1,\cdots,\theta_m)〕/a'_k\ (\theta_k)$ ，$k=1,\cdots,m$,

因 $E\ (X_k)\ =\ \int\cdots\int x_k g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)dx_1\cdots dx_m$，兩邊對$\theta_k$微分得

$\frac{\partial E}{\partial\theta_k}(X_k)\ =a'_k\ (\theta_k)\ E\ (X^2_k)\frac{\partial q}{\partial\theta_k}\ (\theta_1,\cdots,\theta_m)\ \ E\ (X_k)$,因$a_k'\ (\theta_k)\ \neq=0$,得

$〔\frac{\partial E}{\partial\theta_k}(X_k)〕/a'_k({}_k\theta)=E(X_k{}^2)-〔\frac{\partial q}{\partial\theta_k}/a'_k〕=E(X^2_k)-〔E(X_k)〕^2=V(X_k)$

又由$\int\cdots\int x_k g\ (x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)\ dx_1\cdots dx_m=E\ (X_k)\ =\frac{\partial q}{\partial\theta_k}\frac{1}{a_k'}$ ，

兩邊對θ_j微分，$j\neq k$，得

$\int\cdots\int x_k\ (x_j a_j'-\frac{\partial q}{\partial\theta_j})g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)\ dx_1\cdots dx_m=\ 〔\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_j\partial\theta_k}〕/a'_k$

卽 $E\ (X_k X_j)\ a_j'-E\ (X_k)\frac{\partial q}{\partial\theta_j}=〔\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_j\partial\theta_k}〕/a'_k$

$E\ (X_k X_j)-E(X_k)\ E(X_j)\ =〔\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_j\partial\theta_k}〕/〔a_j'a_k'〕$，$k\neq\ell$，因此得知

聯合充分統計量X_1，…，X_m之希望數，變異數，互變數及相關係數各爲如下：

(3.2) $E\ (X_k)\ =\ 〔\frac{\partial q}{\partial\theta_k}(\theta_1,\cdots,\theta_m)〕/a'_k\ (\theta_k)$ ，$k=1,\cdots,m$，

(3.3) $V\ (X_k)\ =\ 〔\frac{\partial E}{\partial\theta_k}(X_k)〕/a_k'\ (\theta_k)$ ，$k=1,\cdots,m$，

(3.4) $Cov\ (X_k,X_j)\ \ 〔\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_k\partial\theta_j}(\theta_1,\cdots\theta_m,)〕/〔a'_k(\theta_k)a_j'(\theta_j)〕$,$k\neq j$ ，

(3.5) $$\rho\ (X_k,X_j)\ =\frac{\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_k\partial\theta_j}(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\sqrt{a_k'(\theta_k)a_j'\ (\theta_j)\ \frac{\partial E}{\partial\theta_k}(X_k)\ \ \frac{\partial E}{\partial\theta_j}(X_j)}}$$

因此由 (3.5) 又得知

若$q(\theta_1, \cdots, \theta_m) = k_1\theta_1^{n_1} + \cdots + k_m\theta_m^{n_m}$之形式之函數，式中$k_j$，$n_j$，$j=1, \cdots$，m為任意常數，則$\rho(X_k, X_j) = 0$，$k \neq j$。卽說明了各統計量$X_1, \cdots, X_m$之間任二統計量皆不相關。

因$q(\theta_1, \cdots, \theta_m) = nd(\theta_1, \cdots, \theta_m)$，$Y_j = \frac{1}{n} X_j$，$j=1, \cdots, m$，如果$Y_j$之希望數為$r_j(\theta_j)$之函數，卽$E(Y_j) = r_j(\theta_j)$，$j=1, \cdots, m$，則知

$$r_j(\theta_j) = E(Y_j) = \frac{1}{n} E(X_j) = \left[\frac{\partial d(\theta_1, \cdots, \theta_m)}{\partial \theta_j}\right] / a_j'(\theta_j), \quad j=1 \cdots m。$$

$$\frac{\partial d}{\partial \theta_j}(\theta_1, \cdots, \theta_m) = r_j(\theta_j)\, a_j'(\theta_j)，再微分，得$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 d}{\partial \theta_j^2}(\theta_1, \cdots, \theta_m) = r_j(\theta_j) a_j''(\theta_j) + r_j'(\theta_j)\, a_j'(\theta_j) \text{ 及}$$

$$\frac{\partial^2 d(\theta_1, \cdots, \theta_m)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0, \quad i \neq j,$$

故
$$V(Y_j) = \frac{1}{n^2} V(X_j) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{\partial E(X_j)}{\partial \theta_j} / a_j'(\theta_j)\right] = r_j'(\theta_j) / n a_j'(\theta_j) > 0, \quad j=1, \cdots, m,$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = \frac{1}{n^2} Cov(X_i, X_j) = \left[\frac{1}{n}\frac{\partial^2 d}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_1, \cdots, \theta_m)\right] / [a_i'(\theta_i) a_j'(\theta_j)] = 0$$

因此得知

若$E(Y_j) = r_j(\theta_j)$，$j=1, \cdots, m$，則$\rho(Y_i, Y_j) = 0$，$i \neq j$。且聯合充分統計量$Y_1, \cdots, Y_m$之分散矩陣 (dispersion matrix) 為一對角矩陣 (diagonal matrix)

$$V = \begin{pmatrix} r_1'(\theta_1) / na'(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & r'_m(\theta_m) / na'_m(\theta_m) \end{pmatrix}$$

另一方面，由 (2.2) 知

$$\ln L = \sum_j a_j(\theta_j) \sum_i b_j(z_i) + \sum_i c(z_i) - nd(\theta_1, \cdots, \theta_m)，對\theta_j微分$$

得
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_j^2}\right) = a_j''(\theta_j)\, E(X_j) - n\frac{\partial^2 d}{\partial \theta_j^2} = n a_j''(\theta_j)\, r_j(\theta_j) - n\frac{\partial^2 d}{\partial \theta_j^2},$$

由 (3.6) 得

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_j^2}\right) = -n r_j'(\theta_j)\, a_j'(\theta_j) < 0,$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) = 0 - n\frac{\partial^2 d}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 0，i \neq j，得$$

情報矩陣 (information matrix) 為一對角矩陣

$$J = \left[-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)\right] = \begin{pmatrix} nr_1'(\theta_1)\, a_1'(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & nr'_m a'_m(\theta_m) \end{pmatrix},$$

故得知

若E $(Y_j)=r_j(\theta_j)$，$j=1,\cdots m$，則聯合充分統計量$Y_1,\cdots,Y_m$為同時有效推定量之充要條件為$VJ=I_m$，即$[r'_j(\theta_j)]^2=1$，$j=1,\cdots,m$。且當$a'_j(\theta_j)>0$ 則$r_j(\theta_j)=\theta_j+c_j$；當$a'_j(\theta_j)<0$則$r_j(\theta_j)=-\theta_j+c_j$，$j=1,\cdots,m$，$c_j$ 為任意常數。

4.當$a_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)=\theta_j$，$j=1,\cdots,m$。

則隨機變數Z之p・d・f・為

$$f(z;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\exp\left[\sum_j\theta_jb_j(z)+c(z)-d(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]$$

且由 (2.3) 知聯合充分統計量$X_1,\cdots,X_m$之 j・p・d・f・成為

$$g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1\cdots,\theta_m)=\exp\left[\sum_j\theta_jx_j+p(x_1,\cdots,x_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right] \tag{4.1}$$

由 (3.1) 知$\theta_j+t_j=s_j$，$j=1,\cdots,m$，故$X_1,\cdots,X_m$之m・g・f・為

$$M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right], \tag{4.2}$$

由(3.2)，(3.3)，(3,4)知$E(X_k)=\frac{\partial q}{\partial\theta_k}$，$V(X_k)=\frac{\partial^2q}{\partial{\theta_k}^2}$，$Cov(X_k,X_j)=\frac{\partial^2q}{\partial\theta_k\partial\theta_j}$。

