條件獨立假設下合成型擔保債權憑證之評價與避險

The Pricing and Hedging of Synthetic CDOs Under the Conditional Independence Assumption

江彌修 Mi-Hsiu Chiang*
國立政治大學金融學系
National Chengchi University

岳夢蘭 Meng-Lan Yueh
國立政治大學財務管理學系
National Central University

林恩平 An-Ping Lin
國立政治大學金融學系
National Chengchi University

摘 要

本文在違約事件為條件獨立(conditional independence)的假設下，利用 Hull and White (2004) 所提出之機率杓斗法則(probability bucketing method)建構合成型擔保債權憑證債權群組(reference pool)之損失分配，進而推導出用以計算分券信用價差的半解析式(semi-analytic)價差模型。本文利用半解析式評價模型求得分券信用價差，並提供風險因子負載係數(factor loadings)與回復率(recovery rate)之於各分券信用價差的敏感度分析。本文以實務界所採用的三種分券風險衡量指標來分析合成型擔保債權憑證各分券之相對風險特徵。數值結果顯現債權群組之已實現損失(realized loss) 對於各分券的相對風險有不同程度的影響。已實現損失雖然對權益分券造成損害，卻同時降低了權益分券發生損失的不確定性。反觀次償分券，當已實現損失侵蝕其次順位信用保護層(subordination level)後，次償分券發生損失的機率增加，相對風險因而提高。本文最後求算分券避險參數並提供避險分析。研究發現利用信用指數避險之避險成本高將使次償分券和先償分券在避險後的淨收入為負，此時分券投資人可考慮賣 Delta 值較高之單一資產信用違約交換，以規避特定信用標的之價差變動風險來達到某種程度的避險效果。

關鍵字(詞)：合成型擔保債權憑證、因子連繫結構、分券避險比例、損失分配。

Abstract

In this paper we investigate the valuation and hedging issues of synthetic collateral debt obligations (CDOs) under the conditional independence assumption. The probability bucketing method of Hull and White (2004) enables us to construct the loss distribution, and we characterize the correlation structure between defaults based on the factor-copula formalism initiated by Laurent and Gregory (2003) to arrive at a semi-analytic valuation framework. We consider risk measures that are adequate for assessing the relative risks of tranches. Efficient calculation of the hedging parameters is demonstrated, and we provide an in-depth analysis for the relevant hedging implications followed from our numerical results.

Keywords：synthetic CDOs, factor copulae, tranche Deltas, loss distributions

---

* 我們感謝兩位匿名審查人的專業意見，並感謝政治大學金融學系廖四郎教授對本文的建議。
本文聯絡作者：江彌修，國立政治大學金融學系，臺北市文山區 116 指南路二段 64 號。
Address: No. 64, Sec. 2, Zhi-Nan Road, Wen-shan District, Taipei, Taiwan. Tel: +886 9393091 Ext. 81265
Email: mhchiang@nccu.edu.tw

條件獨立假設下合成型擔保債權憑證之評價與避險

壹、前 言

合成型擔保債權憑證(synthetic collateralized debt obligations)是一種藉由與特殊目的機構(Special Purpose Vehicle)簽訂單一或一序列信用違約交換(credit default swaps)，以轉移信用保護買方(credit protection buyer)所承擔之信用風險的金融商品，因此發起人（即信用保護買方）與特殊目的機構(Special Purpoe Vehicle)之間並無實質債權資產之移轉。以商業銀行欲轉移其企業貸款債權為例，與其將債權群組(reference pool)實際轉移出售予特殊目的機構(Special Purpose Vehicle)，商業銀行可選擇與特殊目的機構簽訂債權群組之違約交換。銀行於契約期中必須定期支付特殊目的機構一定額權利金(protection premiums)加上債權群組所產生之現金流量(利息)，而特殊目的機構則負責承擔債權群組發生違約的相關損失。特殊目的機構將債權群組之信用風險重新包裝成不同信用等級之分券，並出售予投資人。由於信用違約交換於期初並無本金交換(not funded)，其所附帶之現金流量(權利金和利息)並不足以補償分券投資人之風險承擔。因此特殊目的機構一般會將出售分券之收入轉投資於高信用評等債券，以因應違約發生時對保護買方所需履行之義務。

信用衍生性商品，例如一籃子信用違約交換(basket credit default swaps)及本文所探討之擔保債權憑證(collateralized debt obligations)，其商品特性為一具多重標的(multi-name)之債權群組(reference pool)，且群組之構成可包含眾多債權或資產證券化之標的。如何考慮資產違約相關性於評價模型之中，為學術界與實務界共同關心的課題。近年關於擔保債權憑證避險之文獻數量遠不及其評價之文獻，由於此類信用衍生性商品具有高風險與高報

酬的特性，因此分券持有人必須對於分券之風險衡量指標所透露之避險訊息有相當程度的認識，才不會低估此類商品之風險性，造成投資損失。

就國內市場而言，政府加速審查資產證券化商品送件且開放資產證券化標的之政策催化了資產證券化市場的積極成長。金融資產證券化的商品，包括了房貸證券化商品(MBS) 、信用卡應收帳款證券化商品、商業應收帳款證券化 (ABCP)、債券證券化商品(CBO) 、企業貸款證券化商品(CLO)等皆因應而生。其中 CBO (collateralized bond obligations)與 CLO (collateralized loan obligations)皆屬於傳統型的擔保債權憑證(CDO)。商品本質為固定收益證券，其債權群組由債務工具所組成，如 CBO 之債權群組由高比率的債券所組成，而 CLO 之債權群組則由高比率的銀行貸款債權所組成。

國內 CDO 商品的發行，於九十四年度經過核准且申報生效金額超過一百億者包括了元大京華、玉山銀、中信銀、與台灣工銀。所發行的商品仍為傳統型 CDO，且以新台幣計價之結構債皆佔其債權群組之百分之五十。發行動機大都是為了解決國內債券型基金之結構債問題，因此將結構債重新包裝成 CBO，再出售予投資人。其中，如台灣工銀與玉山商業銀行，將新台幣結構債結合國外發行的美元 CDO 一起包裝成 CDO 商品，雖有合成的性質，但仍與國外合成型 CDO 以契約標準化的債權群組為其特性不同。

本文所分析的對象，即是以契約標準化為特性的合成型擔保債權憑證(synthetic CDO)。它是傳統型 CDO 與信用違約交換(credit default swaps)商品之結合物。如前文所述，資產群組的信用風險是藉由信用違約交換移轉給信用保護賣方，債權群組中的資產並不發生實質轉移，因此在違約事件發生時並不列除於信用保護買方的資產負債表。此類商品的發行動機由此可見：是希望藉由標的資產的契約標準化來改善傳統型擔保債權憑證之標的資產流動性不足的問題；當債權群組為標準化後的信用風險指數且各資產的信用違約交換契約流動性高，可促進價格訊息的充分與透明化，從而可利用市場報價建立出各標的資產之信用曲線(credit curve)，其角色類似於債券市場中之殖利率曲線。契約的標準化允許了避險的操作，且債權群組中的資產不發生實質轉移有助於維護金融機構與貸款客戶之間的關係，同時避免了實質債權轉移的繁瑣法定程序與法規適用性問題。

