

模糊眾數及其在教育與心理評量分析之應用

林原宏 鄭舜仁 吳柏林

國立台中師範學院教育測驗與統計所

正修技術學院企管系

國立政治大學應用數學系

摘 要

就教育統計實務而言，諸多的決策、評量或評鑑的目的，是透過調查或問卷等方式，尋求大眾的共識。研究上常見調查或問卷之方式，是強迫人們採用二元邏輯的思考方式，對所討論的議題給予單一的選擇，而且利用傳統統計眾數的計算方法，表達大眾對此問題的共識，卻忽略了人類本身在思考邏輯與對事物的認知上，所具有的模糊特性。故在考慮此類屬性的問題時，利用隸屬度函數與模糊統計分析會是一種較為進步的測度方法。本文首先提出模糊眾數的定義及其一些相關性質與證明。並經由這些性質的討論和資料分析與解釋，將其應用於人類思維測度上。期能將大眾的想法更精確合理地表達出來。最後在結論和分析中，提出未來實務和進一步研究之建議。

關鍵詞：二元邏輯，心理測驗，模糊眾數，隸屬度函數。

美國數學會分類索引：主要62-07。

1. 前言

人類的思維，主要是來自於對自然現象和社會現象的主觀意識，而人類的知識語言也會因本身的主觀意識、時間、環境和研判事情的角度不同而具備模糊性。模糊理論的產生即是參考人類思維方式，對訊息以模糊測度與分類原理，給予較穩健的描述方式，以處理多元複雜的曖昧和不確定現象。人類思維有兩類，一為形式化思維 (formal thinking)，另一為模糊思維 (fuzzy thinking)；前者是有邏輯性和順序性的思考，而後者則是全體性和綜合性的思考 (池太寧，民 86)。當面臨決策判斷而進行思考時，基於形式化思維的二元邏輯，常很難表示出人類思考的多元邏輯特性。

模糊理論是以模糊邏輯為基礎，將傳統數學邏輯觀念做一個擴充。對於元素和集合的關係，古典集合以特徵函數 (characteristic function) 辨識，即 $I(x) = 1, \text{ if } x \in A; I(x) = 0, \text{ if } x \notin A$ 。

雖然古典集合在數理科學上建立一套相當有系統邏輯的，但是，若將此集合關係應用於描述某些實務現象時，常發現不合理的情形，因為某些現象並不一定存在「非此及彼」的關係。例如，進行某一教學單元後，將班級的學生劃分成「精熟」和「不精熟」兩類，這樣的劃分很明顯的有不合理之處，因為學生的精熟度並非是二元的現象，而是有各種不同精熟程度連續性之特性。自 Zadeh (1965) 提出模糊理論以來，此思維可解釋許多實務現象，模糊理論將元素和集合之間的關係，以介於 $[0, 1]$ 之間的隸屬度 (membership) 描述。

定義 1.1：模糊集合

令 U 表示全域 (universal set)， u 為一對應到 $[0, 1]$ 間的實數函數，即 $u: U \rightarrow [0, 1]$ 。 U 之模糊子集合 A 的隸屬函數記為 $u_A(x)$ ，表示元素 x 隸屬於模糊集合 A 的程度。則在離散 (discrete) 的情形下，模糊集合 A 可表示成：

$$A = \frac{u_A(x_1)}{x_1} + \frac{u_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{u_A(x_n)}{x_n},$$

$\frac{u_A(x_i)}{x_i}$ 表示元素 x_i 隸屬於模糊集合 A 的程度。當 U 為連續時，模糊集合 A 可表示成：

$$A = \int_{x \in A} \frac{u_A(x)}{x}。$$

模糊理論和機率理論都是研究不確定性的問題 (Zimmermann, 1991)，在阮亨中、吳柏林 (2000); Manton, Woodbury 和 Tolley (1994) 等書籍中，說明許多有關以模糊理論進行統計分析的方法和概念。而 Guarisom, Rizzoli 和 Werthner (1992); Kosko (1993); Lowen (1990); Ruspini (1991); Tseng 和 Klein (1992) 及 Wu 和 Sun (1996) 則提出許多模糊理論在社會科學計量的重要觀念與方法。向殿政男 (1992) 認為，要瞭解模糊的意義，須從模糊的相反詞明確來做反向思考。

明確的意義指的是能夠在「是」或「否」之間做一個選擇，若利用數字 1 與 0 來表示，明確的回答方式即是清楚的指出答案是 1 或 0。意思就是說不是「成立」就是「不成立」，中間完全沒有灰色地帶，如果有「屬於 1 也可不屬於 1」的情況，則稱之為矛盾，這就是所謂的「排中律」。然而在真實的世界中，這種「屬於 1 也可不屬於 1」的情況可得到許多事例支持，而且並不見得是矛盾，例如：「他可說很聰明也有點不聰明」或「她有點美但又不太美」等，由此可見模糊理論應該比較符合我們所處的世界。

而在社會科學研究中，一些基本的統計參數，如平均數、中位數及眾數等，在分析資料時，因為能夠簡單且快速地描述資料的基本結構，已在很多領域被廣泛應用，其中又以平均數最常見。然而在某些公共議題上，特別是當我們迫切地想了解研究對象的看法或共識 (consensus) 時，使用眾數會比平均數要來得恰當。但由於傳統統計的眾數，僅是限於單一值的統計量，無法表現出人類思維及主觀意識的複雜性，爲了要將人類思維做更合理且精確的描述，發展模糊統計量是迫切需要的。

近年來，鑑於教育普及與民主意識提高，許多實務上重要的議題，涉及社會利益，均需尋求大眾的共識，以作為決策參考。而目前教育與心理領域有關決策與評量的過程，亦常需尋求大眾的意見。例如多元化評量觀點，評量任務的是由教師、學生、同儕及家長等共同參與。因此，如何能合理地表達教師、學生等的真正內心感受或態度是非常重要的。基於此，本研究提出

模糊衆數的定義並證明一些相關性質，並以多元化評量、教科書評選、九年一貫課程等教育與心理評量資料爲分析實例，期能將模糊衆數應用於教育與心理測驗實務，更爲合理且完善地表達出資料的訊息。

2. 文獻探討

2.1 感覺測度 (perception measure) 的軟計算

人類的感覺是模糊的，當有人說今天天氣有點冷時，究竟他對於「冷」的定義爲何？多少度的溫度範圍可以稱爲「冷」呢？對於這樣的問題，雖然溫度的數值是客觀存在的，但每個人的回答皆因其主觀感覺而有不同。當有人問你今天的心情好不好時，但人的心情實難以用好 (1) 或不好 (0) 來完全分隔清楚。所以人類在做判斷時，要明確地決定是或不是，實難以做到，因爲在最自然的狀態下，答案幾乎都是模糊的。