當m=1，則統計量$X=\sum_i b(Z_i)$ 之p・d・f・成為

$$g(x;\theta)=\exp\left[\theta x+p(x)-q(\theta)\right]\text{，式中}q(\theta)=nd(\theta)\quad, \tag{4.3}$$

$$\text{m・g・f・}\quad M(t)=\exp\left[q(\theta+t)-q(\theta)\right],$$

$$\text{c・g・f・}\quad K(t)=\ln M(t)=q(\theta+t)-q(\theta)\quad,$$

但 $K(t)=\lambda_1t+\lambda_2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\lambda_r\frac{t^r}{r!}+\cdots$，式中$\lambda_1$，$\lambda_2$，…為各級累加率。

故 $K(t)=\lambda_1t+\lambda_2\frac{t^2}{2!}+\cdots=q(\theta+t)-q(\theta)=q'(\theta)t+q''(\theta)\frac{t^2}{2!}+\cdots$，

因此得知

若X之p・d・f・為$g(x;\theta)=\exp[\theta x+p(x)-q(\theta)]$，則各級累加率$\lambda_r=q^{(r)}(\theta)$，$r=1,2,\cdots$，且$\lambda_{r+1}=q^{(r+1)}(\theta)=\frac{d\lambda_r}{d\theta}=\frac{d^r\lambda_1}{d\theta^r}$。

反之，若 $\lambda_{r+1}=\frac{d\lambda_r}{d\theta}$，則其分配之p・d・f必為如 (4.3) 式。係由Patil[8]所證。

如果已知 一 隨機變數 X 之分配為波氏分配，則其均數$\mu=E(X)$ 與其變異數 $\sigma^2=V(X)$ 相等。反之，若 一 隨機變數之$\mu=\sigma^2$ 或$E(X)=V(X)$，且 c・g・f・ $K(t)=q(\theta+t)-q(\theta)$，則由前述知$q'(\theta)=E(X)=V(X)=q''(\theta)$， 得$q'(\theta)=ke^{\theta}$，k為任意常數。但因 $ke^{\theta}=q'(\theta)=V(X)>0$，故知$k>0$，$q(\theta)=ke^{\theta}+c$， c爲任意常數。得

$$c \cdot g \cdot f \cdot \quad K(t) = ke^{\theta+t} - ke^{\theta} = ke^{\theta}(e^{t}-1)$$

或 $\quad m \cdot g \cdot f \cdot \ M(t) = \exp[ke^{\theta}(e^{t}-1)]$，知係以 $\mu = ke^{\theta} > 0$ 之波氏分配之m·g·f·,故知該隨機變數之分配爲波氏分配，且其所有累加率λ_r，r=1，2，…皆相等，即 $\lambda_1 = \mu = \sigma^2 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots$。故得知

若一隨機變數X之 c·g·f·$K(t) = q(\theta+t) - q(\theta)$，則X之分配爲波氏分配之充要條件爲 $\lambda_1 = \lambda_2$ 或$\mu = \sigma^2$ 或 $q''(\theta) = q'(\theta)$ 。（註：一 gamma 分配之均數亦可等於變異數，但其 p·d·f· 則非 (4.3) 式之形式。）

在 Bildikar 〔2〕之論文說如果一隨機變數X 之 p·d·f· 爲 (4.3) 式，則$\lambda_2 = \lambda_1 / (1+de^{\theta})$，d 爲實數之充要條件爲X之分配爲二項分配，波氏分配或負二項分配。當d= 0，則$\lambda_2 = \lambda_1$，則由前文之結果，即知X之分配爲波氏分配。

當 $d \neq 0$，因 $q''(\theta) = \lambda_2$；$q'(\theta) = \lambda_1$； 故 $q''(\theta) = q'(\theta) / (1+de^{\theta})$ ，解此微分方程，得 $q(\theta) = \frac{k}{d} \ln(1+de^{\theta}) + c, k$, c爲常數，因$(ke^{\theta})/(1+de^{\theta})^2 = q''(\theta) = \sigma_2 = \lambda^2 > 0$，故k爲一正數。

因此X之 c·g·f· 爲

$$K(t) = q(\theta+t) - q(\theta) = \frac{k}{d}\left[\ln(1+de^{\theta+t}) - \ln(1+de^{\theta})\right]$$

$$= \frac{k}{d} \ln\left(\frac{1+de^{\theta+t}}{1+de^{t}}\right) = \frac{k}{d} \ln\left(\frac{1}{1+de^{t}} + \frac{de^{\theta}}{1+de^{t}} e^{t}\right)$$

$$= \frac{k}{d} \ln(q+pe^{t}) = \ln(q+pe^{t})^{\frac{k}{d}}$$

式中 $q = \frac{1}{1+de^{t}}$ ，$p = \frac{de^{\theta}}{1+de^{t}}$ ，$q+p=1$,

故得知

X之m·g·f· $M(t) = (q+pe^{t})^{\frac{k}{d}}$，$k>0$ 。

當$p>0$，$q>0$，則 M(t) 爲二項分配之 m·g·f· 之充要條件爲 k/d 爲一正整數，即$d>0$。

當$pq<0$，則M(t)爲負二項分配之 m·g·f·之充要條件爲k/d爲一負實數，即$d<0$ 。

但當 $\lambda_2 = k\lambda_1$，k爲一常數，Bildikar〔2〕則未在此論文中討論。若k=1，則爲前述之d= 0之情形，否則由解$q''(\theta) = kq'(\theta)$ ，可得

$q(\theta) = c_1 + c_2 e^{k\theta}$，$c_1$ c_2 爲常數。

當k= 0，則$q(\theta) = c_1 + c_2$,$\lambda_2 = \sigma^2 = q''(\theta) = 0$，$\lambda_1 = \mu = q'(\theta) = 0$故知X之分配爲一退化分配 (degenerate distribution) ，其p·d·f· 爲$g(x;\theta) = 1$ ， $x=0$，及

$g(x;\theta)=0$，$x\neq 0$。

當 $k\neq 0$，因$q''(\theta)=c_2k^2e^{k\theta}=\lambda_2=\sigma^2>0$，知$c_2>0$，且X之c·g·f·爲 $K(t)=g(\theta+t)-q(\theta)=c_2e^{k(\theta+t)}-c_2e^{k\theta}=c_2e^{k\theta}(e^{kt}-1)$，

m·g·f·爲$M(t)=\exp[c_2e^{k\theta}(e^{kt}-1)]$，

故得知

若 $\lambda_2=k\lambda_1$，X之 c·g·f·爲$K(t;X)=c_2e^{k\theta}(e^{kt}-1)$，知爲一波氏分配之充要條件爲k=1，其均數 $\mu=c_2e^{k\theta}=c_2e^{\theta}>0$。

當$k=1$；$k\neq 0$，設一隨機變數W之分配爲以均數$\mu=c_2e^{k\theta}>0$之波氏分配，則其m·g·f·爲$M(t;W)=\exp[c_2e^{k\theta}(e^{t}-1)]$，故隨機變數 kW之m·g·f·爲$M(t;kW)=E(e^{tkw})=\exp[c_2e^{k\theta}(e^{kt}-1)]$，

kW之c·g·f·爲$K(t;kW)=c_2e^{k\theta}(e^{kt}-1)=K(t;X)$，因此X之分配即爲kW之分配。

故由上述討論可得知

設X之c·g·f· $K(t)=q(\theta+t)-q(\theta)$，$\lambda_2=k\lambda_1$，

若$k=0$，則X之分配爲退化分配，

若$k=1$，則X之分配爲以均數 $\mu=c_2e^{k\theta}$之波氏分配，

若$k=1$，$k\neq 0$，X之分配爲kW之分配，W之分配爲以

$\mu=c_2e^{k\theta}$之波氏分配。卽X之p·d·f·爲

$$g(x;\theta)=(e^{-\mu}\cdot\mu^{\frac{x}{k}})\,/\,(\frac{x}{k})!,\quad x=0,k,2k,\cdots。$$