就其風險特徵而言，擔保債權憑證之風險來源主要可歸納為兩類：市

場風險及個別資產之違約風險。以合成型擔保債權憑證為例，市場風險為債權群組違約交換之信用價差，受總體不確定性因素影響產生之變動對於分券信用價差所造成的改變；個別風險則為群組中特定標的違約交換之信用價差，受到個別因素影響產生之變動對於分券信用價差的影響。不同分券對於不同類型風險之敏感程度亦不同。對於權益分券而言，其對個別風險之敏感程度大於市場風險，而先償分券則對市場風險之敏感程度大於個別風險。分券之持有人若能在合理的範圍內從事避險，則能降低投資此類商品之信用風險，此時計算避險比例以作為避險之參考便顯得額外重要。因此本文藉由選取適當之風險衡量指標來分析分券之間的相對風險，以期對於擔保債權憑證之風險特徵有深入之了解。本文並進而求算分券之避險參數 Delta 和 Gamma 值，以作為投資人在分券避險上之參考依據。

本文以下之結構如下： 第貳節為文獻回顧，探討信用風險模型及合成型擔保債權憑證評價與避險上之相關議題。第參節建立擔保債權證券之評價模型及定義分券風險衡量指標與避險參數。同時說明如何透過所設定之評價模型求算避險參數。第肆節利用所設定之評價模型，對一假設性之合成型擔保債權憑證進行評價與風險分析，並求算避險參數探討避險效果。第伍節為本文結論。

貳、信用風險模型

信用風險模型之發展依其對違約事件之刻畫的不同在文獻上可分成兩類，即結構式模型(structural form model)與縮減式模型(reduced form model)。結構式模型以公司資本結構的的變化來反映其信用風險，其中 Merton (1974)首先提出以公司之資產價值小於其負債價值來定義一違約事件之發生。Black and Cox (1976)放寬 Merton (1974)模型中違約事件僅可發

生於契約到期日之假設，並利用首次通過時間模型(first passage time model)，定義違約事件之發生為當資產價值於到期日前首次觸碰到一門檻(threshold)。但在縮減式模型中，違約事件的發生與決定於一外生變數，可利用風險分券價格或違約交換信用價差反推求得隱含之違約機率及回復率(recovery rate)以進行信用風險之評估。其中 Jarrow and Turnbull (1995)及 Jarrow, Lando and Turnbull (1997)以時間同質(time-homogeneous)的馬可夫鏈(Markov Chain) 建立信用評等移轉矩陣(transition matrix)，用來描述一公司之信用評等之轉移過程，進而求算不同信用評等所隱含之違約機率。Duffie and Singleton（1997）在利率、違約機率及回復率為三個外生之隨機過程的假設下，發現具信用風險債券的評價公式和無風險債券評價公式相類似，只需將折現因子視為無風險利率加上一信用風險調整項，此調整項為違約機率與回復率之函數。

應用連繫結構函數(copula)描述違約事件的相關性始於 Li (2000)。藉由傳統縮減式模型中以違約時點(default time)來定義一違約事件的發生與否，可建構每一標的資產之違約密度函數（default intensity function），進而求得此資產之違約邊際分配[1]。違約密度函數，一般稱之為信用曲線(credit curve)[2]，建立了標的信用資產之違約時點與違約機率之間一對一的關係，此關係稱之為違約機率之期間結構，其角色類似於利率模型中之殖利率曲線。由信評公司(例如 Moody)對該資產之歷史違約機率資料，或由風險債券之市價及資產交換之價差都可反推求得該資產之信用曲線。在此模型中，違約事件的相關性是以信用資產之間違約時點之相關性來取代，使用統計中連繫結構函數的目的，是希望藉由它能夠連繫邊際分配而成聯合機率分配的特性，來產生債權群組(reference pool)之聯合違約機率分配。所以使用不同的連繫結構函數相當於事先給定違約時點之間的相關性結構。

Li(2000)模型在評價信用衍生性商品時，可假設債權群組中各資產之名目本金、違約回復率、違約機率以及違約相關性等參數皆不相同，且可因應各種不同的商品條款，如部份本金提前還本等。雖然具有彈性，但當債權群組中的資產數目眾多時，利用蒙地卡羅模擬法產生相關性違約時點會非常耗時。因此，具有條件獨立(conditional independence)[3]特性的因子模型(latent factor model)便逐漸被應用於評價具多重標的信用衍生性商品。

---

[1] 嚴格來說，違約邊際分配，所指的是違約時點的邊際機率分配(marginal distribution of default time)。
[2] 此即傳統存活分析中(survival analysis)所謂的危險率函數(hazard rate function)。
[3] 意即假設違約事件彼此獨立。

在因子模型之下，債權群組之聯合違約機率分配之維度不再由標的資產之個數決定，而是由影響資產價值之系統性風險因子之個數而決定。相對於 Li(2000)在蒙地卡羅模擬執行上所面臨的高維度問題，此時債權群組之聯合違約機率分配以單維度的積分型態出現，因此可利用轉換法則如傅立葉轉換(Fourier transform)，或數值積分法如高斯積分法(Gaussian quadrature)，來作積分的求解。

由條件獨立假設出發而發展的評價模型，在文獻上一般稱之為半解析式(semi-analytic)模型，其共同點為利用條件違約機率建構債權群組之條件損失分配(conditional loss distribution)，再對系統性因子積分，以得到債權群組之非條件損失分配(unconditional loss distribution)。藉由因子連繫結構之假設債權群組之聯合違約機率分配已簡化成單維度的積分型式，因此損失分配有解析的型態可求。此類評價模型包含了 Laurent and Gregory (2003)、Andersen et al. (2003)，及 Hull and White (2004)。其中 Laurent and Gregory (2003)利用快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform, FFT)，由債權群組損失之特徵函數(characteristic function)得到債權群組之損失分配。此模型允許標的資產之違約強度為隨機(stochastic default intensities)、名目本金與違約回復率也不需相同，且可採用不同的相關性結構假設於模型中，但其數學運算複雜，且使用快速傅立葉轉換時所取的點數不同會影響運算時間以及損失分配之精確度。Andersen et al. (2003)在各資產名目本金為損失單位之倍數的假設下，提出以遞迴法則(recursive method)考慮個別資產依序加入債權群組所產生的違約情形，以求算債權群組之條件損失分配函數 。Hull and White (2004)以 Andersen et al. (2003)為基礎同時保有 Laurent and Gregory (2003)對於資產名目本金、回復率假設之彈性，提出機率勺斗法則(probability bucketing method)來建構債權群組之損失分配。其基本概念和 Andersen et al. (2003)類似，也是考慮資產依序加入債權群組之違約情形。Hull and White (2004)將損失分為數個區間，根據條件違約機率得到整個債權群組損失金額落在各個區間之機率，進而建構條件損失分配函數。最後同樣對於系統性風險因子進行數值積分以得到債權群組損失分配函數。此方法亦允許違約回復率為隨機(random recovery rate)，且可快速求算擔保債權憑證分券的避險參數。

