

非高斯時間序列選模法之比較

鄭天澤* 林秀紅**

提 要

近二十年來，時間序列分析中有關ARMA模型選取的準則中，較為人所接受且廣泛被應用的主要有AIC及BIC等。這些選模法在選模過程中均需給定候選模型的最高階次，此最高階次的給定不僅將影響最終模型的確認，且當其值很大時，整個選模過程會變得相當複雜且煩瑣。Pukkila et al.(1990)以對稱性增加配適模型階次的疊代過程所提出之選模方法（簡記為PKK法），則不需給定候選模型最高階次。但是上述方法皆基於更新序列（innovation series）為高斯過程的假設，在實例中，此等假設往往不成立。

本文主要目的在探討當更新序列不為高斯過程時，PKK選模法的選模能力；並將其結果與由AIC及BIC選模法在非高斯過程下之選模結果做比較。

關鍵詞：ARMA模型，AIC，BIC，一般化最小平方法。

1. 前 言

在時間序列分析中，自迴歸移動平均（AutoRegressive - Moving - Average, ARMA）模型階次（order）的確認一直是個非常重要卻也十分困難的主題，過去二十年來也確實吸引了不少學者致力於這方面的研究。傳統上，我們利用Box & Jenkins(1976)所提出的自相關函數（AutoCorrelation Function, 簡稱ACF）、及偏自相關函數（Partial Auto-

*作者為本校統計研究所副教授

**作者為本校統計研究所碩士

Correlation Function, 簡稱PACF) 來暫時確認模型, 接著逐一篩檢並保留殘差項為序列不相關之模型, 最後再選取一使殘差變異數 (residual variance) 為最小的模型為最終確認模型。也有學者利用古典統計推論中的逐次檢定 (sequential test) 發展出: 概似比檢定 (likelihood ratio test)、Wald檢定、及Lagrange multiplier檢定。但是, 這些方法皆會因給定之顯著水準不同, 而有不同的結果, 因此比較主觀 (見de Gooijer et al., 1985)。Akaike (1974) 利用對數概似函數 (log-likelihood function), 發展出著名的自發訊息準則 (automatic information criterion) 簡稱AIC。而後Schwarz (1978) 利用貝氏 (Bayesian) 統計推論, 發展出著名的貝氏訊息準則, 簡稱BIC。Hannan & Quinn (1979) 改寫BIC準則並找出一懲罰函數 (penalty function), 使其遞減的速度大於BIC之懲罰函數, 卻小於AIC之懲罰函數, 此即為著名的HQ準則。以上三種準則由於不像ACF或PACF必須靠目測, 也不似逐次檢定需要設定顯著水準, 因此是比較客觀的方法。

利用前述三種客觀準則來選取模型時, 必須設定候選模型之最高階次, 但由於所給定候選模型的最高階次往往影響最後所選定的模型 (見Hurvich & Tsai, 1990), 且因必須計算所有可能模型, 故耗時費力。為了避免此等困擾, Pukkila et al (1990) 基於模型精簡原則 (principle of parsimony), 提出一種簡單而且能精確選取ARMA模型的方法。然而這些方法皆基於一重要的假設: 即更新序列 (innovation series) 為常態白干擾過程。實際上此假設往往不存在, 故本文主要目的是探討在ARMA模型架構下, 當更新序列為一非高斯過程時 (non-Gaussian process), PKK法的選模能力; 並將之與利用AIC與BIC準則來選取模型時做比較。

本文第二節將詳述PKK選模法在選模過程中, 模型配適、參數估計及模型診斷三步驟之理論基礎。在第三節則藉模擬資料來說明PKK選模法、AIC及BIC三者之選模結果, 並將結論彙總於第四節。

2. AIC、BIC與PKK選模法

本節主要在敘述AIC、BIC與PKK選模法, 在2.2節中先介紹AIC與BIC準則; 2.3節則介紹Koreisha & Pukkila (1990a) 所提出用以估計參數的一般化最小平方法。Pukkila & Kri-

shnaiah (1988) 所提出用以判斷殘差序列 (residual series) 是否為白干擾過程的方法則在2.4節中詳述；最後在2.5節中介紹PKK選模法。

2.1 模型定義

考慮下列具平穩 (stationary) 及可逆 (invertible) 狀態而階次為 (p, q) 之自迴歸移動平均模型，以下簡稱ARMA模型，並記為ARMA (p, q)，其一般形式如下：

$$\tilde{z}_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i \tilde{z}_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (2.1.1)$$

$$\Rightarrow (1 - \sum_{i=1}^p \Phi_i B^i) \tilde{z}_t = (1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j) a_t$$

$$\Rightarrow \Phi(B) \tilde{z}_t = \Theta(B) a_t$$

其中 $\Phi_i, i=1, \dots, p$ ，表ARMA模型中自迴歸過程的參數； $\theta_j, j=1, \dots, q$ 表ARMA模型中移動平均過程的參數； $a_t, t=1, \dots, n$ 表ARMA模型中之更新序列 (innovation series)，具有以下性質： $E(a_t) = 0, \text{Var}(a_t) = \sigma^2, \text{Cov}(a_i, a_j) = 0 \quad i \neq j$ ，而B則表後退運算子 (backshift operator)，其定義如右： $B^m \tilde{z}_t = \tilde{z}_{t-m}$ 。

至於在選模過程中所配適之MA(1)，AR(1)，MA(2)，AR(2)，ARMA(1, 1)，ARMA(2, 1)與ARMA(1, 2)等七種模型其平穩與可逆狀態之充要條件，參見O'Donovan (1983)。

2.2 AIC & BIC選模準則

過去二十年來，幾種較著名的ARMA模型選模準則，如：AIC、BIC及HQ等，均可用下列函數的極小化來表示：

$$\begin{aligned} \delta(p, q) &= n \log \hat{\sigma}^2 + (p + q)g(n), \quad p = 0, 1, \dots, p^* \\ & \quad q = 0, 1, \dots, q^* \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