由前述知如果$q(\theta)=c_1$，c_1爲常數，知X之分配爲退化分配。如果$g(\theta)=c_1+c_2\theta$，$c_1,c_2>0$爲常數，則$q'(\theta)=c_2=\lambda_1=\mu$，$q''(\theta)=0=\lambda_2=\sigma^2$，顯然知X之分配亦爲退化分配。如果$q(\theta)=c_1+c_2\theta+c_3\theta^2$,$c_1,c_2,c_3$爲常數，則$q'(\theta)=c_2+2c_3\theta=\lambda_1=\mu$，$q''(\theta)=2c_3=\lambda_2=\sigma^2>0$，得 $q^{(r)}(\theta)=0$，$r=3,4,\cdots$。又$K(t)=q(\theta+t)-q(\theta)=c_2(\theta+t)+c_3(\theta+t)^2-c_2\theta-c_3\theta^2$

$$=(c_2+2c_3\theta)t+c_3t^2，知$$

m·g·f·$M(t;X)=\exp[(c_2+2c_3\theta)t+2c_3t^2/2]$

故得知　若X之c·g·f· $K(t)=q(\theta+t)-q(\theta)=c_1+c_2\theta+c_3\theta^2$ c_1，c_2，$c_3>0$爲常數，則X之分配爲常態分配，卽$X\sim n(\mu,\sigma^2)$，$\mu=c_2+2c_3\theta$，$\sigma^2=2c_3$。

一般而言，若$q^{(r)}(\theta)=0$，$r=3,4,\cdots$。則

$K(t)=\lambda_1 t+\lambda_2 \frac{t^2}{2}$ 或 $M(t)=\exp\left(\lambda_1 t+\lambda_2 \frac{t^2}{2}\right)=\exp\left[q'(\theta)t+q''(\theta)\frac{t^2}{2}\right]$，

知X之分配爲常態分配 $n\,(q'(\theta),\ q''(\theta))$，反之亦然。

最後，再考慮充分統計量 $Y=\frac{1}{n}X=\frac{1}{n}\sum_j b(Z_j)$ 由 (4.3) 知

$$Y之\ m\cdot g\cdot f\quad M(t)=\exp\left[q\left(\theta+\frac{t}{n}\right)-q(\theta)\right]$$

$$=\exp\left[n\,d\left(\theta+\frac{t}{n}\right)-n\,d(\theta)\right],$$

$$K(t)=\ln M(t)=n\left[d'(\theta)\frac{t}{n}+\frac{d''(\theta)}{2!}\left(\frac{t}{n}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=d'(\theta)\,t+\frac{d''(\theta)}{2!}\frac{t^2}{n}+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}K(t)=d'(\theta)\,t,\qquad 即\ \lim_{n\to\infty}M(t)=e^{d'(\theta)\,t},$$

故得知　統計量Y之極限分配 (limiting distribution) 爲一退化分配，其 p·d·f·
$h(y;\theta)=1$，$y=d'(\theta)$；$h(y;\theta)=0$，$y\neq d'(\theta)$。

5.m個母數之指數分配族

本節主要內容在於依上節所得到之各種結論在此推論到m個母數之情形。

設隨機變數 Z 之 p·d·f· 爲

$$f(z;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\exp\left[\sum_j \theta_j b_j(z)+c(z)-d(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right],$$

由 (4.1) 知聯合充分統計量 $X_1,\cdots,X_m$ 之j·p·d·f· 爲

$$g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\exp\left[\sum_j \theta_j x_j+p(x_1,\cdots,x_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right],$$

式中 $q(\theta_1,\cdots,\theta_m)=n\,d(\theta_1,\cdots,\theta_m)$

且其 m·g·f· $M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]$，

(5.1)　希望數 $E(X_k)=\frac{\partial q}{\partial\theta_k}(\theta_1,\cdots,\theta_m)$，

(5.2)　變異數 $V(X_k)=\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_k^2}(\theta_1,\cdots\theta_m)$，

(5.3)　互變數 $Cov(X_k,X_j)=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_k\partial\theta_j}$。$k\neq j$。

當 $m=2$，

(5.4)　$K(t_1,t_2)=\frac{\lambda_{1,0}}{1!\,0!}t_1+\frac{\lambda_{0,1}}{0!\,1!}t_2+\cdots+\frac{\lambda_{r,s}}{r!\,s!}t_1^r t_2^s+\cdots$

$$=q(\theta_1+t_1, \theta_2+t_2)-q(\theta_1, \theta_2)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+t_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)^j q(\theta_1, \theta_2)$$

式中 $\left(t_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+t_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)^j q(\theta_1,\theta_2)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} t_1^{k} t_2^{k-j}\frac{\partial^j q(\theta_1, \theta_2)}{\partial\theta_1^{k}\partial\theta_2^{j-k}}$ ，

得 $\lambda_{1,0}=\frac{\partial q(\theta_1, \theta_2)}{\partial\theta_1}$，$\lambda_{0,1}=\frac{\partial q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}$，$\lambda_{20,}=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^2}$，…，$\lambda_{r,s}=\frac{\partial^{r+s}q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^{r}\,\partial\theta_2^{s}}$，

故得知下列關係式：

$$\lambda_{r+1,s}=\frac{\partial\lambda_{r,s}}{\partial\theta_1},\quad \lambda_{r,s+1}=\frac{\partial\lambda_{r,s}}{\partial\theta_2}\ 。$$

又由 (5.3) 知 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2}=\lambda_{11}$ 。

如果X_1,X_2爲獨立，顯然知$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，卽$\lambda_{11}=0$，反之，當$\lambda_{1,1}=0$，則$\lambda_{2,1}=\frac{\partial\lambda_{1,1}}{\partial\theta_1}=0$，$\lambda_{1,2}=\frac{\partial\lambda_{1,1}}{\partial\theta_2}=0$，$\lambda_{2,2}=\frac{\partial\lambda_{1,1}}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2}=0$，…，$\lambda_{r,s}=0$，$r\geq1$，$s\geq1$由(5.4)知

$$K(t_1,t_2)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_{r,0}\frac{t_1^{r}}{r!}+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_{0,s}\frac{t_2^{s}}{s!}=K(t_1,0)+K(0,t_2)$$

卽 $M(t_1,t_2)=M(t_1,0)\,M(0,t_2)$，知$X_1$，$X_2$爲獨立。

因此得知

$\rho(X_1, X_2)=0$ 若且唯若 X_1，X_2 爲獨立。

當m個母數時，聯合充分統計量 X_1，…，X_m之 c·g·f· ，爲

$K(t_1, \cdots, t_m)=q(\theta_1+t_1, \cdots, \theta_m+t_m)-q(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ ，

得 $\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{r_1+\cdots+r_m=r}\lambda_{r_1,\cdots,r_m}\frac{t_1^{r_1}\cdots t_m^{r_m}}{r_1!\cdots r_m!}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(t_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\cdots t_m\frac{\partial}{\partial\theta_m}\right)^j q(\theta_1,\cdots\theta_m)$，

得 $\lambda_{r_1,\cdots,r_m}=\frac{\partial^r q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_1^{r_1}\cdots\partial\theta_1^{r_m}}$，$r=r_1+\cdots r_m$，$r_j$，$j=1,\cdots,m$ 爲非負整數。