半解析式模型於敏感度的分析及避險參數的求算上有明顯的優勢。若市場風險為分券風險控管之前提，則以提高債權群組之平均信用價差，並

透過機率勺斗法則重新計算債權群組之損失分配，可探討債權群組之價差變動於分券市場價值之影響，接著透過分券與債權群組市場價值之相對變動程度可求算分券之避險比例(tranche Delta)。若個別信用資產之違約風險為其前提，則只需提高特定標的之信用價差，並求算分券市場價值與該資產市場價值之相對變動程度，同樣可以得到分券於單資產價差變動之避險比例。

參、基本假設與模型設定

本節主要分為三個小節，第一小節在條件獨立(conditional independence)之假設下，利用因子連繫結構模型(factor copula)，建構合成型擔保債權憑證分券(tranche)之半解析式評價模型。第二小節定義合成型擔保債權憑證相對風險之衡量指標，並說明各指標之意義。第三小節則定義合成型擔保債權憑證分券之避險參數，並說明如何利用第一小節所設定之半解析式評價模型來求算分券之避險參數。

首先我們將本文所使用之符號定義如下：

$s^{(j)}$：分券 j 的合理信用價差，j=權益分券，次償分券甲、乙，以及先償分券

$\Delta_{t-1,t}$：兩付息日 ti-1 與 ti 間之時間間隔

$B(t_i)$：由付息日 ti 折現至期初之折現因子

$A^{(j)}$：分券 j 的名目本金

$L_{t_i}^{(j)}$ ：t i 時點下的分券 j 損失金額

L_{t_i} ：t i 時點下債權群組的累積總損失

$D^{(j)}$ ：分券 j 之損失止賠點(detachment point)

$C^{(j)}$ ：分券 j 之損失起賠點(attachment point)

一、合成型擔保債權憑證評價模型

擔保債權憑證之評價，主要是計算擔保債權憑證各分券 j 的溢酬收入(Premium Leg)之現值 $PL^{(j)}$ 與違約支出(Default Leg)之現值 $DL^{(j)}$，以求出一個合理信用價差(fair spread)使得各分券收入與支出之現值完全相等。

首先定義在 ti 時點下，分券 j 所面臨之損失如下：

$$L_{t_i}^{(j)} = \min\left(\max\left(L_{t_i} - C^{(j)}, 0\right), D^{(j)} - C^{(j)}\right) \tag{1}$$

其中，Lti 為債權群組於 ti 時點之累積總損失，$C^{(j)}$ 為分券 j 之損失起賠點(attachment point)，而 $D^{(j)}$ 則為分券 j 之損失止賠點(detachment point)。$\left(D^{(j)} - C^{(j)}\right)$ 恰為分券 j 的期初名目本金(notional amount)A(j)。定義 $F_{t_i}(\cdot)$ 為 ti 時點的累積總損失 L_{t_i} 之機率分配函數，則分券 j 之期望損失可表示為：

$$E[L_{t_i}^{(j)}] = (D^{(j)} - C^{(j)})Q\left(L_{t_i} > D^{(j)}\right) + \int_{C^{(j)}}^{D^{(j)}} (x - C^{(j)}) dF_{L_{t_i}}(x) \tag{2}$$

由上式可見分券 j 之期望損失由兩個部分所組成，第一個部分考慮當債權群組的累積損失 L_{t_i} 大於 $D^{(j)}$ 時，分券 j 的名目本金完全損失的可能性，其中 $\left(D^{(j)} - C^{(j)}\right)$ 為損失之總金額，而 $Q\left(L_{t_i} > D^{(j)}\right)$ 為此事件發生之機率；第二部分考慮當債權群組的累積損失 L_{t_i} 介於 $C^{(j)}$ 與 $D^{(j)}$ 時，分券的損失金額為 $\left(x - C^{(j)}\right)$。

擔保債權憑證分券之持有人，在各個付息日依照存活本金的大小領取溢酬。加總各時點所領取之溢酬的現值後，即得分券溢酬收入之現值。由於信用價差與付息日在契約初期便已決定，因此分券溢酬端 $PL^{(j)}$ 之風險主

要來自各付息日的存活本金的不確定性。透過(2)式所求得之分券 j 之期望損失，可以計算出付息日 t_i 時分券 j 的存活本金期望值，因此在各付息日 t_i 存活本金所領取之溢酬收入現值可計算如下：

$$PL^{(j)} = s^{(j)} \times \sum_{i=1}^{I} \Delta_{i-1,i} B(t_i) \left[\left(D^{(j)} - C^{(j)} \right) - E[L_{t_i}^{(j)}] \right] \tag{3}$$

其中 t_I 為契約到期日。在另一方面，分券 j 之損失端的現值 $DL^{(j)}$ 可利用(2)式之分券 j 之預期損失計算如下：

$$DL^{(j)} = \sum_{i=1}^{I} B(t_i) \left[E\left(L_{t_i}^{(j)} \right) - E\left(L_{t_{i-1}}^{(j)} \right) \right] \tag{4}$$

求出各分券 j 溢酬收入與違約支出之現值後，令收入與支出之現值相等，則可透過下列關係式求得各分券 j 的信用價差 $s^{(j)}$ 。

$$s^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{I} B(t_i) \left[E\left(L_{t_i}^{(j)} \right) - E\left(L_{t_{i-1}}^{(j)} \right) \right]}{\sum_{i=1}^{I} \Delta_{i-1,i} B(t_i) \left[\left(D^{(j)} - C^{(j)} \right) - E\left(L_{t_{i-1}}^{(j)} \right) \right]} \tag{5}$$

由(5)式可知，欲求得一分券 j 之合理價差，必須先求得分券 j 之預期損失(tranche expected loss) $E\left[L_{t_i}^{(j)} \right]$，而分券 j 之預期損失決定於標的信用債權群組之累積損失分配。因此建構債權群組的損失分配函數是評價任何型態的擔保債權憑證中一個重要的議題。在條件獨立的假設下，本文透過因子連繫結構模型，利用 Hull and White (2004)所提出的機率勺斗法則來建構債權群組之損失分配，並以此為基礎計算各分券之收入與損失的現值，進而求得合成型擔保債權憑證各分券之合理價差。

二、條件獨立的假設(The Conditional Independence Assumption)