其中 n : 表序列觀察值的個數

$\hat{\sigma}^2$: 表配適 ARMA (p, q) 後的殘差變異數估計值

p^*, q^* : 表候選模型之最高階次

在選模過程中，模型的階次越少，則模型中所含的參數就越少，因參數估計所引起之誤差也就越小。在 (2.2.1) 式中， $(p+q)g(n)$ 為一懲罰函數 (penalty function)，當模型中所含參數個數增加時， $(p+q)g(n)$ 之值亦隨之遞增；相反的， $n \log \hat{\sigma}^2$ 將隨之遞減。當 $g(n) = 2$ 時，(2.2.1) 式即為 AIC 準則；而當 $g(n) = \log n$ 時，(2.2.1) 式即為 BIC 準則。由於 BIC 具有一致性 (見 Hurvich & Tsai, 1989)，故本文將利用 BIC 準則來判斷殘差序列是否為白干擾過程。

2.3 一般化最小平方法 (generalized Least Squares Method)

由於任一可逆 ARMA 模型皆可轉換為下列無窮自迴歸模型 (infinite autoregressive model)，記為 AR (∞)：

$$\tilde{z}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \tilde{z}_{t-k} + a_t \quad (2.3.1)$$

其中 π_k 為一權數 (weight)，其定義如下：

$$\pi_k = \Phi_k + \theta_1 \pi_{k-1} + \dots + \theta_{k-1} \pi_1 + \theta_k \pi_0 \quad (2.3.2)$$

其中

$$\begin{cases} \theta_k = 0 & k > q \\ \Phi_k = 0 & k > p \\ \pi_k = 0 & k < 0 \\ \pi_0 = -1 \end{cases}$$

因此，我們可將 ARMA 模型視為一近似 L 階之迴歸模型，稱為長期自迴歸模型 (long-autoregressive model)，簡稱 LAR，其形式如下：

$$\tilde{z}_t = \sum_{k=1}^L \pi_k \tilde{z}_{t-k} + a_t \quad (2.3.3)$$

一般化最小平方法作參數估計的過程可分為下列二階段：

非高斯時間序列選模法之比較

階段一：由 (2.1.1) 式將 ARMA 模型轉換為 LAR 如 (2.3.3) 式，求出殘差項 $\{a_t\}$ 之估計值 $\{\hat{a}_t\}$

階段二：將階段一求得之 $\{\hat{a}_t\}$ 代入 (2.1.1) 式，得一迴歸模型如下：

$$y_t = \tilde{z}_t - \hat{a}_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i \tilde{z}_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{a}_{t-j} + \zeta_t \quad (2.3.4)$$

利用最小平方方法 (Ordinary Least-Squares Method) 可求出 (2.3.4) 式中 Φ_i 及 θ_j 之估計值 $\hat{\Phi}_i$ 及 $\hat{\theta}_j$ ，雖然在某些特定條件下 $\hat{\Phi}_i$ 及 $\hat{\theta}_j$ 具有強一致性 (見 Hannan & Rissanen (1982))，但因 \hat{a}_t 僅為 a_t 之估計值，故 (2.3.4) 式可能產生 Φ_i 及 θ_j 的無效率 (inefficient) 估計值。故令 a_t 等於 \hat{a}_t 加上一個因估計誤差而引起之隨機干擾項 ε_t ，亦即 $a_t = \hat{a}_t + \varepsilon_t$ ，代入 (2.1.1) 式則 (2.3.4) 式可改寫如下：

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= \sum_{i=1}^p \Phi_i \tilde{z}_{t-i} + (\hat{a}_t + \varepsilon_t) - \sum_{j=1}^q \theta_j (\hat{a}_{t-j} + \varepsilon_{t-j}) \\ \Rightarrow \tilde{z}_t - \hat{a}_t &= \sum_{i=1}^p \Phi_i \tilde{z}_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{a}_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

其中 $1 + \max\{p, q\} \leq t \leq (n-L)^\circ$ (2.3.5) 式可用迴歸模型表示如下：

$$y_t = x_t \beta + \zeta_t \quad (2.3.6)$$

其中 $y_t = \tilde{z}_t - \hat{a}_t$ ， $\zeta_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$ ， $x_t = (\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-p}, -\hat{a}_{t-1}, \dots, -\hat{a}_{t-q})$ ，

$$\beta^T = (\Phi_1, \dots, \Phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$$

(2.3.6) 式可進一步利用矩陣表示如下：

$$Y = X\beta + \zeta \quad (2.3.7)$$

其中 $Y^T = (y_{t+1}, \dots, y_m)$ ， $X = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$ ， $\zeta^T = (\zeta_{t+1}, \dots, \zeta_m)$ ，

$$r = \max\{p, q\}, m = n - L$$

由於 (2.3.4) 式中所求出之 $\hat{\theta}_j$ 具有一致性，於是可建立一個含有誤差向量 ζ 之共變數矩陣 Σ ，如此一來便可計算出共變數矩陣之估計值 $\hat{\Sigma}$ 。其計算過程如下：

令 I 表一單位矩陣， σ^2 表誤差項之變異數，而 $V = X(X^T X)^{-1} X^T$ ，則其共變數矩陣之估

計值可寫成

$$\hat{\Sigma} = \hat{\sigma}^2 (I - V) \quad (2.3.8)$$

而 β 之一般化最小平方估計值， $\hat{\beta}_{GLS}$ ，形式如下：

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X^T \hat{\Sigma}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{\Sigma}^{-1} Y \quad (2.3.9)$$

由於 $\hat{\Sigma}^{-1}$ 不易計算，可藉Cholesky分解定理（decomposition theorem）找出一上三角矩陣（upper triangular matrix） R （見Kennedy & Gentle, 1980），使得 $\hat{\Sigma} = R^T R$ 。所以（2.3.9）式可改由下式計算：

$$\hat{\beta}_{GLS} = (Z^T Z)^{-1} Z^T U \quad (2.3.10)$$

其中 $Z = (R^T)^{-1} X$ ， $U = (R^T)^{-1} Y$ 。

在階段一中，首要工作為決定（2.3.3）式中 L 之值。Koreisha & Pukkila（1990b）曾試驗各種不同的 L 值： $0.5\sqrt{n}$ ， \sqrt{n} ， $1.5\sqrt{n}$ 及 $2.0\sqrt{n}$ ，並歸納出：當 L 等於 \sqrt{n} 時，參數估計最不容易發生非平穩及非可逆現象的結果，故本文將採用 $L = \sqrt{n}$ 。當 L 值決定之後，尚需求出自迴歸模型中參數 π_k 之估計值 $\hat{\pi}_k$ ，一般較常用來估計自迴歸模型中參數的方法有Yuler-Walker參數估計法，Burg演算法及最小平方方法。其中Burg演算法較Yule-Walker估計法所產生之偏差（bias）小，且Burg演算法有遞迴（recursive）的性質，故多數學者偏好Burg演算法，然因最小平方方法可產生具一致性之參數估計值，故本文採用最小平方方法來估計（2.3.3）式中之參數 π_k 。