因此得知

(5.5) $\lambda_{r_1,\cdots,r_j-1,r_j+1,\cdots,r_m}=\frac{\partial\lambda_{r_1\cdots,r_m}}{\partial\theta_j}$ 。

又已知如果$X_1\cdots X_m$爲獨立，顯然 $X_i,X_j,i\neq j;i,j=1,\cdots,m$爲獨立，故

$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$ 。卽 $\frac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}=0$，$i\neq j$ 。

反之，若X_i,X_j 爲獨立，$i\neq j;i,j=1,\cdots,m$,則

$$\frac{\partial q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_i\ \partial\theta_j}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0\ ,\ i\neq j\ ,$$

例如 $\lambda_{1,1,0,\cdots,0}=\dfrac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_1\ \partial\theta_2}=0\ ,\cdots,\lambda_{0,\cdots,1,1}=\dfrac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_{m-1}\ \partial\theta_m}=0$,

故 $\lambda_{r_1,\cdots,r_m}=0$ ，$r_i=0$或1，$i=1,\cdots,m$使$r_1+\cdots+r_m=2$ 。

由 (5.5) 知 $\lambda r_1,\cdots,r_m=0$，式中$r_1,\cdots,r_m$至少有兩個不等於零且$r_1+\cdots+r_m\geq 2$，因此得$X_1,\cdots,X_m$之 c·g·f· 爲

$$K(t_1,\cdots,t_m)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r_j\geq 1}\lambda_{0,0,\cdots,r_j,0\cdots,0}\frac{t_j^{r_j}}{r_j!}$$

$$=K(t_1,0,\cdots,0)+\cdots,+K(0,\cdots,0,t_m)\ ,$$

卽 $M(t_1,\cdots,t_m)=M(t_1,0,\cdots,0)\cdots M(0,\cdots,0,t_m)$，

故得知

$X_1\cdots,X_m$爲獨立若且唯若X_i，X_j爲獨立，$i\neq j$，i，$j=1,\cdots,m$。

其次再由統計量$Y_j=\frac{1}{n}\sum_i b_j(Z_i)=\frac{1}{n}X_j$，$j=1,\cdots,m$之m·g·f·爲

$$M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[n\,d\left(\theta_1+\frac{t_1}{n},\cdots,\theta_m+\frac{t_m}{n}\right)-nd(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]$$ ，知

$$K(t_1,\cdots,t_m)=t_1\frac{\partial d(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_1}+\cdots+t_m\frac{\partial d(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_m}+h(n)\ ,$$

式中 $\lim\limits_{n\to\infty}h(n)=0$

故 $$\lim_{n\to\infty}K(t_1,\cdots,t_m)=t_1\frac{\partial d}{\partial\theta_1}(\theta_1,\cdots,\theta_m),+\cdots+t_m\frac{\partial d}{\partial\theta_m}(\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}M(t_1,\cdots,t_m)=[\exp(d_1t_1)]\cdots[\exp(d_mt_m)]$，式中 $d_j=\dfrac{\partial d(\theta_1,\cdots\theta_m)}{\partial\theta_j}$，$j=1,\cdots,m$，

因此得知

聯合充分統計量$Y_1,\cdots,Y_m$之極限分配爲退化分配，其j·p·d·f·爲

$h(y_1,\cdots,y_m)=1$，$y_j=d_j(\theta_1,\cdots,\theta_m)$，$j=1,\cdots,m$，

$=0$，其他。

以下討論$q(\theta_1,\cdots,\theta_m)$之不同形式，可能導出的分配：

當$q(\theta_1,\cdots,\theta_m)=c_0+c_1\theta_1+\cdots+c_m\theta_m$爲$\theta_1,\cdots,\theta_m$之一次函數時，

式中c_0，$c_1,\cdots,c_m$爲任意常數，

則 $q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots\theta_m)=c_1t_1+\cdots c_mt_m$，

得 $X_1,\cdots,X_m$之m·g·f·爲$M(t_1,\cdots,t_m)=e^{c_1t}\cdots e^{c_mt_m}$，

因此得知

聯合充分統計量X_1，…，X_m之聯合分配爲退化分配，其j·p·d·f·爲

$$h(x_1,\cdots,x_m)=1,\quad x_j=c_j,\ j=1,\cdots,m,$$
$$=0,\quad 其他。$$

當$q(\theta_1,\cdots,\theta_m)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\theta_i\theta_j+\sum_{i=1}^{m}c_i\theta_i+c_o$爲$\theta_1$，…，$\theta_m$之二次函數時，

式中$a_{ij}=a_{ji}, i\neq j$，i，$j=1$，…，m；c_o，c_1，…，c_m爲任意常數，

$a_{jj}>0$，$j=1$，…，m。

因 $V(X_j)=\dfrac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_j^2}=a_{jj}$，故$a_{jj}>0$，$j=1$，…，$m$。

得 X_1，…，X_m之c·g·f·爲

$$K(t_1,\cdots,t_m)=q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\theta_j t_i+\sum_{i=1}^{m}c_i t_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\ t_i\ t_j$$

$$m\cdot g\cdot f\cdot\ M(t_1,\cdots,t_m)=\exp\left[\sum_i\left(c_i+\sum_j a_{ij}\theta_j\right)t_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j a_{ij}\ t_i\ t_j\right],$$

因此得知

聯合充分統計量X_1，…，X_m之聯合分配爲m變數之常態分配，其均數

$$\mu_j=E(X_j)=\frac{\partial q}{\partial\theta_j}=c_j+a_{j1}\theta_1+\cdots+a_{jm}\theta_m,\ j=1,\cdots,m,$$

其互變數$Cov(X_i,X_j)=\dfrac{\partial^2 q}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}=a_{ij}$，$i\neq j$。

當所有 $a_{ij}=0$，$i\neq j$，則$X_1\cdots$，X_m 爲獨立且X_j之分配爲常態分配，

卽 $X_j\sim n(\mu_j,\sigma_j^2)=n(c_j+a_{j1}\theta_1+\cdots+a_{jm}\theta_m,\ a_{jj})$，$j=1$，…，$m$。

一般而言，當X_1，…，X_m之j·p·d·f·爲

$$g(x_1,\cdots,x_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\exp\left[\sum_j\theta_j x_j+p(x_2,\cdots,x_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right],$$

或其 $m\cdot g\cdot f\cdot\ M(t_1\cdots,t_m)=\exp\left[q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)\right]$，則$X_1$，…，$X_m$之聯合分配爲多變數（m 變數）常態分配之充要條件爲 λr_1，…，$r_m=0$，$r=r+\cdots+r_m\geq 3$，r_j，$j=1$，…，m爲非負整數。例如$m=2$時，

$$q(\theta_1+t_1,\theta_2+t_2)-q(\theta_1,\theta_2)=K(t_1,t_2)$$
$$=\lambda_{1,o}t_1+\lambda_{o,1}t_2+\frac{\lambda_{2,o}}{2}t_1^2+\lambda_{1,1}t_1t_2+\frac{\lambda_{o,2}}{2}t_2^2$$
$$=\lambda_{1,o}\ t_1+\lambda_{o,1}\ t_2\ \frac{1}{2}\ (\lambda_{2,o}\ t_1^2+2\lambda_{1,1}\ t_1t_2+\lambda_{o,2}t_2^2)$$

故 $m\cdot g\cdot f\cdot\ M(t_1,t_2)=\exp\left[\lambda_{1,o}t_1+\lambda_{o,1}\ t_2+\frac{1}{2}\left(\lambda_{2,o}t_1^2+2\lambda_{1,1}t_1t_2+\lambda_{o,2}t_2^2\right)\right]$