假設債券群組中有 N 個標的資產，每個標的資產 i 的價格，以隨機變數 x_i 表示如下：

$$x_i = a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \tag{6}$$

其中，M 為 x_i 的系統性風險因子(common factor)，Z_i 為 x_i 之非系統性風險因子(idiosyncratic factor)， a_i 為系統性風險因子 x_i 的負載係數(factor loadings)。假設風險因子 M 與 Z_i 互相獨立，且 M 與 Z_i 可服從任何均數為 0，變異數為 1 之機率分配。因此透過對風險因子 M 與 Z_i 的分配假設，可以得到隨機變數 x_i 之間不同型態之相關性結構，稱為因子連繫結構模型(factor copula)。

在因子連繫結構模型中，違約事件的發生與否取決於資產價格是否小於一違約門檻。由於風險因子 M 是各資產 i，$i=1,2,\cdots N$，共有的系統性風險因子，因此條件於共同的風險因子 M 之下，違約事件會彼此獨立，稱之為條件獨立的假設。在此假設之下，個別標的資產的違約時間分配函數 $Q_i(t)$ 與代表資產價格之隨機變 x_i 的累積機率分配函數 $F_i(x)$ 有一對一的關係，亦即：$Q_i(t)=Q(\tau_i \le t)=F(x_i \le x)=F_i(x)$，其中 τ_i 為資產 i 發生違約的時間。由此可知，條件獨立的假設使結構式模型(structural model)和縮簡式模型(reduced-form model)在違約事件的定義上達到一致。

當因子 M 與 Z_i 的機率分配為可解析，各資產 i 的條件邊際違約分配便可由非系統性風險因子 Z_i 的累積機率分配來表示：

$$\begin{aligned} Q_i(t\,|\,M) &= F_i(x\,|\,M) \\ &= P(x_i \le x\,|\,M) \\ &= P(a_i M + \sqrt{1-a_i^2}\,Z_i \le x\,|\,M) \\ &= P(Z_i \le \frac{x-a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}}\,|\,M) \\ &= H_i\left[\frac{x-a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

其中 H_i 為 Z_i 之累積機率分配函數。由於因子 M 與 Z_i 之間互相獨立，因此以 H_i 所表示之違約機率 $Q_i(t|M)$ 亦互為獨立。在條件獨立的假設之下，各資產之條件違約機率互相獨立，因此債權群組之條件聯合違約機率分配可簡化為各標的資產之條件違約機率分配之乘積，亦即：

$$Q(t\,|\,M)=\prod_{i=1}^{N} Q_i(t\,|\,M) \tag{8}$$

最後對共同因子 M 積分，即可求得各時點 t 下的債權群組之聯合違約機率分配如下：

$$Q(t)=\int_M Q(t\mid M)dM=\int_M \prod_{i=1}^{N} Q_i(t\mid M)dM \tag{9}$$

(9)式顯示，在條件獨立的假設之下，債權群組之聯合違約機率分配為一有解析型態的單維度的積分，此即半解析式(semi-analytic)模型之源由。接下來本文後假設系統性風險因子 M 與非系統性風險因子 Z_i 服從兩種不同的機率分配，進而以產生不同特性之違約相關性結構，並討論此兩種不同因子分配假設下，因子連繫結構模型之特性。

(2)因子的機率分配假設

藉由對風險因子的機率分配設定，因子聯繫結構模型可產生不同類型之違約相關性結構。本文採用的兩種因子分配假設分別為標準常態分配與 Student-t 分配，我們分別分析其特性如下。

在第一種情形中，我們假設風險因子 M 與 Z_i 均服從標準常態分配。在此假設下所產生之違約相關性連繫結構類似於 Li (2000)所提出之高斯違約相關性連繫結構(Gaussian copula)，但是違約聯合機率分配在因子模型的假設之下較易求得，因此在執行上不需使用蒙地卡羅模擬。當 M 與 Z_i 均符合標準常態分配時，根據常態分配的統計特性，隨機變數 x_i 亦為標準常態分配，因此標的資產 i 之條件違約機率可表示為：

$$\begin{aligned} Q_i(t\mid M) &= P\left(Z_i \le \frac{x-a_iM}{\sqrt{1-a_i^2}}\right) \\ &= \Phi\left[\frac{x-a_iM}{\sqrt{1-a_i^2}}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

其中 Φ(・)為標準常態分配之累積機率密度函數。

在第二種情形中，我們假設風險因子 M 與 Z_i 均符合 Student-t 分配，此即 Hull and White (2004)的 double-t copula。Student-t 分配之均數為零、變異數為 $(\varepsilon/\varepsilon-2)$，其中 ε 為自由度(degree of freedom)。當假設 M 與 Z_i 均符合

Student-t 分配且自由度分別為 ε_M 與 ε_Z 時，可將 M 和 Z_i 標準化成為均數為 0，變異數為 1 之隨機變數。方程式(6)式可改寫成下列形式：

$$x_i = a_i\left(\frac{\varepsilon_M - 2}{\varepsilon_M}\right)^{\frac{1}{2}} M + \sqrt{1-a_i^2}\left(\frac{\varepsilon_Z - 2}{\varepsilon_Z}\right)^{\frac{1}{2}} Z_i \tag{11}$$

而資產 i 之條件違約機率為：

$$Q_i(t \mid M) = P\left(Z_i \le \left(\frac{\varepsilon_Z}{\varepsilon_Z - 2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x - \left(\frac{\varepsilon_M - 2}{\varepsilon_M}\right)^{\frac{1}{2}} a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}} \right) \tag{12}$$

在 double-t copula 下，x_i 是均數為 0，變異數為 1 的隨機變數。x_i 雖然由兩個 Student-t 分配的隨機變數所組成，但其本身並不服從 Student-t 分配，因此必須透過數值積分來求算 x_i 之分配。

當假設系統性風險因子服從 Student-t 分配時，系統性風險因子出現極端值的機率增加，將使所有隨機變數 x_i 同時出現極端值的機率增加，故假設系統性因子服從 Student-t 分配時，會使資產同時違約或同時存活的機率增加，此與資產間相關係數上升所造成的影響類似。當假設非系統性風險因子服從 Student-t 分配時，非系統性風險因子出現極端值的機率增加，將使單一隨機變數 x_i 出現極端值的機率增加，因此個別資產單獨違約或單獨存活的機率上升，此與資產間相關係數下降所造成的影響類似。因為當資產違約來自於個別性因素時，單一資產違約並不會帶動其他資產違約，故資產違約來自個別性因素的機率增加時，將使資產同時違約與同時存活的機率下降。

假設系統性風險因子服從機率密度函數尾端較厚之 Student-t 分配時，將使評價結果中權益分券之信用價差降低。因為權益分券原先即預期遭受不小的損失，而增加系統性風險因子分配之厚尾性，隱含資產同時存活之機率將上升，即使資產同時違約的機率亦上升，分券整體的損失期望值仍會降低。至於先償分券，原先預期幾乎不會遭受損失，此時因為資產同時發生違約的機率提高，使得分券整體損失期望值與信用價差上升。反之，若假設非系統性風險因子為 Student-t 分配，則會造成權益分券之信用價差上升，因為非系統性風險因子的分配尾端較厚隱含個別資產單獨違約之機