在階段二中，由（2.3.9）式或（2.3.10）式求出模型中參數估計值 $\hat{\beta}_{GLS}$ ，可代入（2.3.7）求得誤差向量 ξ ，經（2.3.8）式修正原有的共變異數矩陣 $\hat{\Sigma}$ ，再藉由（2.3.9）式或（2.3.10）式求出下一次疊代的參數估計值 $\hat{\beta}_{GLS}$ ，直到符合所給定收斂條件為止。Koreisha & Pukkila（1990a）指出：一般化最小平方方法在求解的過程中，疊代（iteration）次數最多不超過五次，即能達到收斂的要求。且利用模擬驗證得知：每經過一次疊代後，並不會明顯改進參數估計值，故本文將疊代次數定為一次。

2.4 自迴歸階次確立準則 (Autoregressive Order Determination Criterion)

Pukkila & Krishnaiah (1988) 提出自迴歸階次確立準則用以判斷殘差序列是否為白干擾過程。他們的方法如下：

令 \hat{a}_t 為配適 (2.1.1) 式後所求得之殘差序列。欲檢定 \hat{a}_t 是否為一白干擾過程，考慮下列虛無 (null) 與對立 (alternative) 假設：

$$\begin{cases} H_0: \hat{a}_t \text{ is white noise process} \\ H_1: \hat{a}_t \text{ is not white noise process} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

因白干擾過程之序列模型為 AR(0)，且若一過程不是白干擾過程，則可用一個高階的自迴歸過程來逼近，所以 (2.4.1) 式可改寫如下：

$$\begin{cases} H_0: \hat{a}_t \sim \text{AR}(0) \\ H_1: \hat{a}_t \sim \text{AR}(k) \quad k > 0 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

因此，上述檢定問題實可視為模型選取問題，利用任何一種選階準則來選取模式階次，若選取之階次大於 0，則拒絕 H_0 並宣告殘差序列為非白干擾過程，否則接受 H_0 。

在此，因僅考慮自迴歸模型的選取，故令 $q=0$ ，而 BIC 準則可寫成下式：

$$\delta(k) = n \log \hat{\sigma}^2 + k \log n \quad (2.4.3)$$

利用 Yule-Walker 參數估計法，可計算 $\hat{\sigma}^2$ 如下：

$$\hat{\sigma}^2 = c(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \quad (2.4.4)$$

其中 $\hat{\Phi}_j, j=1, \dots, k$ 為 Yule-Walker 估計量， $r(j) = c(j) / c(0)$ ， $c(j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} (\hat{a}_t - \bar{\hat{a}})(\hat{a}_{t+j} - \bar{\hat{a}})$ ； $c(0)$ 表 $\{\hat{a}_t\}$ 之樣本變異數， $r(j)$ 則表 $\{\hat{a}_t\}$ 遞延 j 期之樣本 ACF 值。

將 (2.4.4) 式代入 (2.4.3) 式，並改寫如下：

$$\delta(k) = n \log \left\{ c(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \right\} + k \log n \quad (2.4.5)$$

則檢定統計量為

$$T(k^*) = \min_{1 \leq k \leq k^*} \delta(k) = \min_{1 \leq k \leq k^*} \left\{ n \log \left\{ c(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \right\} + k \log n \right\} \quad (2.4.6)$$

其中 k^* 表自迴歸模型的最大可能階次。

因當 $k=0$ 時， $\delta(k) = n \log c(0)$ ，故(2.4.6)式可改寫如下：

$$\begin{aligned} T(k^*) &= \min \left\{ n \log c(0), \min_{1 \leq k \leq k^*} \left(n \log \left[c(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \right] + k \log n \right) \right\} \\ &= \min \left\{ n \log c(0), \min_{1 \leq k \leq k^*} \left(\left[n \log c(0) + n \log \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \right] + k \log n \right) \right\} \\ &= \min \left\{ 0, \min_{1 \leq k \leq k^*} n \log \left[\left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_j r(j) \right) \right] + k \log n \right\} \\ &= \min \left\{ 0, \min_{1 \leq k \leq k^*} n \sum_{j=1}^k \log(1 - \hat{\Phi}_{jj}^2) + k \log n \right\} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

其中最後一個等式見Hannan (1970)，Chap. IV。

因 $n \log(1 - \hat{\Phi}_{jj}^2)$ 之近似分配 (asymptotic distribution) 與 $-n \hat{\Phi}_{jj}^2$ 之近似分配相同，且當樣本數夠大及在 H_0 假設下， $\hat{\Phi}_{jj}$ 將會機率逼近 (approach in probability) $r(j)$ (見Pukkila (1984))，故(2.4.7)式可寫成：

$$\begin{aligned} T(k^*) &= \min_{1 \leq k \leq k^*} \left\{ 0, -n \sum_{j=1}^k \hat{\Phi}_{jj}^2 + k \log n \right\} \\ &= \min_{1 \leq k \leq k^*} \left\{ 0, -n \sum_{j=1}^k r^2(j) + k \log n \right\} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

綜上所述，令 $BIC(k) = -n \sum_{j=1}^k r^2(j) + k \log n$ 則檢查序列 $\{\hat{a}_k\}$ 是否為一白干擾過程之步驟如下：計算當 $k=1$ 時，若 $BIC(k)$ 小於 0，則停止，此時序列 $\{\hat{a}_k\}$ 為非白干擾過程；反之，若 $BIC(k) > 0$ ，則令 $k=k+1$ ，並重覆上述檢查動作。由Pukkila & Krishnaiah (1988) 的結果顯示；當 $k^*=10$ 且樣本數大於 50 時，顯著水準 (significance level) 將為常數 (constant)，故本文將 k^* 值定為 10，其詳細過程見圖 2.1。