思維的邏輯也常是模糊的，因爲即使在條件或資料不明確下，依然能夠憑直覺來推論研討。例如有人建議下雨時，車子容易打滑，所以要減低速度，然而，若只是下一點小雨，亦知不減速也無妨，但若下的是傾盆大雨，則不減速就不行了。諸如此類的判斷，對人們來說是極自然的，若要藉由二元邏輯來推論，則有問題存在，所以若去除所有的模糊性，則人類的邏輯很難運作。

從過去講求嚴謹精密原則的觀點來看，常將「未知部分」視爲毫無關連而不予考慮，或是假設一個適當的常數值，將其模式化。若採此方式，那些模式化的資料，無論怎麼解析嘗試，還是無法掌握到其真正的型態，甚至得出與本質完全無關的結論。所以，未知的部分還是應該當作未知的部分處理。雖然目前尚無妥善的方法來解決，但從以上的論述中，可觀察出模糊測度的必要性了。

2.2 相關研究文獻探討

以下針對模糊理論在社會科學中，評述與本文有關之教育與心理計量、評鑑與決策共識計算、問卷量表等方面研究文獻。

2.2.1 教育與心理計量方面

模糊理論應用於教育與心理計量的研究取向，提供資料分析另一新的觀點。Law (1996, 1997); Yen (1996) 和羅昭強 (民 89) 利用模糊隸屬度函數的定義關係，用於數學教育指標系統的建立。鄭景俗、楊國隆 (民 87) 的研究中，則針對 Law (1996, 1997) 的模式，加入評分者樂觀特性的指標，使得評分更能貼切地符合人類心理的決策特性。

林原宏 (民 91) 以模糊多準則決策 (fuzzy multi-criteria decision making) 的方法，應用於學生學習成就的評量，並加入評量者評分嚴苛度指標。何偉雲 (民 84) 以「三相模糊統計方法」對學生的學習成就做模糊評判，以三個常態模糊數來區分出三種不同的學習成就，而其模糊數的決定，乃是根據試驗統計的機率分佈之實證統計參數 (statistical parameter)。

張鈿富、孫慶 (民 82) 討論學習成就模糊分析之可能性，該文對於模糊理論應用於現行學校的學科之學習評量，具有計分參考的價值。曾煥雯 (民 86) 論述模糊理論的評估法則，以及解模糊化 (defuzzied) 方法，提出植基於模糊理論之技能評量模式。

Costas, Maranon 和 Cabrera (1994); Hesketh, Pryor, Gleitzman 和 Hesketh (1988) 以模糊量表的設計作為測量態度的依據，並發展可資應用的測量工具。

根據以上有關模糊理論在教育與心理計量可知，往昔以機率觀點來進行此方面分析，在數學模式上雖試圖以簡馭繁，但以二元邏輯的觀點將樣本分類，但卻未考慮人類思維的特性 (吳柏林，民 85)。因此，以模糊理論進行教育與心理的計量分析，是可行的另類思考方向。

2.2.2 教育評鑑與決策方面

在現今訊息多元且尊重大眾意見的時代，評鑑 (evaluation) 或決策 (decision-making) 的依據是「將多元的意見訊息，以簡馭繁地取得共識」。由於人的意見思維具模糊性，所以近年來有關以模糊理論應用於改進決策方法的文獻相當多。有關模糊決策的研究，應源自於 Bellman 和 Zadah (1970) 的「模糊環境下的決策」 (decision-making in a fuzzy environment) 之主題。Bagnoli

和 Smith(1998) 認為模糊理論適用於人類大多數的決策及評估過程，描述其不確定性的行為。以下僅就教育評鑑與決策方面的研究與方法論簡要論述。

在教育實務方面，王元仁(民 89) 調查業界對品管人員所需具備之工作能力項目，計算專科學校各項品管課程單元相對於這些工作能力的重要程度，將課程單元的重要性以模糊數的模糊積分值 (fuzzy integral) 來排序。王鵬華、吳昭彥(民 85) 以 α -cut 運算之後的閉區間 (closed interval) 為演算法則，提出斜率變動平移法 (slope-change method)，並以高等教育的就讀選擇為例，演示其模糊多準則決策的計算過程。李伯超(民 87) 進行問卷調查以獲得學生對學校的需求和其權重，接著再將模糊數解模糊化的排序方法，決定要滿足學生的需求，加強哪些行政措施及教學方案。

在模糊決策的方法論方面，陳振東(民 87) 設定一個決策者的共識條件 (consensus condition)，以及考慮決策者樂觀及悲觀傾向的人格特質，定義排序指標。陳妙珍、顏上堯、林忠機(民 85) 以特徵向量法 (eigenvector method)，求得各準則之權重，並用連結法 (conjunctive method) 進行各被評項目的排序，發展出一套股票評選的模式。Kacprzyk, Fedrizzi 和 Nurmi(1992); Tanino (1984); Xu 和 Zhai (1992) 等相關研究中，利用參與決策者個人的模糊偏好關係 (individual fuzzy preference relation)，進而求得團體的偏好關係。Chen 和 Hwang (1992) 提出模糊多屬性決策 (fuzzy multi-attribute decision making) 的諸多方法，並論述八種常見的模糊語意變數。Herrera, López, Mendaña 和 Rodríguez (2001) 依據語意雙目標的演化演算法 (linguistic biobjective genetic algorithm) 提出一個人力管理的語意決定模式 (linguistic decision model)，以便減少不適任職務所引起的人事管理上之風險。Chen (2000) 針對模糊環境中，發展出羣體模糊決策的 TOPSIS 擴展模式。Diakoulakim 和 Koumoutsos(1991); Goumas 和 Lygerou (2000) 針對決策過程中模糊資料，就決策方案 (project) 的排序，提出 PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation) 的模糊決策之擴張模式。除了提出此擴張模式外，此研究中並以能源的決策實例進行分析。Herrera, Viedma 和 Verdegay (1996) 則發展共識模式 (consensus model) 的模糊語意羣體決策分析方法，提出「語意共識程度」與「語意距離」的定義與計算方式。Kacprzyk (1986) 以模糊語意優勢 (fuzzy linguistic majority) 的概念，提出羣體決策 (group decision

making) 的解答方式，對於模糊綜合評估領域值得進一步應用和推廣。

根據以上相關文獻可知，教育決策與評鑑過程涉及模糊思維的判斷。而決策與評鑑方法是否能適切地呈現思維的本質，應是一個深思的問題。所以，有關教育決策與評鑑方法，應反思傳統機率觀點的適切性，從以上文獻亦可知模糊觀點的思維測度是個可行的分析方法。

2.2.3 問卷量表分析

傳統問卷量表的選項是「非此則彼」的單一選擇方式，基於模糊思維觀點，針對問題的回答，較適宜以「既此又彼」的多點選擇方式，以下簡述有關模糊理論在問卷量表分析的相關研究。