率增加，此時權益分券免於損失的機率下降將造成其信用價差上升。至於先償分券則因為資產同時違約的機率下降，其信用價差將下降。次償分券在兩個因子分別為 Student-t 分配之情況下，信用價差皆呈現下降的情形。

因為在因子模型下假設風險因子 M 與 Z_i 均服從標準常態分配時所產生的違約特性類似於 Li (2000)所提出之高斯違約相關性連繫結構(Gaussian copula)，為減短篇幅，本文之後將交替使用 Gaussian copula 與「因子-Gaussian copula」，所指的皆是在因子模型之下，假設風險因子 M 與 Z_i 均服從標準常態分配所產生之違約相關性連繫結構。同樣的，double-t copula 所指的是在因子模型之下，假設 M 與 Z_i 均符合 Student-t 分配所產生之違約相關性連繫結構。

三、建構損失分配函數

在條件獨立的假設下，Hull and White (2004)提出兩種近似債權群組損失分配函數(loss distribution function)的方法。第一種方法利用遞迴法(Recursive Method)，求出各時點下各個標的資產的違約機率以建構損失分配，此方法僅適用於標的資產的名目本金與回復率相同，且回復率為固定常數的情形。第二種方法稱為機率勺斗法則(probability bucketing method)，此方法允許各個標的資產擁有不同的名目本金與回復率，且可放寬回復率為固定常數之假設，是一個較廣義的模型。因此本文以機率勺斗法則為主要模型，建構合成型擔保債權憑證債權群組之損失分配。以下說明如何利用機率勺斗法則來建構投資組合損失分配。

首先將可能損失的金額範圍定義為$(K+1)$個區間。假設第 0 個損失區間的損失金額介於$\{0,b_0\}$，第 1 個損失區間的損失金額介於$\{b_0,b_1\}$，...，第 k 個損失區間的損失金額介於$\{b_{k-1},b_k\}$，以此類推。令 b_0 為 0，則第 0 個損失區間$\{0,b_0\}$表示沒有損失的情況。各區間的寬度可以依照所希望得到之損失分配精確度加以設定，當區間的寬度較小時，損失分配函數可以得到較精確之近似。此外，各區間之間隔可自由設定，以因應特殊商品結構。例如評價單一分券擔保債權憑證(single tranche CDO)時，只需要求取損失分配函數中的某一特定區間（譬如損失金額介於債權群組 3%－6%），因此可將損失分配在需要的部分之區間間隔縮窄，而將不需要的部分之區間加以放寬。

由於在條件獨立假設下，違約事件之間彼此獨立，因此可依序考慮每

個資產加入債權群組後所產生的違約情形，以條件違約機率為基礎，來更新各損失區間之機率值與區間內之條件預期損失金額。假設債權群組中一開始無任何資產，此時損失介於第 0 個區間$\{0,b_0\}$（零損失）之條件機率為 1。當加入第一個債權資產於群組時，損失有可能發生，其條件違約機率便會有部分機率由零損失之區間移動到其他損失大於零之區間（假設為第 k 個區間$\{b_{k-1},b_k\}$），再依據該資產條件違約機率的大小，將部份機率由第 0 個區間移動至第 k 個區間，同時更新第 k 個區間內之條件預期損失 A_k（因為該區間有新損失金額流入）；接著考慮第二個資產的違約情形，首先判斷第二個資產違約後，第 k 個區間原先之條件預期損失加上第二個資產之違約損失金額之總和是否會落入其它損失區間，若是，則依照第二個資產的條件違約機率大小，將部分機率由原先第 k 個區間移動到某個新區間 $u(k)$，並更新該區間之條件預期損失 $A_{u(k)}$；若不是，則僅更新第 k 個區間之條件預期損失 A_k。另外則有部分機率由第 0 個區間移動至另一個區間，同樣按照第二個資產的條件違約機率大小將部分違約機率由第 0 個區間移動至另一個區間並更新該區間之條件預期損失。依序考慮第三個、第四個、直到第 N 個標的資產的違約情形，則可完成債權群組條件損失分配函數的建構。

我們假設第 k 個區間$(0\leqq k\leqq K)$的條件預期損失 A_k 之起始值為 $0.5(b_{k-1}+b_k)$，並定義 LGD_j 為第 j 個資產的違約金額(loss given default)，A_k 為第 k 個區間之條件預期損失， $u(k)$為包含債權群組累積總損失(A_k+LGD_j)之區間，則依遞迴公式，可將各損失區間之條件違約機率與條件預期損失計算如下列兩種情況：

(1)當 $u(k)>k$：亦即資產發生違約後，債權群組之累積總損失(A_k+LGD_j)超過原區間 k 之上界值 b_k。此時必須同時更新區間 k 與區間 $u(k)$之條件違約機率值與區間 $u(k)$之條件預期損失如下：

$$
\begin{aligned}
P_k^{j+1} &= P_k^{\,j}\left(1-H_j\left(t\,|\,M\right)\right)\\
P_{u(k)}^{j+1} &= P_{u(k)}^{j}+P_k^{\,j}H_j\left(t\,|\,M\right)\\
A_k^{j+1} &= A_k^{\,j}\\
A_{u(k)}^{j+1} &= \frac{P_{u(k)}^{j}A_{u(k)}^{j}+P_k^{\,j}\left[H_j\left(t\,|\,M\right)\times(A_k^j+LGD_j)\right]}{P_{u(k)}^{j+1}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(2)當 $u(k)=k$：亦即資產發生違約後，債權群組之累積總損失(A_k+LGD_j)未超出原損失區間 k 之上界值 b_k。此時僅須更新區間 k 之條件預期損失如下：

$$\begin{aligned} P_k^{j+1} &= P_k^j \\ A_k^{j+1} &= A_k^j + \left[H_j(t \mid M) \times \left(LGD_j \right) \right] \end{aligned} \tag{14}$$

其中 P_k^j ($P_{u(k)}^j$)為債權群組中第 j 個資產發生違約時，其累積損失落入第 k 個($u(k)$)損失區間之條件機率，而 A_k^j ($A_{u(k)}^j$)為考慮第 j 個資產的違約狀況後，累積損失落入第 k 個($u(k)$)損失區間時，該損失區間的條件期望損失值，$H_j(t|M)$為方程式(7)所定義之第 j 個資產的條件違約機率。

以機率勺斗法則建構債權群組之條件預期損失後，需要將此條件損失分配對於系統性風險因子 M 加以積分，以求得債權群組之非條件損失分配函數(unconditional loss distribution)。本文假設 M 因子服從標準常態分配或 Student-t 分配，因此需透過數值積分方法來處理[4]。