知爲二變數之常態分配（bivariate normal distribution），其均數爲

$$\mu_1=\lambda_{1,0}=\frac{\partial q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1},\quad \mu_2=\lambda_{0,1}=\frac{\partial q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}$$，變異數爲 $\sigma^2=\lambda_{2,0}=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^2}$，

$\sigma_2^2=\lambda_{0,2}=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2^2}$，相關係數 $\rho=\lambda_{1,1}/\sqrt{\lambda_{2,0}\lambda_{0,2}}$，

式中 $\lambda_{2,0}>0$，$\lambda_{0,2}>0$。

在第四節中曾討論到一母數之指數分配族中，波氏分配是唯一使均數等於變異數之分配。在此以同樣的方式來考慮m個母數的情形，在 Bildikar 〔2〕之論文中曾提到這樣的關係式 $\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\right)/\sum_{i=1}^{m}\mu_i=1\right]/\left[1+d\sum_{i=1}^{m}e^{\theta_i}\right]$，

當 $d=0$ 時，其分配爲多重波氏分配（multiple Poisson distribution），

當 $d>0$ 時，其分配爲多項分配（multinomial distribution），

當 $d<0$ 時，其分配爲負多項分配(multivariate negative binomial distribution)，唯在此以另一方式討論多變數波氏分配（multivariate Poisson distribution）如下：

設 $E(X_k)=V(X_k),k=1,\cdots,m$，即 $\frac{\partial q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_k}=\frac{\partial^2 q(\theta_1,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_k^2}$，$k=1,\cdots,m$，爲m個偏微分方式。

例如 $m=2$ 時，解 $\frac{\partial^2 q(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^2}=\frac{\partial q}{\partial\theta_1}(\theta_1,\theta_2)$ 與 $\frac{\partial^2 q(\theta_1(\theta_2)}{\partial\theta_2^2}=\frac{\partial q}{\partial\theta_2}(\theta_1,\theta_2)$，得

$$q(\theta_1,\theta_2)=c_0+c_1e^{\theta_1}+c_2e^{\theta_2}+c_{1,2}e^{\theta_1+\theta_2},$$

設 c_1，c_2，$c_{1,2}$ 爲正數，則 X_1，X_2 之 c.g.f. 與 m.g.f. 爲

$$K(t_1,t_2)=q(\theta_1+t_1,\theta_2+t_2)-q(\theta_1,\theta_2)=c_1e^{\theta_1}(e^{t_1}-1)+c_2e^{\theta_2}(e^{t_2}-1)+c_{1,2}e^{\theta_1+\theta_2}\cdot(e^{t_1+t_2}-1),$$

$$M(t_1,t_2)=\exp\left[c_1e^{\theta_1}(e^{t_1}-1)+c_2e^{\theta_2}(e^{t_2}-1)+c_{1,2}e^{\theta^1+\theta_2}(e^{t_1+t_2}-1)\right]$$
$$=\exp\left[\alpha_1(\theta e^{t_1}-1)+\alpha_2(e^{t_2}-1)+\alpha_{1,2}(e^{t_1+t_2}-1)\right],$$

式中 $\alpha_1=c_1e^{\theta_1}$，$\alpha_2=c_2e^{\theta_2}$，$\alpha_{1,2}=c_{1,2}e^{\theta_1+\theta_2}$，

故知 X_1，X_2 之聯合分配爲二變數波氏分配，其均數 $E(X_1)=\alpha_1+\alpha_{1,2}$，$E(X_2)=\alpha_2+\alpha_{1,2}$，其互變數 $Cov(X_1,X_2)=\alpha_{1,2}$。當 $\alpha_{1,2}=0$ 時，則

$$M(t_1,t_2)=\exp\left[\alpha_1(e^{t_1}-1)\right]\exp\left[\alpha_2(e^{t_2}-1)\right],$$

知 X_1，X_2 爲獨立且各以均數等於 α_1,α_2 之波氏分配。

因此由m個微分方程，$\frac{\partial^2 q}{\partial\theta_k^2}(\theta_1,\cdots,\theta_m)=\frac{\partial q}{\partial\theta_k}(\theta_1,\cdots,\theta_m)$，$k=1,\cdots,m$；知其解爲

$$q(\theta_1,\cdots,\theta_m)=c_0+c_1\exp(\theta_1)+\cdots+c_m\exp(\theta_m)$$

$+c_{1,2}\exp(\theta_1+\theta_2)+\cdots+c_{1,m}\exp(\theta_1+\theta_m)+c_{2,3}\exp(\theta_2+\theta_3)+\cdots$
$+c_{m-1,m}\exp(\theta_{m-1}+\theta_m)$
$+c_{1,2,3}\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\cdots+c_{m-2,m-1,m}\ \exp(\theta_{m-2}+\theta_{m-1}+\theta_m)+\cdots$
$+c_{1,2,\cdots,m}\ \exp(\theta_1+\cdots\theta_m)$，

設　$\alpha_{i_1}=c_{j_1}\ \mathrm{exq}\ (\theta_{j_1})>0$，$j_1=1,\cdots,m$，

$\alpha_{j_1,j_2}=c_{j_1,j_2}\ \exp(\theta_{j_1}+\theta_{j_2})>0$，$j_1<j_2$；$j_1$，$j_2=1,\cdots,m$，

$\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_{j_1,\cdots,j_r}=c_{j_1,\cdots,j_r}\exp(\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_r})>0$，$j_1<j_2<\cdots<j_r$；$j_1,\cdots,j_r=1,\cdots,m$；$r=1,\cdots m$。

則得知聯合充分統計量$X_1,\cdots,X_m$之 m·g·f· 爲

$$M(t_1,\cdots,t_m)=\exp[q(\theta_1+t_1,\cdots,\theta_m+t_m)-q(\theta_1,\cdots,\theta_m)]$$
$$=\exp\{\alpha_1[\exp(t_1)-1]+\cdots+\alpha_m[\exp(t_m)-1]$$
$$+\alpha_{1,2}[\exp(t_1+t_2)-1]+\cdots+\alpha_{m-1,m}[\exp(t_{m-1}+t_m)-1]$$
$$+\alpha_{1,2,3}[\exp(t_1+t_2+t_3)-1]+\cdots+\alpha_{1,2,\ldots,m}[\exp(t_1+\cdots+t_m)-1]\}$$

係多變數（m個變數）波氏分配之動差母函數。
因此得知
聯合充分統計量$X_1\cdots,X_m$之聯合分配爲多變數波氏分配。

6.最概推定量之唯一性

我們已知如果一分配之母數之最概推定量及充分統計量存在，則最概推定量爲充分統計量之函數。對於一般分配而言，母數之最概推定量未必唯一存在。但對於指數分配族(2.1)之母數$\theta_1,\cdots,\theta_m$之聯合充分統計量 $X_1=\sum_i b_1(Z_i)$，…，$X_m=\sum_i b_m(Z_i)$ 存在，且其最概推定量$\theta_1,\cdots,\theta_m$存在且爲唯一存在〔7〕。

7.充分統計量與獨立性

我們已知如果T爲一具有完全性之充分統計量，另一統計量 T_1 之分配若與θ無關，則由Basu〔1〕知T，T_1爲獨立。

又由前述知指數分配族（2.1）之母數$\theta_1,\cdots,\theta_m$之聯合充分統計量 $X_j=\sum_i b_j(Z_i)$，$j=1,\cdots.m$具有完全性，因此知一統計量T_1與（$X_1,\cdots,X_m$）爲獨立之充要條件爲 T 之分配與$\theta_1.\cdots.\theta_m$無關〔3〕。