Pu
合理的
紹PKK
步驟一
步驟二
步驟三
註：

非高斯時間序列選模法之比較

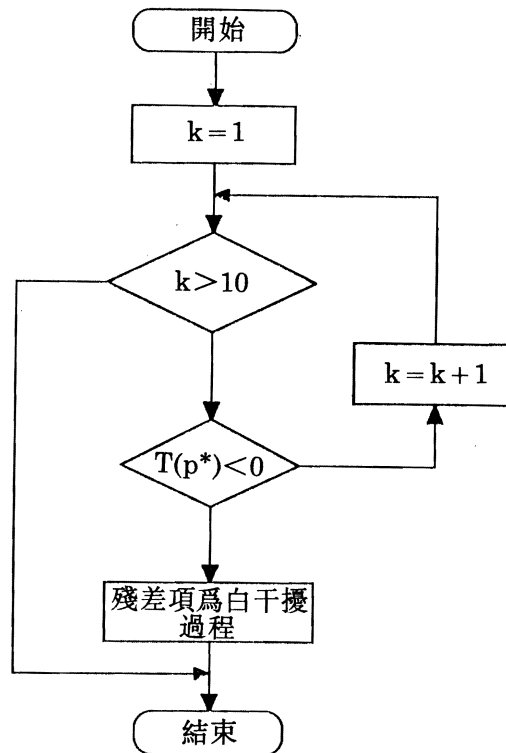


圖2.1 檢查殘差序列是否為白干擾過程之流程圖

2.5 PKK選模法

Pukkila et al. (1990) 基於模型精簡原則提出改良的選模方法，不僅使最終確認模型能合理的描述序列資料的基本過程，又能客觀、快速及正確的選取模型。以下我們將扼要地介紹PKK所提出之ARMA模型選取的方法。此方法可分為下列三步驟：

步驟一：由最小的階次AR(0)開始配適一模型。

步驟二：利用一般化最小方法求出模型中之參數估計，並藉逐步前進預測法 (one-step-ahead forecast) 求出預測值，進而得出殘差序列。

步驟三：檢查由步驟二所求得之殘差項是否為白干擾過程。若是，則停止；否則增加配適模型的階次，並重覆步驟一，直至殘差序列符合白干擾過程的假設。

註：在步驟三中，依如下的順序增加配適模型的階次：

AR(0)→MA(1)→AR(1)→MA(2)→AR(2)→ARMA(1,1)→
ARMA(1,2)→ARMA(2,1)

其過程詳述於圖2.2中。

3. 模擬結果分析

在本節中我們將以電腦模擬的結果來說明PKK選模法的應用，並對PKK選模法在更新序列分別服從高斯（Gaussian）及哥西（Cauchy）分配且真實模型為AR（1）、MA（2）以及ARMA（1,1）時的選模能力作比較，同時也利用AIC及BIC二準則選取模型以比較PKK、AIC及BIC等三種方法在上述兩種分配下之選模能力。至於當更新序列分別服從對數常態（Lognormal）、均勻（Uniform）、以及加瑪（Gamma）分配且真實模型為MA(1)及AR(2)時的模擬結果分析，請見鄭天澤與林秀紅（1992）。

3.1 模擬過程

本文中模擬之資料，皆利用IMSL\STAT中RNARM，RNCHY，RNLNL，RNUN，RNGAM副程式產生，所有計算皆使用教育部電算中心的IBM 3090電腦系統。序列 $\{\tilde{z}_t\}$ 觀測值個數為100個，並且重覆取100組，序列 $\{\tilde{z}_t\}$ 元素 \tilde{z}_t 之值由（2.1.2）式產生，而且模型中所給定參數值必滿足平穩性之條件。其中，更新序列 $\{a_t\}$ 分別由 $N(0, 1)$ 與 $\text{Cauchy}(0, 1)$ 分配產生。

3.2 PKK選模結果分析

由表3.2.1的結果可知：更新序列是否為高斯過程，並不影響其選模能力：但是當模型中AR或MA項係數靠近原點時，其選模結果並不理想。此現象可用模型的MA表式（MA representation）解釋如下，今舉表3.2.1（a）中 $\Phi_1=0.3$ 的情形為例，其餘可依同法類推。

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= 0.3\tilde{z}_{t-1} + a_t \\ &= 0.3(0.3\tilde{z}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\ &= 0.09\tilde{z}_{t-2} + a_t + 0.3a_{t-1}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

非高斯時間序列選模法之比較

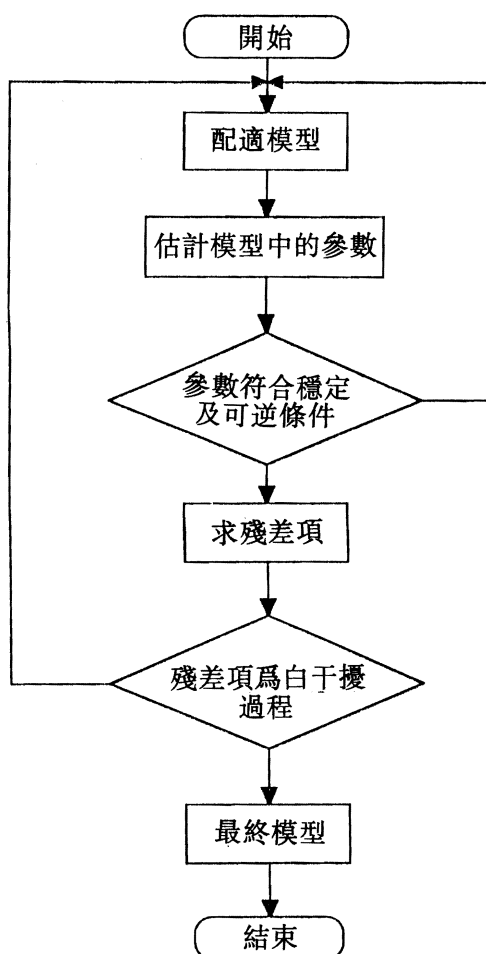


圖2.2 PKK選模流程圖

從上式可知， \tilde{z}_{t-2} 項之係數相對地較小，似可由模型中剔除，故選取MA(1)為最終模型的比率高達76%，是相當可能的結果。

由表3.2.2的結果可知，當更新序列服從哥西分配時，其選模能力較更新序列為高斯分配時為佳。進一步觀察時則發現：當 (θ_1, θ_2) 之值靠近原點時，易導致配適不足，因而選取AR(0)或MA(1)為最終模型，其原因可由(3.2.2)式得知，而當 (θ_1, θ_2) 之值接近非可逆區域時，容易導致過度配適(overfitting)，因而選取AR(2)或甚至AR(3)為最終模型，此結果可藉(3.2.3)式加以說明；