四、合成型擔保債權憑證之風險衡量指標

債權群組損失的不確定性，使得擔保債權憑證各分券的投資人具有不同的風險暴露程度。根據各分券之損失分配型態，可計算出分券損失分配函數之統計量，例如平均數與標準差等。我們可以損失分配函數的統計量為基礎，定義出擔保債權憑證的風險衡量指標，藉此反映各分券之風險特徵。為探討各分券之風險特徵，本文採用風險衡量指標如下：

(1)以期望損失為基礎之風險衡量指標

由於期望損失為一絕對金額，因此無法用來衡量各分券的相對風險。本文因此採用期望損失率(expected loss percentage)以及期望損失槓桿倍數(leverage of expected loss)兩種以期望損失為基礎的風險衡量指標。

---

[4] 本文使用 Gauss-Hermite 數值積分方法對隨機變數 M 進行積分求算：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(m)dm &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2}[e^{m^2} f(m)]dm \\ &\approx \sum_{k=1}^{K} w(m_k) e^{m_k^2} f(m_k) \end{aligned}$$

其中 K 為數值積分所採用之 M 點之個數，$w(m_k)$ 為加權乘數，m_k 為給定之 M 值，當 $w(m_k)$ 與 m_k 已知，則可利用上述之多項式來近似對隨機變數 M 之積分。

透過債權群組損失分配之建構可求得分券之期望損失。我們定義分券之期望損失率為分券期望損失金額佔名目本金之比例，而分券之期望損失槓桿倍數則定義為分券期望損失率相對於債權群組期望損失率之倍數，如下所示：

$$\text{分券 j 之期望損失率} = \frac{E[L_{t_i}^{(j)}]}{D^{(j)} - C^{(j)}} \tag{15}$$

$$\text{分券 j 之期望損失槓桿倍數} = \left(\frac{E[L_{t_i}^{(j)}]}{D^{(j)} - C^{(j)}}\right) / \left(\frac{E[L_{t_i}]}{\sum A^{(j)}}\right) \tag{16}$$

其中 $E\left[L_{t_i}^{(j)}\right]$ 為方程式(3)所定義之分券 j 在 t_i 時點下的期望損失，$E\left[L_{t_i}\right]$ 則為債權群組之期望損失。

分券 j 之期望損失槓桿倍數為各分券間的相對風險衡量指標，若分券之期望損失槓桿倍數為 15，代表該分券每 1 元本金所承擔之風險為債權群組 1 元本金所承擔風險的 15 倍。

(2) 以非預期損失為基礎之風險衡量指標

非預期損失為預期以外之損失金額。該金額通常高出期望損失許多，代表重大損失情況發生下之損失金額。本文根據 Gibson (2004)，定義分券非預期損失(Unexpected Loss)為分券期望損失加上分券損失金額的一個標準差。透過分券之損失分配函數，可求得 t_i 時點下分券 j 的損失金額標準差 $SD_{t_i}^{(j)}$：

$$SD_{t_i}^{(j)} = \sqrt{E(L_{t_i}^{(j)} - E[L_{t_i}^{(j)}])^2} \tag{17}$$

而 t_i 時點時分券 j 之非預期損失 $\overline{L_{t_i}^{(j)}}$：

$$\overline{L_{t_i}^{(j)}} = E[L_{t_i}^{(j)}] + SD_{t_i}^{(j)} \tag{18}$$

分券之非預期損失槓桿倍數也是一個相對風險的衡量指標，代表分券每 1 元本金相對於債權群組 1 元本金所承擔之風險倍數。

$$\text{分券 j 之非預期損失率} = \frac{\overline{L_{t_i}^{(j)}}}{D^{(j)} - C^{(j)}} \tag{19}$$

$$\text{分券 j 之非預期損失槓桿倍數} = \left(\frac{\overline{L_{t_i}^{(j)}}}{D^{(j)} - C^{(j)}}\right) \Big/ \left(\frac{\overline{L_{t_i}}}{\sum_j A^{(j)}}\right) \tag{20}$$

其中 $\overline{L_{t_i}}$ 為標的群組之非預期損失。

(3) 分券對於標的信用價差變動之敏感度

在定義分券對於債權群組中標的資產信用價差變動之敏感度前，必須先定義分券之市場價值(Mark-to-Market)。以分券投資人的觀點來看，分券的市場價值為分券之溢酬收入現值減去分券之違約支出現值：

$$MTM^{(j)} = PL^{(j)} - DL^{(j)} \tag{21}$$

其中 $MTM^{(j)}$ 代表分券 j 之市場價值，分券收入之現值 $PL^{(j)}$ 由方程式(3)所定義，而分券之支出現值 $PL^{(j)}$ 由方程式(4)所定義。

分券 j 對於標的信用價差之敏感度是指債權群組信用價差同時上升或下降一個基點(1bp)時對於分券 j 的市場價值所造成之影響，如下所示：

$$\frac{\partial\left(MTM^{(j)}\right)}{\partial s_0} \approx MTM^{(j)}(s_0 + 1bp) - MTM^{(j)}(s_0) \tag{22}$$

其中 s_0 為初始之標的信用價差。

五 合成型擔保債權憑證避險參數之求算

合成型擔保債權憑證分券 j 的期初信用價差 $s^{(j)}$，是在期初所擁有的資訊下，使契約價值為零所決定出的信用價差，但隨著標的信用交換的價差（市場報價）改變，各分券的市場價值將受到不同程度之影響。分券投資人做避險的目的，是希望分券在避險後的市場價值，不會受標的信用交換價差變動的影響。利用上一節所定義之分券對信用價差變動之敏感度，可進而求算合成型擔保債權憑證之避險參數 Delta 與 Gamma。

實務界常用的合成型擔保債權憑證分券避險參數主要有分券Delta與分券 Gamma。分券 Delta 定義為標的信用違約交換價差改變時，分券與該標的之市場價值相對變動程度，其中債權群組中標的信用交換價差的改變，又可細分為(1)標的信用價差平均變動(Average Spread Movement)以及(2)單一標的的信用價差變動。在(1)及(2)下，可分別定義出 $\delta^{(j)}_{\text{CDSind}}$ 以及 $\delta^{(j)}_{\text{Single CDS}}$ 來代表標的信用價差改變時，分券與標的信用違約交換市場價值之相對變動。若以投資人的角度來看，分券避險參數 Delta 為負值，表示購買分券的投資人，需賣出信用違約交換指數來避險，亦即買入保護(Buy Protection)，故每年需支付信用價差作為避險成本。分券 j 之避險參數 Delta 定義如下：

$$\begin{aligned}\delta^{(j)}_{CDSind} &= -\frac{[\text{Percentage Change in MTM}^{(j)}]}{[\text{Percentage Change in the Index Value}]} \\ &= -\left[\frac{1}{A^{(j)}}\frac{\partial \text{MTM}^{(j)}}{\partial \bar{s}}(1\ \text{bp})\right] \Big/ \left[\frac{1}{\text{Index Notional}}\frac{\partial \text{Index Value}}{\partial \bar{s}}(1\ \text{bp})\right]\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(j)}_{SingleCDS} &= -\frac{[\text{Percentage Change in MTM}^{(j)}]}{[\text{Percentage Change in the CDS Value}]} \\ &= -\left[\frac{1}{A^{(j)}}\frac{\partial \text{MTM}^{(j)}}{\partial s_0}(1\ \text{bp})\right] \Big/ \left[\frac{1}{\text{CDS Notional}}\frac{\partial \text{CDS PV}}{\partial s_0}(1\ \text{bp})\right]\end{aligned} \tag{24}$$