劉天賜(民 81)認為問卷或量表是用來當作對心理感受認知的一種評估，模糊理論可用來進行此心智性的評估。吳柏林(民 83)、吳柏林、楊文山(民 86)認為傳統問卷的敘述法是基於單一邏輯，可能使填答者無所適從，而模糊統計受到重視，這是複雜的人文社會現象無法以傳統數值模型解釋的一種自然發展結果。

鄭勝元(民 87)、吳珮菁(民 88)比較模糊和傳統的問卷實例研究中，可看出模糊問卷得到較多重要可靠的訊息。而其研究中認為模糊統計量的定義相當分歧，如何將語意變數語和模糊統計量作一整合性架構，是未來研究的重要方向之一。陳昭宏(民 87)運用模糊關係(fuzzy relation)和模糊轉換法(fuzzy transformation)，使所有問卷填答者之模糊評量轉換至與分析者相同之評量詞模糊空間，使所有問卷填答者之調查結果在一相同之評量標準進行統計。王景南、王金城(民 89)利用模糊的概念，允許受訪者在數個選項中填寫百分比，並進一步建構教練與球隊適配的模糊指標，及定義出教練與球隊適配的互動優劣警訊燈號。此模糊問卷確實能夠評量出教練與球隊互動性之優劣。

徐村和、朱國明、詹惠君(民 88)應用模糊語意評量於顧客滿意度調查，發現效果較傳統分析為佳。陳俊學(民 89)將模糊理論中的隸屬函數導入問卷中的語意變數。在其實證研究中，發現不同類型語意變數隸屬度函數的信度比李克特氏的配分具有較高。葉晉嘉(民 87)提出改良式模糊德菲法(improved fuzzy Delphi method)，並且應用政策論證的研究上。其研究透過專家訪談後

所填答的「傳統問卷」和「模糊問卷」所形成的專家共識區間，來比較兩份問卷的差異性和優劣性，結果發現模糊問卷所獲得的訊息分析較傳統問卷分析的方式為佳。溫宏洋（民 83）比較三種模糊問卷效果，此三種問卷分別為：選定該敘述的隸屬度、選定該敘述最恰當的隸屬度函數、直接繪出隸屬函數，實證研究以第三種為佳。

Liang 和 Wang (1991) 對於居住地區選擇的有關研究中，亦透過模糊語意的計量方式，就受訪者對於指標的重要性，以五點模糊語意尺度衡量之。Costas, Maranon 和 Cabrera (1994) 繼 Hesketh, Pryor, Gleitzman 和 Hesketh (1988) 所進行的 FGRS(Fuzzy Graphic Rating Scale) 的量表研究後，再以 100 名大學生為例進行研究，發現 FGRS 非常符合人類的心理特質。

Herrera 和 Herrera-Viedma (2000) 提出語意訊息 (linguistic information) 下的語意決定分析 (linguistic decision analysis) 之步驟。其論述中認為以模糊數來表達語意有其可行之處。Liu 和 Song (2001) 發展一種語意近似 (semantic proximity) 的度量方法，基於語意近似的概念，提出模糊結合度 (fuzzy association degree) 的計算公式，可比較兩個模糊語意集合間的距離。在其公式之計算與證明中，可知其意義是合理且有效的。

Carlsson 和 Fuller (2000a, b); Chiang, Chow 和 Wang (2000); Dubois 和 Prade (1991); Herrera, Herrera-Viedma 和 Martínez (2000) 對於模糊語意的資料分析演算方面論述頗多，也值得實務應用方面多加推廣。根據前文數節所述的相關研究文獻，可得下列結論：

- (一) 傳統統計學的機率測度之尋求共識的方法，有不足與缺失之處。基於人類的模糊思維特性，以模糊衆數進行共識之測度量化的方法，值得深究與探討。
- (二) 以模糊理論來進行態度或感受之測度，是近年來相當重要的方法論，有關的學術領域探究相當多。但較之其他研究領域，教育與心理計量在這方面的著墨仍屬不多。

基於以上的研究文獻之綜合歸納，可知本研究嘗試進行模糊衆數的理論探究與實例探究，是一個可行方向且有其重要性。

3. 模糊眾數的理論與性質

在社會科學的研究中，我們爲了想了解大眾對於某些特定議題的想法，常會利用投票或抽樣調查的方式來評量。傳統的投票規則強迫我們去做一抉擇，而在問卷調查中，也常遇到同樣的情況，爲了便於利用統計分析，問卷最常使用李克特量表的評量方法，將問項的選擇均分爲三等或五等分，例如「政黨輪替滿一週年，你覺得新政府過去這一年來的表現如何？(1) 非常滿意(2) 滿意(3) 普通(4) 不滿意(5) 非常不滿意」，當問題答案是屬於連續型時，問卷調查的方式便是先限定尺距，再讓受訪者從中選擇。例如「請問你心目中理想的薪資爲多少？」、「請問你一天約睡幾個小時？」、「請問你覺得適婚年齡是幾歲？」等，然而諸如此類的問題，若不利用模糊理論，很難合理地描述察覺或感受。

3.1 模糊數

隸屬度函數的概念引入

對於傳統集合的二分法與人類思維模式出入頗大，如利用隸屬度函數能夠得到較爲合理的答案。如果教師認爲成績 100 分絕對屬於「優良」，則其隸屬度函數值自然屬於 1，而成績 80 分或 90 分的隸屬度函數值則約等於 0.8，此表示成績 80 分或 90 分屬於「優良」的程度有 0.8 之多。根據隸屬度函數的定義，我們可繪出模糊集合「優良」的隸屬度函數。與傳統集合的特徵函數比較，隸屬度函數似乎是將特徵函數予以平滑化。此外，隸屬度函數讓每個評分層都擁有一個介於 0 到 1 之間的值，來代表屬於「優良」的程度。相較於傳統集合的特徵函數，在描述模糊的概念時，利用模糊集合的隸屬度函數來解釋，是更適當的。首先定義模糊數如下。

定義 3.1：模糊數

設 U 爲一論域，令 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 爲論域 U 的因子集。假若佈於論域 U 之一述句 X 其相對於因子集的隸屬度函數以 $\{\mu_1(X), \mu_2(X), \dots, \mu_n(X)\}$ 表示，則述句 X 的模糊數爲：

$$\mu_U(X) = \frac{\mu_1(X)}{A_1} + \frac{\mu_2(X)}{A_2} + \cdots + \frac{\mu_n(X)}{A_n}。$$