(a). $(\theta_1, \theta_2) = (0.3, -0.4)$

$$\tilde{z}_t = a_t - 0.3a_{t-1} + 0.4a_{t-2}$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_t = (1 - 0.3B + 0.4B^2)a_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0.3B + 0.4B^2)^{-1}\tilde{z}_t = a_t$$

$$\Rightarrow (1 + 0.3B - 0.31B^2 + 0.213B^3 + \dots)\tilde{z}_t = a_t$$

$$i.e. \tilde{z}_t = a_t - 0.3\tilde{z}_{t-1} + 0.31\tilde{z}_{t-2} - 0.213\tilde{z}_{t-3} + \dots \quad (3.2.2)$$

由上式中不難發現AR(0)或MA(1)皆有可能被選為最終模型。

(b). $(\theta_1, \theta_2) = (1.8, -0.9)$

$$\tilde{z}_t = a_t - 1.8a_{t-1} + 0.9a_{t-2}$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_t = (1 - 1.8B + 0.9B^2)a_t$$

$$\Rightarrow (1 - 1.8B + 0.9B^2)^{-1}\tilde{z}_t = a_t$$

$$\Rightarrow (1 + 1.8B + 2.34B^2 + 2.592B^3 + \dots)\tilde{z}_t = a_t$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_t = a_t + 1.8z_{t-1} - 2.34z_{t-2} - 2.59z_{t-3} + \dots \quad (3.2.3)$$

由上式可知：AR(2)及AR(3)均有可能成為最後認定模型。

由表3.2.3的結果不難發現：無論更新序列是否為高斯過程，其選模能力均相當不佳，且在錯選的模型中AR(2)占了絕大部份。因此在模型配適的順序方面，我們試著先配適ARMA(1,1)，然後再配適AR(2)。也就是說，將模型配適的順序更改如下：

$$AR(0) \rightarrow MA(1) \rightarrow AR(1) \rightarrow MA(2) \rightarrow ARMA(1,1) \rightarrow AR(2) \rightarrow$$

$$ARMA(1,2) \rightarrow ARMA(2,1)$$

經此調整後，由表3.2.4的結果可知其選模能力大為改善。而由表3.2.5更知，當 $\{\tilde{z}_t\}$ 之真實模型為AR(2)時，調動模型配適順序並不影響其選模結果。

雖然調整配適模型的順序能夠改善選模能力，但由表3.2.4的結果我們發現：如果模型中參數值符合 $|\Phi_1 - \theta_1| < 1$ 或 $|\Phi_1 + \theta_1| > 1$ 的條件，則選取AR(0)、MA(1)或AR(1)為最終

非高斯時間序列選模法之比較

模型的比率甚至可高達96%，此現象亦可用模型的MA表式（MA representation）及AR表式（AR representation）分別解釋如下，今舉表3.2.3（a）中 $\Phi_1=0.8$ 、 $\theta_1=0.5$ 的情形為例，其餘可依同法類推。

$$(a).(\Phi_1, \theta_1) = (0.8, 0.5)$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= 0.8\tilde{z}_{t-1} + a_t + 0.5a_{t-1} \\ \Rightarrow (1 - 0.8B)\tilde{z}_t &= (1 - 0.5B)a_t \\ \Rightarrow \tilde{z}_t &= (1 - 0.8B)^{-1}(1 - 0.5B)a_t \\ \Rightarrow \tilde{z}_t &= a_t + 0.3a_{t-1} + 0.24a_{t-2} + 0.192a_{t-3} + \dots\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned}\text{或} \quad \Rightarrow (1 - 0.8B)(1 - 0.5B)^{-1}\tilde{z}_t &= a_t \\ \Rightarrow (1 - 0.3B - 0.15B^2 - 0.075B^3 - \dots)\tilde{z}_t &= a_t \\ \Rightarrow \tilde{z}_t &= a_t + 0.3\tilde{z}_{t-1} + 0.15\tilde{z}_{t-2} + 0.075\tilde{z}_{t-3} + \dots\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

由（3.2.4）式與（3.2.5）式知，選取MA（1）或AR（1）為最終模型的可能性相當高。

3.3 AIC & BIC準則由選模結果分析

本節將說明經由AIC及BIC準則來選取模型時所產生的結果。為了便於與PKK法選模結果比較，對於最高候選模型階次的給定，無論是AR項或MA項均定為2。茲將各種真實模型下的選模結果分析如下：

$$(1) \tilde{z}_t = \Phi_1\tilde{z}_{t-1} + a_t$$

由表3.3.1的結果可知：當更新序列服從哥西分配，以AIC及BIC來選取模型時其選模能力均不佳，尤以利用AIC選模時，發生過度配適的比率高達88%以上；經由BIC來選模時，發生過度配適的比率亦達43%以上。當更新序列的機率分配為常態分配時，其選模能力並未有所改變。又AR項係數的絕對值若小於或等於0.3時，較易選取MA（1）為序列最終模型。

$$(2) \tilde{z}_t = a_t - \theta_1a_{t-1} - \theta_2a_{t-2}$$

由表3.3.2的結果我們發現下列事實：一、當更新序列服從哥西分配時，且MA項係數接近原點時，幾乎無法選取MA(2)為最終模型，卻反而經常選取ARMA(1,2)或ARMA(2,1)為最終模型。二、當更新序列之分配為常態分配且MA項係數接近原點時，選取MA(2)為最終模型的比率甚至可高達75%。三、當MA項係數接近非可逆區域時，則經常選取MA(2)、AR(2)、ARMA(1,2)及ARMA(2,1)為最終模型。

$$(3) \tilde{z}_t = \Phi_1 \tilde{z}_t + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