分券對於債權群組（信用違約交換指數）之 Delta，表示債權群組平均價差 $\bar{s}$ 變動一個基點時，分券價值變動佔名目本金百分比相對於債權群組價值變動佔名目本金百分比之比率。而合成型擔保債權憑證分券 j 之 Gamma($\gamma^{(j)}$)，表示債權群組信用價差平均變動一個基點時，分券 Delta 之變動程度，如下式所示。

$$\gamma^{(j)} = \frac{\partial \delta^{(j)}}{\partial \bar{s}}(1\ \text{bp}) \tag{25}$$

其中 $\delta^{(j)}$ 為方程式(23)或(24)中所定義之避險比例 Delta。

肆、 數值結果與分析

本節利用第參節所介紹的建構損失分配函數的方法，在 Gaussian copula 與 double-t copula 兩種不同因子連繫結構模型下，評價合成型擔保債權憑證(Synthetic CDO)，並比較兩種因子連繫結構下之評價結果。之後藉由第參節中所定義之分券風險衡量指標，分析各分券之風險特徵。最後，本文求算不同因子連繫結構模型下各分券之避險參數與避險成本，並提供避險結果之分析。

如前所述，本節中的 Gaussian copula 指的是因子連繫模型中風險因子 M 與 Z_i 均服從標準常態分配所產生之違約相關性連繫結構。同樣的，double-t copula 指的是在因子連繫模型中，M 與 Z_i 均服從 Student-t 分配所產生之違約相關性連繫結構。

一、合成型擔保債權憑證之評價

(1) 商品假設

假設市場上有一合成型擔保債權憑證商品，到期日為 5 年，標的群組由 100 個信用違約交換所構成，每個信用違約交換的名目本金為一百萬美元，則此債權群組之期初總名目本金為一億美元。如表 1 所示，依此債權群組共發行了四種不同受償順位之分券，分券大小(tranche size)表示各分券發行金額佔債權群組期初本金之比例，亦即各分券所能承擔債權群組違約損失之最大比例。信用增強(credit enhancement)代表各分券開始承擔損失前，順位較低之分券可先承擔之累積損失比例，因此可將順位較低之分券視為順位較高分券之保護層。此外，假設分券的付息方式為每三個月付息一次的後付型支付(pay in arrears)。根據上述之商品假設，當債權群組中的資產發生違約時，權益分券將承擔累積違約損失之前 3%，次償分券甲券將承擔累積違約損失之 3%－6%，次償分券乙券將承擔累積違約損失之 6%－10%，累積違約損失超過 10%的部分則由先償分券承擔。一般而言，先償分券之信用評等多為 AAA/Aaa，次償分券之信用評等多介於 A 與 BBB/Baa 之間，權益分券則不進行評等。

表 1 合成型擔保債權分券商品假設

分券種類	權益分券	次償分券甲券	次償分券乙券	先償分券
發行金額	3 百萬美元	3 百萬美元	4 百萬美元	9 千萬美元
分券大小	3%	3%	4%	90%
信用增強	N/A	3%	6%	10%
信用評等	Unrated	BBB/Baa	A	AAA/Aaa

另外假設債權群組中之信用違約交換具同質性(homogeneous)，且違約強度在契約期間內為常數，因此可由各標的信用違約交換的信用價差反推求出違約強度。標的信用違約交換的相關假設如表 2 所示：

表 2 單一資產信用違約交換商品假設

發行金額	1 百萬美元
到期日	5 年
回復率	40%
信用價差	60 bp
違約強度	0.01

此外我們假設無風險利率在契約期間內固定為 5%，各標的信用違約交換間之相關係數(pairwise correlation)為 30%。因此因子模型中之隨機變數 x_i 之系統性風險因子負載係數為 $\sqrt{0.3}$ 。

(2) 評價結果

根據第參節介紹的機率杓斗法則，首先建構各時點下債權群組之損失分配函數，進而求得各時點下分券之期望損失，再依此計算分券溢酬收入與違約給付的現值來決定信用價差。我們將各分券的評價結果列於表 3：

表 3 評價結果(單位：BP)

	Gaussian copula	double-t copula (ε_M=5, ε_Z=5)
權益分券	1487	1706
次償分券甲券	474	364
次償分券乙券	203	137
先償分券	7	9

分券的價差在兩種因子聯繫模型下的差異，肇因於不同的違約相關性結構假設會產生不同型態的損失分配函數。在 double-t copula 的假設下，當系統性風險因子為 Student-t 分配，其厚尾特性使得資產同時違約與同時存活之機率增加，債權資產之間的違約相關性因而提升，使權益分券之信用價差變低，而先償分券則因總體因素的不確定性升高而有較高之信用價差。當非系統性風險因子為 Student-t 分配時，個別資產單獨違約之機率會增加，使權益分券有較高之信用價差，而先償分券的信用價差會變低，其效果類似於債權資產間違約相關性的降低。透過表 2 的評價結果，本文發現對於權益分券而言，非系統性風險因子為 Student-t 分配之影響大於系統性風險因子 Student-t 分配之影響，故權益分券在 double-t copula 假設下所求得的信用價差會較在 Gaussian-copula 假設下所求得的信用價差大；對於先償分券而言，系統性風險因子為 Student-t 分配之影響會大於非系統性風險因子為 Student-t 分配之影響，因此先償分券在 double-t copula 假設下的信用價差會較 Gaussian-copula 假設下的高。至於兩個次償分券則在 double-t copula 下之評價結果皆小於 Gaussian copula 之下所得之結果。

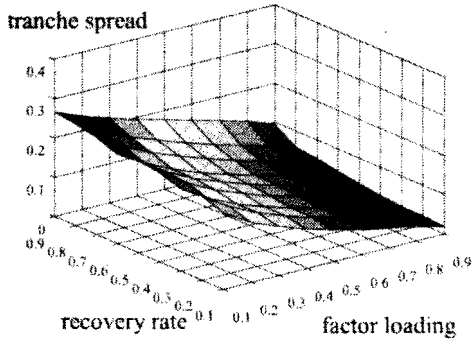
(3) 異質性敏感度分析

在本節中，我們對各分券進行風險因子負載係數(factor loadings)與回復率(recovery rate)之敏感度分析，比較兩種因子相關性結構模型之下，風險因子負載係數與回復率之於各分券信用價差的影響。