例 3.1：一天運動時間的模糊數表示

假設 X 為中學生一天運動幾個小時，以模糊數表示為 $\mu_U(X)$ ，論域 U 可視為整數論域，即是運動時數。設 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， X : 一天運動時間模糊數的隸屬度函數為 $\{\mu_1(X) = 0.25, \mu_2(X) = 0.6, \mu_3(X) = 0.1, \mu_4(X) = 0.05, \mu_5(X) = 0.25\}$ 。則 X : 一天運動幾個小時的模糊數可表示為：

$$\mu_U(X) = \frac{0.25}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0.05}{4} + \frac{0.25}{5}。$$

3.2 模糊眾數

傳統眾數在統計學上是指大多數人的意見，但由於每個人對論域因子的看法通常並不明晰。例如，對明天股市的預測「比較有可能漲，但也有可能跌」或對相貌的形容「有點美，又不太美」等，而且這種情況非常普遍，因此如何在模糊的概念下獲得統計共識是相當重要的。

傳統的統計方法得到單一的數值資料或確定的等距尺度，較難充分反應人個人的想法。若能讓受訪者根據自己的意識，利用隸屬度及區間數值表達心中對於問項真正屬意的程度，則可更完整的傳達人類真實的思維。以下分別就離散與連續兩類模糊眾數做一探討，離散型的模糊眾數比連續型簡單，且計算亦不像連續型複雜。當問項具模糊性且論域因子可明顯區分為數類，則可利用離散型模糊眾數求得此一議題之共識。

定義 3.2.1：離散型模糊眾數（樣本為離散型）

設 U 為一論域，令 $\{L_j, j = 1, 2, \dots, k\}$ 為佈於論域 U 上的 k 個語言變數， $\{S_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 為一組模糊樣本，且對每個樣本 S_i 對應語言變數 L_j 給予一標準化之隸屬度 m_{ij} ($\sum_{j=1}^k m_{ij} = 1$)。令 $T_j = \sum_{i=1}^n m_{ij}$, $j = 1, \dots, k$ 。則我們稱擁有最大的 T_j 值之 L_j 為模糊眾數 (FM, fuzzy mode)，即 $FM = \{L_j | T_j = \max_{j=1, 2, \dots, k} T_j\}$ 。假若存在兩組以上之 L_j 其最大 T_j 值相同，則我們稱此組資料具有多個模糊眾數或是具有多種共識。

定義 3.2.2：離散型模糊眾數（樣本為離散型，考慮選取 α 顯著水準）

若考慮在 α 顯著水準下，定義 3.2.1 離散型模糊眾數可推廣為：設 U 為一論域，令 $\{L_j, j = 1, 2, \dots, k\}$ 為佈於論域 U 上的 k 個語言變數， $\{S_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 為一組模糊樣本，且對每個樣本 S_i 對應語言變數 L_j 給以一標準化之隸屬度 m_{ij} ($\sum_{j=1}^k m_{ij} = 1$)。在 α 顯著水準下，令 $I_{ij} = 1$ 若 $m_{ij} \geq \alpha$ ； $I_{ij} = 0$ 若 $m_{ij} < \alpha$ ， $S_j = \sum_{i=1}^n I_{ij}$ ， $j = 1, \dots, k$ 。則我們稱擁有最大的 S_j 值之 L_j 為模糊眾數 (FM, fuzzy mode)，即 $FM = \{L_j | \forall i \neq j, S_j > S_i\}$ 。假若存在兩組以上之 L_j 其最大 S_j 值相同，則我們稱此組資料具有多個模糊眾數或是具有多種共識。

定義 3.3：連續型模糊眾數（樣本為連續型且為均勻分配）

設 U 為一論域， $S = [a_i, b_i]$ ， $a_i, b_i \in R$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 為論域 U 裡的一組模糊樣本。若存在一點 $x(x \in U)$ 被樣本所覆蓋，其覆蓋 x 之所有樣本為一羣落，且令最大的羣落為 MS 。則模糊眾數為最大的羣落的所有模糊樣本之交集，記為

$$FM = [a, b] = \left\{ \cap [a_i, b_i] \mid [a_i, b_i] \subset MS \right\}。$$

若 $[a, b]$ 不存在（即 $[a, b]$ 為空集合），則我們稱此資料沒有模糊眾數或是無共識；若存在兩組以上覆蓋頻率相同（即 $[a, b]$ 不唯一），則我們稱此組資料具有多個模糊眾數或是具有多種共識。

例 3.2：題庫試題適合度評估

在編製題庫試題過程中，商請學科及教育與心理測驗專家根據其專業，依試題預試結果的試題量化特徵（難度、鑑別度和相關試題參數），尋求專家對於該題適合程度的共識，以進行選題編入題庫。今有 12 位專家，請他們憑藉著專業與經驗，根據預試結果的試題特徵，評估試題編入題庫的適合程度，則： $\{S_i, i = 1, 2, \dots, 12\}$ ， $\{\text{語言變數 } L_j, j = 1, 2, 3, 4\} = \{\text{非常適合、適合、修改後適合、不適合}\}$ 。若眾數為「非常適合」或「適合」，則該題編入題庫，反之則否。此 12 位專家對該題適合程度之隸屬度如表 3.1 所示。

利用傳統眾數方法得知，表 3.2 有兩個眾數，即「適合」、「不適合」各有 4 位。所以，無法決定共識且各僅有 4 位專家，似乎代表性不足而不太合

表3.1 試題適合程度之隸屬度

| 專家 | 適合程度 | | | |
|-------|------|-----|-------|-----|
| | 非常適合 | 適合 | 修改後適合 | 不適合 |
| 1 | 0.5 | 0.4 | 0.1 | |
| 2 | | 0.4 | 0.1 | 0.5 |
| 3 | | 0.9 | 0.1 | |
| 4 | | 0.4 | 0.6 | |
| 5 | 0.4 | 0.6 | | |
| 6 | | 0.9 | | 0.1 |
| 7 | | | 0.4 | 0.6 |
| 8 | | | 0.4 | 0.6 |
| 9 | | 0.4 | 0.6 | |
| 10 | | 0.8 | 0.1 | 0.1 |
| 11 | 0.6 | 0.4 | | |
| 12 | | | 0.4 | 0.6 |
| 隸屬度總合 | 1.5 | 5.2 | 2.8 | 2.5 |

表3.2 試題適合程度之評估

| 專家 | 適合程度 | | | |
|----|------|----|-------|-----|
| | 非常適合 | 適合 | 修改後適合 | 不適合 |
| 1 | √ | | | |
| 2 | | | | √ |
| 3 | | √ | | |
| 4 | | | √ | |
| 5 | | √ | | |
| 6 | | √ | | |
| 7 | | | | √ |
| 8 | | | | √ |
| 9 | | | √ | |
| 10 | | √ | | |
| 11 | √ | | | |
| 12 | | | | √ |