由表3.3.3的結果可知：當更新序列服從哥西分配時，常選取AR(2)或ARMA(2,1)為最終模型，而選取ARMA(1,1)為最終模型之次數竟然為0。而當更新序列之機率分配為高斯分配時，選取ARMA(1,1)為最終模型之比率亦很低，顯示出AIC或BIC準則對混合模型的選模能力也很差。

4. 結論與後續研究

由第三節模擬結果分析可知，利用AIC或BIC來選模時發生過度配適或配適不足的情形較經由PKK選模法嚴重。三種方法中以AIC之選模能力最差，BIC次之，PKK選模法為最優。雖然三種選模方法均有錯選模型的機會，但PKK選模法所錯選之最終模型，吾人均能給予合理的解釋，但AIC或BIC則無法作相同的處理。

在3.2節與3.3節中，我們也不難發現：PKK選模法不因更新序列為非高斯過程而影響選模能力，此一特性乃是AIC及BIC二準則所無法具備的。尤其當更新序列服從哥西分配時，利用AIC或BIC來選模時，往往有不合理的選模結果出現。除此之外，以AIC及BIC準則來選模時，在模型配適的過程中也常會發生浮點運算溢位，且所需的時間幾乎為PKK選模法的十倍，由經濟效益的觀點來看，PKK選模法顯然較合乎要求。而由模擬結果知，模型配適的先後順序應定為：

$$\text{AR}(0) \rightarrow \text{MA}(1) \rightarrow \text{AR}(1) \rightarrow \text{MA}(2) \rightarrow \text{ARMA}(1,1) \rightarrow \text{AR}(2) \rightarrow \\ \text{ARMA}(1,2) \rightarrow \text{ARMA}(2,1)$$

雖然PKK法的選模能力令人滿意，但序列資料之真實模型若為一高階之ARMA模型，則吾人仍然必須歷經多次配適後方能選出，但既使如此，亦不至於較使用AIC或BIC準則時

為差。
選模法
序列模
進一步

鄭天澤
立政
Akaik
sac
Box, C
2n
Box, C
A
An
de Go
fo
In
Hanna
Hanna
re
Hanna
M
Hurvi
K
Bi
Hurvi
in
Hurvi
U
Kenn
Y
Korei
E

為差。至於如何克服此一潛在的困難，則是吾人下一個研究的目標。除此之外，由於PKK選模法僅討論有關平穩型ARMA模型的選取，因此，如何將此法推廣並應用於季節性時間序列模型、向量時間序列模型、非線性時間序列模型以及非平穩ARMA模型的選取則有待進一步深入研究。

參 考 文 獻

- 鄭天澤與林秀紅 (1992). PKK選模法與AIC、BIC選模準則在非高斯時間序列選模上之模擬比較分析·國立政治大學統計研究所，技術性報告No.92-03。
- Akaike, H. (1974), "A New Look at the Statistcal Model Identification", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19, 716-723.
- Box, G. E. P., and Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2nd ed., San Francisco, Holden-Day.
- Box, G. E. P., and Pierce, D. A. (1970), "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Intergrated Moving Average Time Series Models," *Journal of the American statistical Association*, 65, 1509-1526.
- de Gooijer, J. G. D., and Abraham, B., and Gould, and Roubinson, L. (1985), "Methods for Determining the Order of Autoregressive Moving Average Process: A Survey," *International Statistics Review*, 53, 301-329.
- Hannan, E. J. (1970). *Multiple Time Series*, Wiley: New York.
- Hannan, E. J., and Quinn, B. G. (1979), "The Determination of the Order of an auto-regression," *Journal of the Statistical Society, Ser. B.* 41, 190-195.
- Hannan, E. J. and Rissanen, J. (1982). "Rescursive Estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order," *Biometrika* 69, 81-94.
- Hurvich, C. M., and Shumway, R., and Tsai, C. L. (1990), "Improved Estimation of Kullback-Leibler Information for Autoregressive Model Selection in Small Samples," *Biometrika*, 77, 709-719.
- Hurvich, C. M., and Tsai, C. L. (1989), "Regression and Time Series Model Selection in Small Samples," *Biometrika*, 76, 297-307.
- Hurvich, C. M., and Tsai, C. L. (1991), "Bias of the Corrected AIC Criterion for Underfitted Regression and Time Series Models," *Biometrika*, 79, 499-509.
- Kennedy, W. J. Jr. and Gentle, J. E. (1980), *Statistical Computing*, Marcel Dekker, New York.
- Koreisha, S., and Pukkila, T. (1990a), "A Generalized Least-Squares Approach for Estimation of Autoregressive Moving-Average Models," *Journal of Time Series Analysis*,

- 11, 139-151.
- Koreisha, S., and Pukkila, T. (1990b), "Linear Methods for Estimating ARMA and Regression Models with Serial Correlation," *Communication in Statistical Simulation*, 19(1), 71-102.
- Li, W.K., and McLeod, A.I. (1988), "ARMA Modelling with Non Gaussian Innovations," *Journal of Time Series Analysis*, 9, 155-167.
- O'Donovan, T.M. (1983), *Short Term Forecasting: An Introduction to the Box-Jenkins Approach*, New York, Wiley.
- Pukkila, T.M. (1984). "On the Distributions of the Differences between the estimated Autocorrelations and Partial Autocorrelations at the Same Lag." *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 13, 463-488.
- Pukkila, T.M., Koreisha, S., and Kallinen, A. (1990), "The identification of ARMA Models," *Biometrika*, 77, 537-548.
- Pukkila, T.M., and Krishnaiah, P.R. (1988), "On the Use of Autoregressive Order Determination Criteria in Univariate White Noise Tests," *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and, Signal Processing*, 36, 764-774.
- Schwarz, G. (1978), "Estimating the Dimension of A Model," *The Annals of Statistics*, 6, 461-464.