又已知關於統計假設之檢定問題中，如果在虛無假設下，一統計量之分配與母數無關，

則與該母數之充分統計量獨立之結果，顯然有助於進一步的分析。但本節爲了較廣泛討論，所舉之例包括了非指數分配族者。

定義 1.設一統計量爲 $S(X_1,\cdots,X_n)$ ，若對於所有實數 a ，

$S(X_1+a,\cdots,+X_n+a)=S(X_1,\cdots,X_n)$，則稱 $S(X_1,\cdots,X_n)$ 爲平移不變統計量 (translation-invariant statistic) 。

此定義中 $X_1,\cdots,X_n$ 可爲順序統計量 $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ 或 $X_1,\cdots,X_n$ 爲隨機向量時，a 爲同維數之向量。

定義 2.設一統計量爲 $S(X_1,\cdots,X_n)$ ，若對於所有實數 $a\neq 0$ ，

$S(aX_1,\cdots,aX_n)=S(X_1,\cdots X_n)$，則稱 $S(X_1,\cdots,X_n)$ 爲尺度不變統計量(scale-invariant statistic) 。

此定義中 $X_1,\cdots,X_n$ 可爲順序統計量或隨機向量。

例如統計量 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$ ，$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^p$，$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|X_j-\overline{X}|^p$ ，

$\sum_{j=1}^{n}(X_{j+1}-X_j)^2$， 全距 $R_n=Y_n-Y_1$ 等皆爲平移不變統計量。$X_j/(X_1+\cdots+X_n)$，

$j=1,\cdots,n$，Y_1/Y_n，$nY_1/(Y_1+\cdots+Y_n)$ 等皆爲尺度不變統計量。

因此可得知下列結果（以連續型之隨機變數說明）：

設一分配族 $\{f(x;\theta)\mid\theta\varepsilon\Omega\}$ 之母數 θ 爲一位置母數 (location parameter) ，並設 $X_1,\cdots,X_n$ 爲隨機樣本，T 爲 θ 之充分統計量並具有完全性，若 $S(X_1,\cdots,X_n)$ 爲任意平移不變統計量，則 $S(X_1,\cdots,X_n)$ 與 T 爲獨立。

證明：因母數 θ 爲一位置母數，故 $X-\theta$ 之分配與 θ 無關。又 $S=S(X_1,\cdots,X_n)$ 之特性函數 (characteristic function c.f.) 爲

$$\varphi(t)=E[\exp(itS)]$$

$$=\int\cdots\int\exp[itS(x_1,\cdots,x_n)]f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)dx_1\cdots dx_n$$

設 $z_j=x_j-\theta$, $j=1,\cdots,n$, $|J|=\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}\right|=1$，知 Z_i 之 p.d.f. $h(z_i)$ 與 θ 無關，且 c.f.

$$\varphi(t)=\int\cdots\int\exp[itS(z_1+\theta,\cdots,z_n+\theta)]h(z_1)\cdots h(z_n)dz_1\cdots dz_n$$

$$=\int\cdots\int\exp[itS(z_1,\cdots,z_n)]h(z_1)\cdots h(z_n)dz_1\cdots dz_n,$$

知 $\varphi(t)$ 與 θ 無關，也就是說統計量 $S=S(X_1,\ ,X_n)$ 之分配與母數 θ 無關，故 S 與 T 爲獨立。

當 θ 爲一母數向量或 X 爲一隨機向量時， 也就是說當該分配爲多變數多母數之分配時，

上述之結論仍然成立。

例 1.設一分配之位置母數θ之完全的充分統計量(complete sufficient statistic) 爲T，則統計量$S=S(X_1, \cdots, X_n)=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$與T爲獨立之條件爲$a_1+\cdots a_n=0$。

證明：當$a_1+\cdots+a_n=0$，則因對於任意實數a，

$S(X_1+a, \cdots, X_n+a)=a_1X_1+\cdots+a_nX_n+a(a_1+\cdots+a_n)=S(X_1, \cdots, X_n)$ 知S爲平移不變統計量，故S，T爲獨立。

其他如 $S=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2$，$S=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^p$等皆各與T爲獨立。

當$a_j \neq 0$，$j=1, \cdots, m$，$T=b_1x_1+\cdots+b_nx_n$，$b_j\neq 0$，$j=1, \cdots, n$，例如

$T=\frac{X_1}{n}+\cdots+\frac{X_n}{n}=\bar{X}$，則因$S=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$，$T=b_1X_1+\cdots+b_nX_n$爲獨立，知$X_j$，$j=1, \cdots, m$之分配必爲常態分配，且$0=\mathrm{Cov}(S,T)=a^2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)$，故得$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=0$，當$b_j=\frac{1}{n}$，$j=1, \cdots, n$，則$a_1+\cdots+a_n=0$，因此又得知

$S=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$與$\bar{X}$爲獨立之充要條件爲$a_1+\cdots+a_n=0$。

例 2.設$S=S(X_1, \cdots, X_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}X_jX_k$，$a_{jk}=a_{kj}$;$k, j=1\cdots n$，

並設 $a_{j1}+\cdots+a_{jn}=0$，$j=1, \cdots, n$，則因對於任意實數a，

$$S(X_1+a, \cdots, X_n+a)=\sum_j\sum_k a_{jk}(X_j+a)(X_k+a)$$

$$=\sum_j\sum_k a_{jk}X_jX_k+a\sum_j X_j\sum_k a_{jk}+a\sum_k X_k\sum_j a_{jk}+a^2\sum_j\sum_k a_{jk}$$

$$=\sum_j\sum_k a_{jk}X_jX_k=S(X_1, \cdots, X_n),$$

知S爲平移不變統計量，故與θ之完全的充分統計量T爲獨立。

又當$a_{11}+\cdots+a_{nn}\neq 0$，$T=\bar{X}$，$a_{j1}+\cdots+a_{jn}=0$，$j=1, \cdots, n$，因此知

$S=\sum\sum a_{jk}X_jX_k$與$\bar{X}$爲獨立，故由〔6〕知X之分配必爲常態分配。

例 3.設隨機向量X之分配爲多變數（p變數）常態分配，$E(X)=\theta$爲p維母數向量，則由前述知常態分配屬於多變數多母數指數分配族。玆設$X_1, \cdots, X_n$爲隨機樣本， 知其概度函數爲

$$L=\left[1/(\sqrt{2\pi})^p\sqrt{|V|}\right]^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\theta)'V^{-1}(x_j-\theta)\right]$$

$$=\left[1/(\sqrt{2\pi})^p\sqrt{|V|}\right]^n \exp\left[-\frac{n}{2}(\bar{x}-\theta)'V^{-1}(\bar{x}-\theta)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(V^{-1}A)\right],$$

式中$A=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})'$,

故知$\overline{X}$為 θ 之完全的充分統計量。

若統計量$S=S(X_1,\cdots,X_n)$，為一平移不變統計量，則S之c.f.為

$$\varphi(t)=\varphi(t_1,\cdots,t_P)=\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^P\sqrt{|V|}}\right]^n\int\cdots\int\exp\left[it'S(x_j,\cdots,x_n)-\frac{1}{2}\sum_j(x_j-\theta)'V^{-1}(x_j-\theta)\right]dx_1\cdots dx_n,$$

令$y_j=x_j-\theta$，$j=1,\cdots,n$，得

$$\varphi(t)=\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^P\sqrt{|V|}}\right]^n\int\cdots\int\exp\left[it's(y_1,\cdots y_n)-\frac{1}{2}\sum_j y_j'V^{-1}y_j\right]dy_1\cdots dy_n,$$

知$\varphi(t)$與θ無關，也就是說S之分配與θ無關，因此S與$\overline{X}$為獨立。例如統計量
$\frac{1}{n}\sum_j(X_j-\overline{X})(X_j-X)'$ 即為平移不變統計量，故 $\frac{1}{n}\sum_j(X_j-\overline{X})(X_j-\overline{X})'$，$\overline{X}$為獨立。