理。若我們利用定義 3.2.1 模糊隸屬度計算，則該題難度的預測結果，評估

為「適合」隸屬度總合 5.2 遠大於其它評估語意隸屬度總合。相較之下，利用模糊眾數應該會比利用傳統眾數要來得客觀，也更能取得專家對該題編入題庫與否之共識。

3.3 有關模糊眾數之性質

統計參數可用來表達母羣體的特性，但某些性質卻很難藉由傳統的統計參數（如：期望值、中位數、眾數等）表達出來。尤其在社會科學研究上，需要確實地表達大眾的看法時，傳統的統計參數便顯得不適用了。以下針對我們所提出的模糊眾數定義，再探討出一些有趣的性質如下。並根據傳統眾數的定義，將此兩種眾數做一個比較。

性質 1：令 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ 為佈於離散論域 U 上之語言（順序）變數， $\{S_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 為一組樣本， m_{ij} 為樣本 S_i 對應語言變數 L_j 之隸屬度。假若每個樣本 S_i 都有一個 $m_{ij} > 0.5$ ，則根據定義 3.2.1，模糊眾數即為一般眾數。

證明：根據定義 3.2.1，樣本 S_i 對應 L_j 之 m_{ij} 為標準化後的隸屬度。當樣本 S_i 對語言變數 L_j 之隸屬度 $m_{ij} > 0.5$ 時，其餘 $m_{ik}, k \neq j$ 必定小於 0.5。根據傳統眾數的意義，若 $m_{ij} = \max_{1 \leq l \leq k} (m_{il})$ ，則依最大隸屬度 (maximum membership) 決策原則，樣本 S_i 選擇語言變數 L_j 。由於每個樣本 S_i 皆選擇語言變數 L_j ，選擇語言變數 L_j 人數最多，所以 L_j 為一般眾數。而對離散型模糊眾數，每個樣本 S_i 都有一個 $m_{ij} > 0.5$ ，所以 $T_j = \sum_{i=1}^n m_{ij}$ 總合最大，亦即 L_j 亦為模糊眾數。故得證。

性質 2：令 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ 為佈於論域 U 上之語言變數， $\{S_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 為一組樣本。若存在一羣樣本，對應於不同的語言變數 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ 有相同且最大之隸屬度。則在此種情況下，傳統眾數可能無法判定；但若依定義 3.2.2，取適當的顯著水準 α ，當樣本 S_i 對應語言變數 L_j 之隸屬度 $m_{ij} \geq \alpha$ 時，則可計算模糊眾數。

說明：當樣本對於兩個以上的選項具有相同程度的喜好時，利用傳統二元邏輯（不是 1，便是 0）並不能將訊息表達出來，所以無法找到眾數。但若利用

隸屬度的概念，便可輕易地表達出喜好的程度，且可根據定義 3.2.2，求解出模糊衆數。

性質 3：我們可藉由調整顯著水準 α ，來控制模糊衆數裡所包含的樣本數。

證明：假設有 n 個樣本，其對應變數 L_j 之隸屬度分別為 $m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{nj}$ ，且 $m_{1j} > \dots > m_{(i-1)j} > m_{ij} > m_{(i+1)j} > \dots > m_{nj}$ 。根據定義 3.2.2，當 m_{nj} 大於顯著水準 α 時，變數 L_j 包含了 n 個樣本的訊息，但若顯著水準 α 大於 m_{ij} 且小於 $m_{(i-1)j}$ ，則變數 L_j 便僅包含了 $(i-1)$ 個樣本的訊息。因此，我們可藉由調整顯著水準 α ，可控制模糊衆數裡所包含的樣本數。

說明：然而過大的 α 值容易造成模糊衆數所包含的樣本數過少，而降低其代表性； α 值取的太小，則會造成模糊衆數裡所包含的樣本，有隸屬度過低的問題。所以 α 值的選取，需針對不同的問題而有所不同，可憑過去經驗亦可根據衆數所需包含的樣本數，反求 α 值。

性質 4：對連續型且呈均勻分配之模糊衆數而言，若以樣本區間的中心點當作樣本的確定值，且中心點來自單峯且對稱分配（如常態分配），則當樣本數夠大時，模糊衆數會包含傳統衆數。

證明：由於樣本中心點來自單峯且對稱分配，故根據傳統衆數的定義，當樣本數夠大時，衆數應會發生在分配的中點。同樣由於樣本中心點來自單峯且對稱分配，所以中心點亦會被最多的樣本（區間）覆蓋，我們稱這組羣落為最大羣落的集合 MS 。故根據定義 3.3，模糊衆數為

$$FM = [a, b] = \left\{ \cap [a_i, b_i] \mid [a_i, b_i] \subset MS \right\}$$

會包含分配中點，即傳統衆數。

4. 模糊衆數在教育與心理測驗實務之應用

本文舉出常見的教育與心理測驗實務相關實例，利用模糊衆數以集聚共

識，並說明其分析和解釋。以下舉出評選教科書、多元化評量和有關九年一貫課程的問題，期望能更確實地反應出人們的實際想法。

4.1 由模糊眾數評選教科書

國中小學教科書採「一綱多本」開放政策已有數年，而選擇教科書亦是教師的專業自主權之一。目前中小學的教科書的選用由學校自行決定，通常學校之作法是由該學年教師共同決定，有些學校商請家長、學生或學者專家與教師共同決定。針對某家出版商教科書，由10位教師填寫問卷評選方式如下：

| 教科書評選 | | | | | | | | | |
|---------------|-----|------|----|------|-------------|-----|------|----|------|
| 模糊問卷 (填寫隸屬度值) | | | | | 傳統問卷 (擇一勾選) | | | | |
| 非常不適用 | 不適用 | 尚可適用 | 適用 | 非常適用 | 非常不適用 | 不適用 | 尚可適用 | 適用 | 非常適用 |
| | | | | | | | | | |

教科書評選的適用程度分為「非常不適用」、「不適用」、「尚可適用」、「適用」、「非常適用」五等，並設計兩份問卷（模糊及傳統）請教師填選。模糊問卷方面，我們請教師根據其本身對適用程度，以0到1之間的小數，給予一隸屬程度（表4.1），而傳統問卷便請受訪者確定勾選一選項（表4.2）。

根據表4.2顯示，10位教師贊成「適用」的人最多（4位）、其次是「尚可適用」（3位）、「不適用」（2位）與「非常適用」（1位）。故根據傳統眾數，在這10位教師的共識即為「適用」。而根據模糊眾數的定義3.2.2且由表4.1可發現，當顯著水準 α 取0.6時，會得到與傳統眾數相同的結果，眾數為「適用」。但若取顯著水準 α 為0.4時，則此評選的最佳共識則為「尚可適用」且包含了6個人的意見，超過了半數。經由此例題發現，利用選擇不同的顯著水準 α ，則可完全包含傳統眾數。故在相較於傳統眾數單純取決於相對多數的情況下，利用隸屬度表達大眾的真正心意以求得模糊眾數，應該是較為客觀的。