非高斯時間序列選模法之比較

表3.2.1 最終確認模型次數分配表—PKK ; 真實模型—AR(1)

(a) ARMA(p,q)

ϕ_1	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.3	19	76	5	0	0	0	0	0	0
-0.3	20	75	5	0	0	0	0	0	0
0.5	0	60	39	1	0	0	0	0	0
-0.5	0	65	35	0	0	0	0	0	0
0.7	0	6	93	1	0	0	0	0	0
-0.7	0	8	92	0	0	0	0	0	0
0.9	0	0	98	0	2	0	0	0	0
-0.9	0	0	98	0	2	0	0	0	0

$a_t \sim N(0,1)$

(b) ARMA(p,q)

ϕ_1	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.3	4	92	3	1	0	0	0	0	0
-0.3	8	83	2	1	0	0	0	0	1
0.5	0	83	16	0	0	0	0	0	1
-0.5	0	83	10	1	0	0	0	0	1
0.7	0	2	97	0	0	0	0	0	1
-0.7	0	6	94	0	0	0	0	0	0
0.9	0	1	98	0	0	0	0	0	1
-0.9	0	1	99	0	0	0	0	0	0

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$

表3.2.2 最終確認模型次數分配表—PKK ; 真實模型—MA(2)

(a) ARMA(p,q)

θ_1, θ_2	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.3;0.4	25	21	1	49	3	0	0	0	0
-0.3;0.4	20	30	0	46	3	0	1	0	0
-0.3;-0.4	5	24	34	37	0	0	0	0	0
0.3;-0.4	6	26	31	37	0	0	0	0	0
1.42;-0.73	0	0	0	66	16	0	10	4	4
-1.42;-0.73	0	0	0	72	10	0	12	2	4
1.8;-0.9	0	0	0	27	25	0	9	4	35
-1.8;-0.9	0	0	0	23	12	0	11	9	45

$a_t \sim N(0,1)$

(b) ARMA(p,q)

θ_1, θ_2	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.3;0.4	12	11	0	71	4	0	1	0	1
-0.3;0.4	11	13	0	69	4	1	0	0	2
-0.3;-0.4	2	16	50	29	2	0	0	0	1
0.3;-0.4	3	19	53	22	2	0	0	0	1
1.42;-0.73	1	0	0	78	5	4	5	3	4
-1.42;-0.73	1	0	0	78	6	3	4	2	6
1.8;-0.9	1	0	0	61	7	0	7	4	20
-1.8;-0.9	1	0	0	67	2	0	6	1	23

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$

表3.2.3 最終確認模型次數分配表—PKK ; 真實模型—ARMA(1,1)

(a) ARMA(p,q)

Φ_1, θ_1	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.8;0.5	7	46	33	12	2	0	0	0	0
-0.8;0.5	0	0	9	1	83	7	0	0	0
-0.8;-0.5	9	44	42	2	3	0	0	0	0
0.8;-0.5	0	0	9	2	82	6	0	0	1
0.8;0.7	72	24	3	1	0	0	0	0	0
-0.8;0.7	0	0	0	0	64	33	3	0	0
-0.8;-0.7	72	21	5	2	0	0	0	0	0
0.8;-0.7	0	0	2	1	57	35	3	1	1

$a_t \sim N(0,1)$

(b) ARMA(p,q)

Φ_1, θ_1	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.8;0.5	8	53	34	5	0	0	0	0	0
-0.8;0.5	0	0	7	0	83	9	1	0	0
-0.8;-0.5	6	42	48	2	1	0	0	0	1
0.8;-0.5	0	0	9	1	83	4	2	1	0
0.8;0.7	82	14	3	1	0	0	0	0	0
-0.8;0.7	0	0	1	0	61	35	2	0	1
-0.8;-0.7	71	25	2	2	0	0	0	0	0
0.8;-0.7	0	0	0	2	57	37	4	0	0

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$

ARMA(p,q)

$\Phi_1; \theta_1$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.8;0.5	7	46	33	12	2	0	0	0	0
-0.8;0.5	0	0	9	1	89	0	1	0	0
-0.8;-0.5	9	44	42	2	3	0	0	0	0
0.8;-0.5	0	0	9	2	87	1	0	0	1
0.8;0.7	72	24	3	1	0	0	0	0	0
-0.8;0.7	0	0	0	0	96	1	3	0	0
-0.8;-0.7	72	21	5	2	0	0	0	0	0
0.7	0	0	2	1	89	3	3	1	1

$a_t \sim N(0,1)$

表3.2.4 最終確認模型次數分配表—PKK；真實模型—ARMA(1,1)

ARMA(p,q)

$\Phi_1; \Phi_2$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	O.W.
0.3;0.4	1	4	14	54	16	11	0	0	0
-0.3;0.4	0	4	18	48	12	16	2	0	0
-0.3;-0.4	9	42	1	41	0	7	0	0	0
0.3;-0.4	8	39	0	42	0	11	0	0	0
1.42;-0.73	0	0	0	0	21	77	1	1	0
-1.42;0.73	0	0	0	0	19	78	2	1	0
1.8;-0.9	0	0	0	0	0	94	0	5	1
-1.8;-0.9	0	0	0	0	0	94	2	4	0

$a_t \sim N(0,1)$

表3.2.5 最終確認模型次數分配表—PKK；真實模型—AR(2)

註：表3.2.1至表3.2.3中配適模型之先後順序為：

AR(0)→MA(1)→AR(1)→MA(2)→AR(2)→ARMA(1,1)
→ARMA(1,2)→ARMA(2,1)

而表3.2.4至表3.2.5中配適模型之先後順序為：

AR(0)→MA(1)→AR(1)→MA(2)→ARMA(1,1)→AR(2)
→ARMA(1,2)→ARMA(2,1)

非高斯時間序列選模法之比較

表3.3.1 最終確認模型次數分配表-AIC & BIC ; 真實模型-AR(1)

(a)		ARMA(p,q)							
Φ_1		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.3	0.3	4	29	42	11	4	7	1	2
	-0.3	18	28	49	3	1	0	1	0
0.5	0.5	0	10	56	15	6	9	4	0
	-0.5	0	11	78	6	1	1	3	0
0.7	0.7	0	0	67	5	6	10	11	1
	-0.7	0	0	93	3	0	2	2	0
0.9	0.9	0	0	70	4	9	9	7	1
	-0.9	0	0	94	3	1	2	0	0
0.3	0.3	0	0	72	0	8	8	11	1
	-0.3	0	0	97	0	1	1	1	0
0.5	0.5	0	0	77	0	7	7	9	0
	-0.5	0	0	96	0	1	3	0	0