例4.設 $Y_1<Y_1<\cdots<Y_n$ 為隨機樣本 $X_1,\cdots,X_n$ 之順序統計量，並設其母體分配為常態分配$n(\theta,1)$，則$\overline{Y}=\overline{X}$為$\theta$之完全的充分統計量。設任意平移不變統計量，
$S=S(Y_1,\cdots,Y_n)$，則S之c·f·為

$$\varphi(t)=n!\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y_n}\cdots\int_{-\infty}^{y_2}\exp\left[its(y_1,\cdots,y_n)-\frac{1}{2}\sum_j(y_j-\theta)^2\right]dy_1\cdots dy_m,$$

令$z_j=y_j-\theta$，$j=1,\cdots,n$得

$$\varphi(t)=n!\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z_n}\cdots\int_{-\infty}^{z_2}\exp\left[its(z_1,\cdots,z_n)-\frac{1}{2}\sum_j z_j^2\right]dz_1\cdots dz_n,$$

知$\varphi(t)$與θ無關，故$S=S(Y_1,\cdots Y_n)$之分配與θ無關，因此S與$\overline{Y}$或$\overline{X}$為獨立。例如
$T=Y_n-Y_1$，$T=Y_n-\overline{Y}$ 等皆為平移不變統計量，故各與$\overline{Y}$為獨立。

例5.設X之p·d·f·為 $f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}$，$\theta<x$，$-\infty<\theta<\infty$，並設
$\theta<Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ 為隨機樣本之順序統計量，則 Y_1 為母數θ之完全的充分統計量。
若統計量$S=S(Y_1,\cdots,Y_n)$為平移不變統計量，則S之c·f 為

$$\varphi(t)=n!\int_{\theta}^{\infty}\int_{y_{n-2}}^{\infty}\int_{y_{n-1}}^{\infty}\exp\left[its(y_1\cdots y_n)-\sum_j(y_j-\theta)\right]dy_n\cdots dy_1,$$

令$y_j-\theta=z_j$，$j=1,\cdots,n$ 得 $0<z_1<z_2<\cdots<z_n$

$$\varphi(t)=n!\int_0^{\infty}\cdots\int_{z_{n-2}}^{\infty}\int_{z_{n-1}}^{\infty}\exp\left[its(z_1,\cdots,z_n)-\sum_j z_j\right]dz_n\cdots dz_1,$$

知 $\varphi(t)$與θ無關，也就是說S之分配與θ無關，因此S與Y_1爲獨立。

例如 $\sum_{j=1}^{r}(Y_j-Y_1)+(n-r)(Y_r-Y_1)$，$r<n$，爲平移不變統計量，故與$Y_1$爲獨立。

又如 $\sum_{j=1}^{n}(Y_j-Y_1)$ 亦爲平移不變統計量，故與Y_1爲獨立。又由 $\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\theta)=$ $n(Y_1-\theta)+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-Y_1)$且$n(Y_1-\theta)$, $\sum_j(Y_j-Y_1)$爲獨立，

故 $E\{\exp[it\sum_j(Y_j-\theta)]\}=E\{\exp[itn(Y_1-\theta)]\}\ E\{\exp[it\sum_j(Y_j-Y_1)]\}$

因 $E\{\exp[it\sum_j(Y_j-\theta)]\}=E\{\exp[it\sum_j(x_j-\theta)]\}\ \sum_{j=1}^{n}E\{\exp[it(x_j-\theta)]\}$

$$=\frac{1}{(1-it)^n},$$

$$E\{\exp[itn(Y_1-\theta)]\}=\int_{\theta}^{\infty}\exp[itn(y_1-\theta)]\cdot n\exp[(-n(y_1-\theta))]\,dy_1$$

$$=\frac{1}{1-it},$$

得統計量 $\sum_{j=1}^{n}(Y_j-Y_1)$之 c.f. 爲

$$\varphi(t)=E\{\exp[it\sum_j(Y_j-Y_1)]\}=\frac{1}{(1-it)^{n-1}},$$

顯然知$\varphi(t)$爲 gamma 分配之特性函數，因此統計量 $S=\sum_j(Y_j-Y_1)$ 之分配爲 gamma 分配，其 p.d.f. 爲

$$g(s)=\frac{1}{\Gamma(n-1)}s^{n-2}e^{-s},\ s>0,$$

$E(S)=n-1$，$V(S)=n-1$。

其次關於尺度不變統計量則有下列結果（以連續型之隨機變數說明）：

設一分配族$\{f(x;\theta)\mid\theta\varepsilon\Omega\}$之母數爲一尺度母數，卽$X/\theta$，$\theta\neq0$ 之分配與θ無關，並設$X_1,\cdots X_n$爲隨機樣本，T爲θ之完全的充分統計量，若$S=S(X_1,\cdots,X_n)$爲任意尺度不變統計量，則S與T爲獨立。

證明：令$z_j=x_j/\theta$，$j=1,\cdots,n$，則Z_j之p.d.f. $h(z_j)$與θ無關，

故$S=S(X_1,\cdots,X_n)$之 c.f. 爲

$\varphi(t)=E[\exp(itS)]=E\{\exp[itS(X_1,\cdots,X_n)]\}$

$=E\{\exp[itS(\theta Z_1,\cdots,\theta Z_n)]\}=E\{\exp[itS(Z_1\cdots,Z_n)]\}$

$=\int\cdots\int\exp[itS(z_1,\cdots,z_n)]\,h(z_1)\cdots h(z_n)dz_1\cdots dz_n$，顯然知$\varphi(t)$與$\theta$無關，
即$S=S(X_1,\cdots,X_n)$之分配與θ無關，因此得知S與T爲獨立。

例6.設X之p·d·f·爲$f(x;\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}$，$\alpha>0$，$\theta>0$，$x>0$，知屬於指數分配族，故母數$\theta$之充分統計量$\bar{X}$或$X_1+\cdots+X_n$具有完全性。令$x=\theta z$，得Z之p·d·f·爲$h(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}z^{\alpha-1}e^{-z}$，$z>0$。知Z之分配與$\theta$無關。設$S=S(X_1,\cdots,X_n)$爲任意尺度不變統計量，其c·f·爲

$\varphi(t)=E[\exp(itS)]=E\{\exp[itS(Z_1,\cdots,Z_n)]\}$與$\theta$無關，故知S與$\bar{X}$爲獨立。

例如　$S=X_j/(X_1+\cdots+X_n)$，$j=1,\cdots,n$，即爲尺度不變統計量，故S與$X_1+\cdots+X_n$爲獨立。因此依此獨立性可得下列結果：

$E(X_j)=E[(X_1+\cdots+X_n)S]=E(X_1+\cdots+X_n)E(S)$。知統計量S之希望數爲

$$E(S)=E\left(\frac{X_j}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{E(X_j)}{E(X_1+\cdots+X_n)}=\frac{E(X_j)}{E(X_1)+\cdots+E(X_n)}=\frac{1}{n}。$$

又$V(X_j)=V[(X_1+\cdots+X_n)S]=[E(X_1+\cdots+X_n)]^2V(S)+$
$[E(S)]^2V(X_1+\cdots+X_n)+V(X_2+\cdots+X_n)V(S)$
$=(n\alpha\theta)^2\ V(S)+\frac{1}{n^2}\cdot n\alpha\theta^2+n\alpha\theta^2V(S)$

得S之變異數爲$V(S)=\left(\alpha\theta^2-\frac{\alpha\theta^2}{n}\right)/[(n\alpha\theta)^2+n\alpha\theta^2]$