表 4.1 教科書模糊評選結果

| 教師 | 評選 | | | | |
|----|-------|-----|------|-----|------|
| | 非常不適用 | 不適用 | 尚可適用 | 適用 | 非常適用 |
| 1 | | | 0.4 | 0.6 | |
| 2 | | | 0.2 | 0.8 | |
| 3 | | 0.6 | 0.4 | | |
| 4 | | 0.2 | 0.8 | | |
| 5 | | 0.3 | 0.7 | | |
| 6 | | | | 0.8 | 0.2 |
| 7 | | | | 1 | |
| 8 | | | | | 1 |
| 9 | | 0.2 | 0.8 | | |
| 10 | | 0.6 | 0.4 | | |

表 4.2 教科書傳統評選結果

| 教師 | 評選 | | | | |
|----|-------|-----|------|----|------|
| | 非常不適用 | 不適用 | 尚可適用 | 適用 | 非常適用 |
| 1 | | | | √ | |
| 2 | | | | √ | |
| 3 | | √ | | | |
| 4 | | | √ | | |
| 5 | | | √ | | |
| 6 | | | | √ | |
| 7 | | | | √ | |
| 8 | | | | | √ |
| 9 | | | √ | | |
| 10 | | √ | | | |

4.2 多元評量之模糊眾數分析

多元化評量是近年來評量的主流思潮，近來相關的研究亦和Gardner(1999)所提出的多元智慧 (multiple intelligence, MI) 互相融合應用 (張美玉，民 90)

。此評量方式可改進傳統紙筆測驗的限制與缺失 (鄒慧英, 民 89), 多元評量項目的主要有教師評量、同儕互評及自評等, 針對學生給予在此多元評量中的表現一個評語或等第。

在多元評量活動中, 常針對評量項目選擇適當評語等級。然而傳統的評量方法強迫評分者給予單一的選擇, 對於評分者的真正屬意程度並無法準確地表現出來。故我們嘗試利用模糊眾數的評量方法, 期望能改進傳統眾數的不足且能更接近評分者的真正心意。下列表格是多元評量項目, 而評量者有教師、同儕和自評。

| 對於上台報告同學的表現, 您覺得如何? | | | | | |
|---------------------|-----|---|----|----|------|
| 項目 | 非常好 | 好 | 普通 | 不好 | 非常不好 |
| 上台報告的態度表現 | | | | | |
| 報告內容準備充分 | | | | | |
| 報告資料內容詳實清楚 | | | | | |
| 正確地回答同學問題 | | | | | |
| 傾聽他人意見的態度 | | | | | |

某位同學上台專題報告後, 針對「上台報告的態度表現」該項, 進行教師 (1 位)、同儕 (8 位) 和自評, 就「上台報告的態度表現」, 設計五個語意評分如下。

| 模糊評量 (填寫隸屬度值) | | | | | 傳統評量 (擇一勾選) | | | | | | |
|---------------|---------|---|--------|--------|-------------|-----|---------|---|--------|--------|----------|
| 評語 | 非常 好 | 好 | 普 通 | 不 好 | 非常 不好 | 評語 | 非常 好 | 好 | 普 通 | 不 好 | 非常 不好 |
| 隸屬程度 | | | | | | 請勾選 | | | | | |

將此教師 (1 位)、同儕 (8 位) 和自評針對「上台報告的態度表現」該項評分之隸屬度記錄如表 4.3, 而表 4.4 則同學對「上台報告的態度表現」該項的確定評語。根據表 4.4 可發現, 10 位評量者對「上台報告的態度表現」評量結果中, 「非常好」與「好」皆有四票, 無法找到評量結果的眾數所在。

但若取顯著水準 α 為 0.4 時，則可明顯地由表 4.3 看出，「好」為此 10 位評量者的模糊眾數，並且包含了 7 位評量者的滿意度。所以我們發現，當評量結果結果可能會產生難以取捨的問題時，利用模糊評量方法應該會是一個比較好的選擇。

表 4.3 上台報告的態度表現模糊評量方法

| 評量者 | 語意 | | | | |
|------|-----|-----|-----|----|------|
| | 非常好 | 好 | 普通 | 不好 | 非常不好 |
| 教師 | 0.6 | 0.4 | | | |
| 自評 | | 0.3 | 0.7 | | |
| 同儕 A | | 0.9 | 0.1 | | |
| 同儕 B | 0.8 | 0.2 | | | |
| 同儕 C | | 0.4 | 0.6 | | |
| 同儕 D | 0.2 | 0.8 | | | |
| 同儕 E | 0.6 | 0.4 | | | |
| 同儕 F | 0.2 | 0.8 | | | |
| 同儕 G | | 0.7 | 0.3 | | |
| 同儕 H | 0.7 | 0.3 | | | |

表 4.4 上台報告的態度表現傳統評量方法

| 評量者 | 語意 | | | | |
|------|-----|---|----|----|------|
| | 非常好 | 好 | 普通 | 不好 | 非常不好 |
| 教師 | √ | | | | |
| 自評 | | | √ | | |
| 同儕 A | | √ | | | |
| 同儕 B | √ | | | | |
| 同儕 C | | | √ | | |
| 同儕 D | | √ | | | |
| 同儕 E | √ | | | | |
| 同儕 F | | √ | | | |
| 同儕 G | | √ | | | |
| 同儕 H | √ | | | | |

4.3 九年一貫課程的國小中年級數學科時數安排

國中小學九年一貫課程已於九十學年度正式實施，其中各年級之各科應授節數，必須匯集教師、專家學者之意見。假設某研究者欲蒐集專家國小中年級數學科每週授課之合理節數，因此選取 30 位教師及學者專家，請其對數學課程訂定一個他們認為合理的節數，以作為九年一貫課程節數分配的考量。所問之問題為「請問您認為國小中年級九年一貫課程數學科每週應授節數為何？」，其設計之問卷為：

| 模糊問卷 | 傳統問卷 |
|------------|------|
| 模糊時數 (,) | 確定時數 |

就以上兩種問卷請受訪者填寫，在模糊問卷中請受訪者隨意填寫一個可接受的節數區間，而傳統問卷則請他們填寫一個確定的節數，故每個樣本皆有模糊時數與確定時數兩筆資料，整理如表 4.5。表 4.5 結果顯示在受訪的 30 名專家學者中，根據傳統眾數，認為 6 節課人數最多且包含 11 位專家。而根據定義 3.3 的方法，由於包含區間 [6, 7] 的樣本點最多，包含了 22 名專家的看法。所以利用模糊眾數求得之可接受授課時間為 6 至 7 節課，故每週 6 至 7 節課應該是個合理的範圍。