$a_t \sim N(0,1)$

(b)		ARMA(p,q)							
Φ_1		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.3	0.3	0	0	6	0	91	0	1	2
	-0.3	1	1	52	0	46	0	0	0
0.5	0.5	0	0	6	0	92	0	1	1
	-0.5	0	0	53	0	46	0	1	0
0.7	0.7	0	0	8	1	90	0	1	0
	-0.7	0	1	53	0	46	0	0	0
0.9	0.9	0	0	5	0	94	0	0	1
	-0.9	0	1	52	0	47	0	0	0
0.3	0.3	0	0	6	0	88	0	2	4
	-0.3	0	1	54	1	44	0	0	0
0.5	0.5	0	0	6	0	91	0	1	2
	-0.5	0	0	51	0	48	0	0	1
0.7	0.7	0	0	5	0	90	0	2	3
	-0.7	0	0	55	0	43	0	1	1

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$

表3.3.2 最終確認模型次數分配表-AIC & BIC ; 真實模型-MA(2)

(a)		ARMA(p,q)							
θ_1, θ_2		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.3;0.4	0.3;0.4	0	1	0	67	2	3	20	7
	-0.3;0.4	3	4	0	75	4	5	7	2
0.3;-0.4	0.3;-0.4	0	0	0	59	3	3	22	13
	-0.3;-0.4	2	5	0	66	6	4	10	7
0.3;0.4	0.3;0.4	0	1	5	70	7	8	7	2
	-0.3;0.4	2	1	15	68	4	5	4	1
1.42;-0.73	1.42;-0.73	0	1	3	65	8	11	10	2
	-1.42;-0.73	2	1	15	58	9	8	6	1
1.8;-0.9	1.8;-0.9	0	0	0	46	3	0	27	24
	-1.8;-0.9	0	0	0	53	3	1	24	19
0.3;0.4	0.3;0.4	0	0	0	45	2	0	27	26
	-0.3;0.4	0	0	0	51	2	0	25	22
0.8;0.5	0.8;0.5	0	0	1	30	31	0	17	21
	-0.8;0.5	0	0	1	31	31	0	17	20
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	1	28	34	0	20	17
	-0.8;-0.5	0	0	1	30	35	0	18	16

$a_t \sim N(0,1)$

(b)		ARMA(p,q)							
θ_1, θ_2		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.3;0.4	0.3;0.4	0	1	0	0	17	0	19	63
	-0.3;0.4	0	1	0	0	11	39	0	7
0.3;-0.4	0.3;-0.4	0	0	1	3	15	0	13	68
	-0.3;-0.4	0	0	1	11	35	0	6	47
0.3;0.4	0.3;0.4	0	0	1	1	51	0	17	30
	-0.3;0.4	0	0	7	5	77	0	4	7
1.42;-0.73	1.42;-0.73	0	0	1	2	61	0	15	21
	-1.42;-0.73	0	0	8	7	80	0	3	2
1.8;-0.9	1.8;-0.9	0	0	0	28	5	0	38	29
	-1.8;-0.9	0	0	0	38	5	0	30	27
0.8;0.5	0.8;0.5	0	0	1	36	6	0	41	16
	-0.8;0.5	0	0	1	45	7	0	32	15
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	1	42	17	0	25	15
	-0.8;-0.5	0	0	1	42	17	0	25	15
0.8;0.7	0.8;0.7	0	0	1	46	16	0	30	7
	-0.8;0.7	0	0	1	49	17	0	26	7

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$

表3.3.3 最終確認模型次數分配表-AIC & BIC ; 真實模型-ARMA(1,1)

(a)		ARMA(p,q)							
Φ_1, θ_1		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.8;0.5	0.8;0.5	4	6	27	5	18	19	17	4
	-0.8;0.5	8	8	48	3	16	13	2	2
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	1	0	15	16	47	21
	-0.8;-0.5	0	0	3	0	32	21	31	13
0.8;0.7	0.8;0.7	4	3	26	3	18	24	15	7
	-0.8;0.7	7	3	53	1	20	10	3	3
0.8;-0.7	0.8;-0.7	0	0	3	1	14	19	48	15
	-0.8;-0.7	0	0	4	2	32	21	29	12
0.8;0.7	0.8;0.7	32	14	25	4	6	11	2	6
	-0.8;0.7	68	5	19	1	3	4	0	0
0.8;-0.7	0.8;-0.7	0	0	0	0	1	2	68	31
	-0.8;-0.7	0	0	0	0	2	2	65	31
0.8;0.5	0.8;0.5	39	8	17	5	7	15	5	4
	-0.8;0.5	66	4	17	1	6	6	0	0
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	0	0	0	2	58	40
	-0.8;-0.5	0	0	0	1	4	9	54	32

$a_t \sim N(0,1)$

(b)		ARMA(p,q)							
Φ_1, θ_1		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(1,1)	(1,2)	(2,1)
0.8;0.5	0.8;0.5	0	0	0	0	85	0	0	15
	-0.8;0.5	1	0	16	0	77	0	0	6
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	0	0	21	0	4	75
	-0.8;-0.5	0	0	0	0	57	0	3	40
0.8;0.7	0.8;0.7	0	0	0	1	79	0	0	20
	-0.8;0.7	0	0	12	1	84	0	0	3
0.8;-0.7	0.8;-0.7	0	0	0	0	28	0	0	72
	-0.8;-0.7	0	0	0	0	64	0	0	36
0.8;0.7	0.8;0.7	2	0	1	0	91	0	0	6
	-0.8;0.7	25	0	16	0	55	0	0	4
0.8;-0.7	0.8;-0.7	0	0	0	0	5	0	7	88
	-0.8;-0.7	0	0	0	0	8	0	7	85
0.8;0.5	0.8;0.5	0	0	2	0	89	0	0	9
	-0.8;0.5	16	0	25	0	54	0	0	5
0.8;-0.5	0.8;-0.5	0	0	1	0	7	0	10	82
	-0.8;-0.5	0	0	1	0	13	0	8	78

$a_t \sim \text{Cauchy}(0,1)$