$=\left(1-\frac{1}{n}\right)/(n^2\alpha+n)=(n-1)/n^2(n\alpha+1)$。

一般而言，若$\frac{W}{V}$，V爲獨立，則$E\left(\frac{W}{V}\right)^k=E(W^k)/E(V^k)$，

故　$E(S^k)=E(X_j^k)/E(X_1+\cdots+X_n)^k=\frac{\Gamma(\alpha+k)\theta^k}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+k)\theta^k}$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+k)}。$$

例如$\left(\sum_j\sum_k a_{jk}X_jX_k\right)/(\sum X_j)^2$亦爲尺度統計量，故與$\sum_j X_j$爲獨立。反之，若$\left(\sum_j\sum_k a_{jk}X_jX_k\right)/(\sum_j X_j)^2$與$\sum_j X_j$爲獨立，則由Laha[5]知$X_j$，$j=1,\cdots,n$之分配必爲gamma分配。

例7.設X之p·d·f·爲$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}$，$0<x<\theta$，$0<\theta$。並設隨機樣本之順序統計量爲$0<Y_1<\cdots<Y_n<\theta$。令$x=\theta z$，得Z之p·d·f·爲$h(z)=1$，$0<z<1$知Z之分配與$\theta$無關，故$\theta$爲一尺度母數。又知$Y_n$爲$\theta$之完全的充分統計量。設任意尺度不變統計量爲

$S=S(Y_1,\cdots,Y_n)$，　∃ c·

$$\varphi(t)=\int_0^{\theta}\int_0^{y_n}\cdots\int_0^{y}\exp[itS(y_1,\cdots,y_n)]\frac{n!}{\theta^n}dy_1\cdots dy_n$$，令 $y_j=\theta z_j$，$j=1,\cdots,n$，

$$=n!\int_0^1\int_0^{z_n}\cdots\int_0^{z_2}\exp[itS(z_1,\cdots,z_n)]dz_1\cdots dz_n$$ 與 θ 無關，

故S與 Y_n 為獨立。其他例如統計量 Y_1/Y_n，$(Y_1+\cdots+Y_n)/Y_n$ 皆各與 Y_n 為獨立。

設X之p·d·f· 為 $f(x;\theta_1,\theta_2)$，θ_1 為位置母數，θ_2 為尺度母數。當 θ_1,θ_2 之完全的充分統計量 T_1，T_2 存在時，若統計量 $S(X_1,\cdots,X_n)=S\left(\frac{X_1-a}{b},\cdots,\frac{X_n-a}{b}\right)$，式中a，$b\neq 0$ 為任意實數，則由前述結果易知S必與 (T_1,T_2) 為獨立。

例8.設X之分配為常態分配 $n(\theta_1,\theta_2)$，$\theta_2>0$，知該分配屬於指數分配族，故

$\overline{X}$，$S^2=\frac{1}{n}\sum_j(X_j-\overline{X})^2$ 為 θ_1,θ_2 之完全的充分統計量。顯然知統計量

$\sum_{j=1}^{n-1}(X_{j+1}-X_j)^2/\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$，$(Y_n-\overline{Y})/(Y_n-Y_1)$ 等皆各與 $(\overline{X},S^2)$ 為獨立。

例9.設 X，Y 之聯合分配為二變數常態分配，母數為 μ_1，μ_2,σ_1^2，σ_2^2 及 ρ。知屬於多母 之指數分配族，因此 母數之充分統計量 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$S_x^2=\frac{1}{n}\sum_j(X_j-\overline{X})^2$，

$S_y^2=\frac{1}{n}\sum_j(Y_j-\overline{Y})^2$，$R=\sum_j(X_j-\overline{X})(Y_j-\overline{Y})/nS_xS_Y$，具有完全性。

當 $\rho=0$，則X，Y為獨立，依前述知 $\overline{X},S_x^2$，$\overline{Y}$，S_Y^2，為獨立。又令 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$，$v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ 則U，V之聯合分配與母數 μ_1，$\mu_2,\sigma_1^2,\alpha_2^2$ 無關。又 $R=\sum_j(X_j-\overline{X})(Y_j-\overline{Y})/nS_xS_Y$ $=\sum(U_j-\overline{U})(V_j-\overline{V})/nS_uS_v$，因此R之分配與 μ_1，μ^2，σ_1^2，σ_2^2 無關，故R與完全的充分統計量 $(\overline{X},\overline{Y},S_x^2,S_Y^2)$ 為獨立，即 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，S_x^2，S_Y^2，R為獨立。依此知 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，S_x^2 S_y^2，R之聯合機率密度函數為各機率密度函數之乘積。當 $\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$，$\rho=0$ 則 $\overline{X}$ 之分配為 $n\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$\overline{Y}$ 之分配為 $n\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$V_1=nS_x^2$，$V_2=nS_y^2$ 皆為卡方分配其自由度等於n−1。當 $\rho=0$，知R之p·d·f·為

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(1-r^2)^{(n-4)/2}$$，$-1<r<1$，且 $\overline{X},\overline{Y},V_1,V_2,R$ 為獨立。

設 $\theta=(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2\rho)$，$\theta_0=(0,0,1,1,0)$ 則 $\overline{X},\overline{Y},V_1,V_2,R$ 之j·p·d·f·為

$$g_1(\overline{x},\overline{y},v_1,v_2,r;\theta)=g_1(\overline{x},\overline{y},V_1,V_2,r;\theta_0)\frac{L(\theta_0)}{L(\theta)},$$

然後對 $\bar{x}$，$\bar{y}$，v_1，v_2 積分，卽可求出$\rho \neq 0$時 R之p·d·f·。此方法係應用充分統計量之概念導出，雖須先直接導出當$\rho = 0$時R之p·d·f·〔4〕，但仍不失一較簡便的方法。

8.結　論

①屬於指數分配族的分配相當多，而且指數分配族具有很好的數學性質，因此在統計學上，大部分關於推定和檢定的完整理論都建築在指數分配族的討論上。

②由於多母數指數分配族之聯合充分統計量之聯合分配亦屬於多變數多母數之指數分配族，因此本文有關聯合充分統計量的分析的一部分結論就相當於對於一般多數數多母數指數分配族之分析。

③又由於指數分配族之充分統計量具有完全性，因此在本文之中依 Basu 之定理所導出的幾個結果，對於討論統計量之獨立性提供了一種較方便的分析方法。

參考文獻

〔1〕Basu, D. (1955). On statistics independence of a complete sufficient statistics. Sankhyā, Voi. 15, pp. 377-380.

〔2〕Bildikar, Sheela and Patil, G. P. (1968). Multivariate exponential-type distributions. Ann. Math. Statist., Vol. 39, pp. 1316-1326.

〔3〕Hogg, R.V. and Craig, A.T. (1956). Sufficient statistics in elementary distribution theory. Sankhyā, Vol. 17, p. 209.

〔4〕Hogg, R.V. and Craig, A.T. (1970). Introduction to Mathematical Statistics. The Macmillan Company, New York, 3rd edition, pp. 339-341.

〔5〕Laha, R.G. (1954). On a characterization of the Gamma distribution. Ann. Math. Statist., Vol. 25, pp. 784-787.

〔6〕Lukacs, E. and Laha, R.G. (1964). Applications of Characteristic Functions. Hafner Publishing Company, New York, p. 81.

〔7〕Kendall, M.G. and Stuart, A. (1961). The Advanced Theory of Statistics. Charles Griffin & Co. Ltd., London, Vol. II, p. 52.

〔8〕Patil, G.P. (1963). A Characterization of the exponential-type distributions. Biometrika, Vol. 50, pp. 205-207.

〔9〕Tan, W. Y. (1967). Note on Mathematical Statistics. The Institute of Botany, Academia Sinica, Vol. II, pp. 608-609.