表 4.5 學者專家對國小中年級數學科每週應授節數

| | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|---|---|---|---|---|---|---|
| 模糊問卷節數 | 3~5 | 4~7 | 5~7 | 6~9 | 3~8 | 5~10 | 7~10 | | | | | | | |
| 人數 | 2 | 4 | 6 | 3 | 6 | 3 | 6 | | | | | | | |
| 傳統問卷節數 | 6 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 3 | 5 | 6 | 5 | 8 | 7 | 8 |
| 人數 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 |

5. 結論與建議

5.1 結論

社會科學調查中，人類思維是最常想被了解的。過去科學家習慣以簡馭繁，用簡潔的邏輯處理紊亂多變的世界，所以產生了二元邏輯。但是人類的思維邏輯是模糊的，往昔為便於分析資料，簡化了人類思維的複雜性，必定造成了一定程度的失真。讓人類思維得以更合理且完善地表達出來，故發展適當的分析方法是刻不容緩。

本研究提出模糊衆數的定義與應用，期能對人類思維的表達作更合理的分析。經由實例量化分析，可知應用模糊衆數來分析具有模糊性的數值資料，會比利用傳統衆數要來的合理。在尋求共識之目的下，模糊衆數以較合情合理的方法找到「共識」，更顯出其重要的地位。

有關模糊衆數在教育與心理測驗的分析之應用，根據本文的研究，可得下列結論：

- (一) 模糊衆數可呈現研究對象的羣體共識，凡利用語意進行評選或投票進行選擇的方式，以尋求適當的共識時，皆可嘗試以模糊衆數求得。就教育與心理之領域，舉凡評量、課程教材評評選、適當的授課時數皆可應用。其次，評選或決策，是根據某些準則而進行判斷的心理過程，而準則的項目和權重，若根據羣體決策共識而得，亦可以模糊衆數求得該權重。
- (二) 本研究所提的模糊衆數之應用，亦可應用於教師甄試和教學評鑑等教育各實務層面。實際應用者可根據資料是離散型或連續型，進行模糊衆數分析。而離散型方面，可依其研究性質考量，擇用定義 3.2.1 或 3.2.2 之公式。

5.2 建議

本文提出有關模糊衆數統計量之定義性質及其在教育與心理之應用，有關未來進一步研究，包括：

- (一) 無論是離散型模糊衆數或連續型模糊衆數，計算樣本資料與模糊統計分析過程都較傳統衆數計算方式較為複雜。因此若能發展模糊衆數之電腦程式資料分析系統，將可提高效率與應用性。

- (二) 在基本統計參數方面，我們尚可針對模糊期望值 (Heilpern, 1992)、模糊中位數 (見 Galvo and Mesiar, 2001) 與模糊變異數等深入研究，並嘗試各種模糊統計量數信賴區間的估計 (confidence interval estimation) 問題。此外，本文僅提出模糊眾數的定義、性質和實例，未來亦可進一步探究模糊計分的特性，並結合其在心理計量和多變量統計等方面的應用。
- (三) 思維與行為是否一致，可結合心理學專家與語言學家或其它專家做整合深入探討，提供後續研究者參考。
- (四) 未來研究方面，可進行資料模擬 (data simulation) 之探究，以了解模糊語意與變數評量的特色，以及動態共識均衡的過程。
- (五) 信度與效度是教育與心理測驗重要的探討問題，利用模糊眾數於教育與心理評量與評鑑之問題，其信度與效度的衡量方式，亦是一個值得深究之問題。

參考文獻

- 王元仁 (民 89)。以模糊理論建構以技職為導向之課程單元評估模式。教育研究資訊，8，1-12。
- 王景南、王金城 (民 89)。籃球教練與團隊配適性之模糊統計分析。國立編譯館館刊，29，319-338。
- 王鵬華、吳昭彥 (民 85)。模糊多準則決策應用在高等教育之選擇。高雄工學院學報，3，295-304。
- 向殿政男著、劉天祥、佟中仁譯 (民 79)。Fuzzy 理論入門。台北：中國生產力中心。
- 池太寧 (民 86)。模糊概念與模糊語詞。語文建設通訊，51，74-79。
- 何偉雲 (民 84)。學生學習成就的模糊統計分析。屏東師院學報，8，167-180。

- 吳柏林 (民 83)。模糊統計分析：問卷調查研究之新方向。國立政治大學研究通訊，2，65-80。
- (民 85)。社會科學研究中的模糊邏輯與模糊統計分析。中國統計通訊，7，14-27。
- 吳柏林、楊文山 (民 86)。模糊統計在社會調查分析的應用。載於中央研究院中山人文社會科學研究所出版之社會科學計量方法發展與應用，289-316。
- 吳珮菁 (民 88)。模糊統計分析在選情預測之應用。國立政治大學統計研究所碩士論文。
- 李伯超 (民 87)。模糊理論應用於規劃滿足學生需求所需之行政配合。教育研究資訊，6，1-7。
- 阮亨中、吳柏林 (2000)。模糊數學與統計應用。台北：俊傑書局。
- 林原宏 (民 91)。模糊語意變數的多準則評量之研究。國立台中師範學院學報，16，451-470。
- 徐村和、朱國明、詹惠君 (民 88)。廣告業服務接觸與顧客行為意圖關係之研究－模糊語意尺度之應用。東吳經濟商學學報，26，1-25。
- 張美玉 (民 90)。從多元智能的觀點談歷程檔案評量在教育上的應用。教育研究資訊，9，32-54。
- 張鈿富、孫慶民 (民 82)。學習成就評量與模糊模式之分析。國立政治大學學報 (社會科學類上冊)，67，57-73。
- 陳妙珍、顏上堯、林忠機 (民 85)。模糊多屬性決策於股票評選之應用。管理科學學報，13，227-248。
- 陳俊學 (民 89)。模糊理論應用於質性指標之研究。實踐大學企業管理研究所碩士論文。

- 陳昭宏 (民 87)。以 Fuzzy 演算法分析評量用詞對問卷調查之影響。東方工商學報，21，76-82。
- 陳振東 (民 87)。考量決策者樂觀態度傾向的模糊多準則決策方法之研究。管理與系統，7，379-394。
- 曾煥雯 (民 86)。建立植基於模糊理論之技能評量模式。國立台灣師範大學工業教育研究所博士論文。
- 溫宏洋 (民 83)。模糊理論在知識擷取與問卷設計上之應用。國立中山大學資訊管理研究所碩士論文。
- 葉晉嘉 (民 87)。應用模糊理論於公共政策研究。國立中興大學公共行政及政策研究所碩士論文。
- 鄒慧英 (民 89)。國小寫作檔案評量應用之探討。初等教育學報，13，141-181。
- 劉天賜 (民 81)。應用模糊語意於心智性工作負荷評估。國立清華大學工業工程研究所博士論文。
- 鄭勝元 (民 87)。模糊統計在社會調查之應用。國立政治大學統計研究所碩士論文。
- 鄭景俗、楊國隆 (民 87)。模糊集合論在教育評分等級系統之應用。模糊系統學刊，4，81-89。
- 羅昭強 (民 89)。模糊理論在數學科基本能力測驗上的應用。八十九學年度師範學院教育學術論文發表會論文集。新竹市：國立新竹師範學院。
- Bellman, R. E. and Zadah, L. A. (1970). Decision-making in fuzzy environment. *Management Science* 17, 141-164.
- Blin, J. M. (1974). Fuzzy relations in group decision theory. *Journal of Cybernetics* 3, 12-22.

- Galvo, T. and Mesiar, R. (2001). Generalized Medians. *Fuzzy Sets and Systems* **124**, 59-64.
- Carlsson, C. and Fuller, R. (2000a). Benchmarking in linguistic importance weighted aggregations. *Fuzzy Sets and Systems* **114**, 35-41.
- (2000b). Multiobjective linguistic optimization. *Fuzzy Sets and Systems* **115**, 5-10.
- Chen, C. T. (2000). Extensions of TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems* **114**, 1-9.
- Chen, S. J. and Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy multiple attribute decision making - methods and applications*. Germany: Springer-Verlag.
- Chiang, D. A., Chow, L. R. and Wang, Y. F. (2000). Mining time series data by a fuzzy linguistic summary system. *Fuzzy Sets and Systems* **112**, 419-432.
- Costas, C. S. L, Maranon, P. P. and Cabrera, J. A. H. (1994). Application of diffuse measurement to the evaluation of psychological structures. *Quality and Quantity* **28**, 305-313.
- Diakoulaki, D. and Koumoutsos, N. (1991). Cardinal ranking of alternative actions: extension of the PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research* **53**, 337-347.
- Dubois, D. and Prade, H. (1991). Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems* **40**, 143-202.
- Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. New York: Basic Books.
- Goumas, M. and Lygerou, V. (2000). An extension of the PROMETHEE method for decision making in fuzzy environment ranking of alternative

- energy exploitation projects. *European Journal of Operational Research* **123**, 606-613.
- Guariso, G., Rizzoli, A. and Werthner, H. (1992). Identification of model structure via qualitative simulation. *IEEE Trans. on Systems, Man, and cybernetics* **22**, 1075-1086.
- Heilpern, S. (1992). The expected value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems* **47**, 81-86.
- Herrera, F. and Herrera-Viedma, E. (2000). Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems* **116**, 67-82.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E. and Martínez, L. (2000). A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems* **114**, 43-58.
- Herrera, F., Herrera-Viedma and Verdegay, J. L. (1996). A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems* **78**, 73-87.
- Herrera, F., López, E., Mendaña, C. and Rodríguez, M. A. (2001). A linguistic decision model for personnel management solved with a linguistic biobjective genetic algorithm. *Fuzzy Sets and Systems* **118**, 47-64.
- Hesketh, B., Pryor, R., Gleitzman, M. and Hesketh, T. (1988). Practical applications and psychometric evaluation of a computerized fuzzy graphic rating scale. In T. Zetenyi(ed.) New York: North-Holland. *Fuzzy Sets in Psychology*, 425-454.
- Kacprzyk, J. (1986). Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems* **18**, 105-118.

- Kacprzyk, J., Fedrizzi, M. and Nurmi, H. (1992). Group decision making and consensus fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems* **49**, 21-31.
- Kim, K. and Park, K. S. (1990). Ranking fuzzy number with index of optimism. *Fuzzy Sets and Systems* **35**, 140-150.
- Kosko, B. (1993). *Fuzzy thinking : the new science of fuzzy logic*. New York: Hyperion.
- Law, C. K. (1997). A fuzzy logical model to aggregate several heterogeneous educational grades from a reductionist grading scheme. *Proceedings of 8th International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications*.
- (1996). Using fuzzy numbers in educational grading system. *Fuzzy Sets and Systems* **83**, 311-323.
- Liang, G. S. and Wang, M. J. (1991). A fuzzy multicriteria decision making method for facility site selection. *International Journal of Production Research* **29**, 2313-2330.
- Liu, W. Y. and Song, N. (2001). The fuzzy association degree in semantic data models. *Fuzzy Sets and Systems* **117**, 203-208.
- Lowen, R. (1990). A fuzzy language interpolation theorem. *Fuzzy Sets and Systems* **34**, 33-38.
- Manton, K. G., Woodbury, M. A. and Tolley, H. D. (1994). *Statistical applications using fuzzy sets*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Ruspini, E. (1991). Approximate Reasoning: past, present, future. *Information Sciences* **57**, 297-317.
- Tanino, T. (1984). Fuzzy preferences orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems* **12**, 117-131.

- Tseng, T. and Klein, C. (1992). A new Algorithm for fuzzy multicriteria decision making. *International Journal of Approximate Reasoning* **6**, 45-66.
- Wu, B. and Sun, C. (1996). Fuzzy statistics and computation on the lexical semantics. *Language, Information and Computation (PACLIC 11)*, 337-346. Seoul, Korea.
- Xu, R. N. and Zhai, X. Y. (1992). Extensions of the analytic hierarchical process in fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems* **52**, 251-257.
- Yen, C. L. (1996). Using fuzzy sets in developing mathematical learning progress indicator. *The proceedings of National Science Council (part D)* **6**, 57-64.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control* **8**, 338-353.
- Zimmermann, H. J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Boston: Kluwer Academic.

[民國91年10月15日收稿，民國92年3月30日接受。]

Application of Fuzzy Mode to Educational and Psychological Assessment Analysis

Yuan-Horng Lin Shuenn-Ren Cheng Berlin Wu

Graduate School of Educational Measurement and Statistics

National Taichung Teachers College

Department of Business Administration

Cheng-Shiu Institute of Technology

Department of Applied Mathematics

National Chengchi University

ABSTRACT

In the educational and psychological research, we often make decisions according to consensus. For example, criteria of learning assessment and teaching evaluation are very important for teachers. Traditionally, we ask the task-taker to respond according to the thinking of binary logic. But, this kind of response is improper because the human thinking is fuzzy and uncertain. It should be an improved measurement using membership and fuzzy statistics. In this paper, we propose the fuzzy mode and present some of its properties. In addition, we give some examples, which are used frequently in educational and psychological assessment, to demonstrate that fuzzy statistics is suitable and meaningful for social science research.

Key words and phrases: Binary logic, educational and psychological assessment, fuzzy mode membership function.

AMS 2000 subject classifications: Primary 62-07.