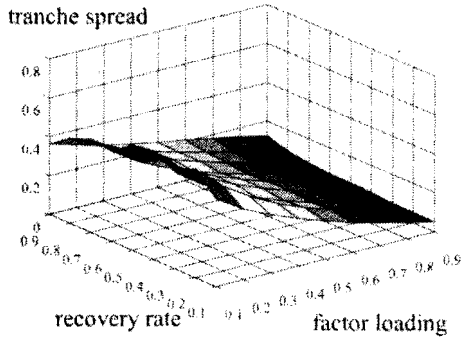
在本文所假設之商品條例下，權益分券與先償分券在兩種單因子相關性結構模型－Gaussian copula 與 double-t copula 之下，因子負載係數與回復率對於分券信用價差之影響類似：對於權益分券而言，根據圖 1 之結果，

信用價差與違約回復率呈正向關係而與相關係數呈反向關係；對於先償分券而言，根據圖 4 之結果，信用價差與違約回復率呈反向關係而與風險因子負載係數呈正向關係。反觀次償分券，由圖 2 及圖 3 可觀察到，在不同因子連繫結構之下，其信用價差受風險因子負載係數與回復率變動之影響呈現不一致的現象。

圖 1　權益分券信用價差之敏感度分析

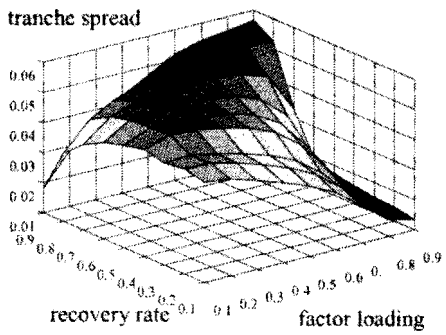


Gaussian Copula

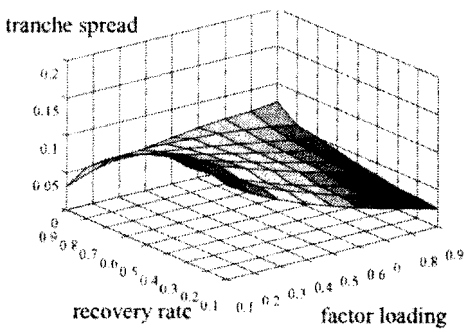


double-t Copula

圖 2 次償分券甲券信用價差之敏感度分析

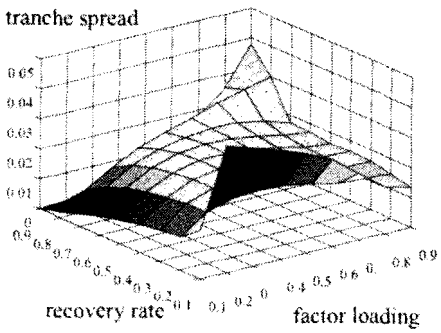


Gaussian Copula

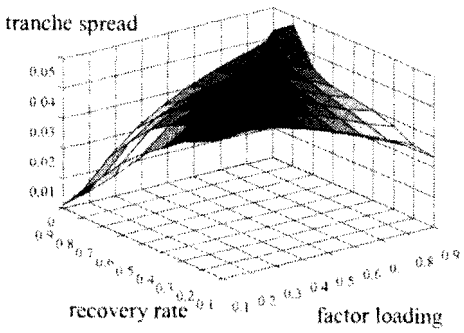


double-t Copula

圖 3 次償分券乙券信用價差之敏感度分析

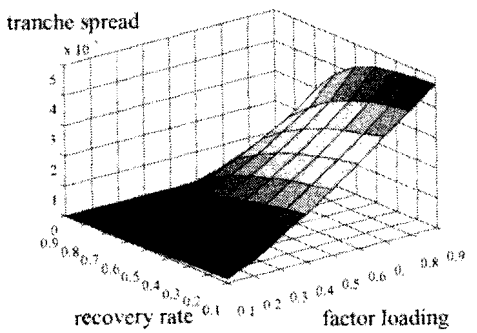


Gaussian Copula

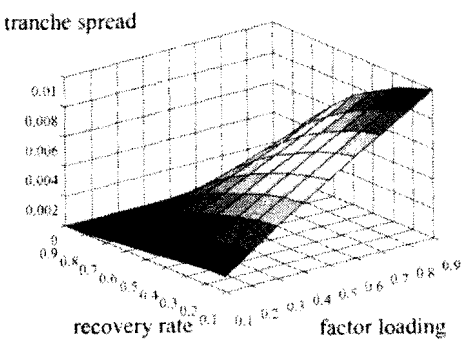


double-t Copula

圖 4 先償分券信用價差之敏感度分析



Gaussian Copula



double-t Copula

風險因子負載係數愈大代表違約相關性愈大，資產同時存活與同時違約之機率相對上升，已實現損失侵蝕高順位分券之機率因而增加。而回復率(資產於發生違約時，其殘餘價值(residual value)佔原本價值之百分比)在實證文獻中(例如Frey and McNeil (2003))的觀察向來與違約率呈現反向的關係。在市場景氣低迷時，不但可觀察到違約的家數明顯增加，且其資產之殘餘價值相對低迷。因此回復率之增加會反映在違約所造成之損失(loss

given default)減少，債權群組之累積損失因而降低。權益分券因其所承擔之信用風險為契約早期個別家數違約之風險，已實現損失之上升相對減低了其風險承擔之不確定性，因此與分券信用價差為反向關係；而其損失承受程度將直接受益於債權群組累積損失之減少，分券信用價差因而與回復率呈現正向關係。先償分券之風險特徵與權益分券相反，因此其信用價差與違約回復率呈反向關係而與風險因子負載係數呈正向關係。而次償分券因受市場風險與個別違約風險的交互作用最甚，兩參數對於其信用價差之影響呈現不一致的現象。

二、合成型擔保債權憑證之風險分析

本小節以第參節所定義之風險衡量指標，分別在 Gaussian copula 與 double-t copula 之連繫結構假設下，分析各分券之風險特徵。

(1) 以期望損失為分券風險衡量指標

表 4 列出在因子模型－Gaussian copula 與 double-t copula 兩種因子連繫結構下，各分券在到期日時損失金額的期望值。

表 4 期望損失（單位：百萬元）

	債權群組	權益分券	次償分券甲券	次償分券乙券	先償分券
Gaussian copula	2.9262	1.5301	0.6497	0.3985	0.3446
double-t copula	2.9302	1.7082	0.5244	0.2748	0.4192

由於各分券的發行金額並不相同，因此損失金額的期望值無法用來衡量各分券相對風險的大小。以表 4 為例，在 Gaussian copula 之下，次償分券乙券與先償分券在契約到期日的期望損失金額分別為 39.85 萬美元與 34.46 萬美元，雖然在絕對金額上差異不大，但兩分券的發行金額分別為 4 百萬美元與 9 千萬美元，相差甚多；同樣的，在 double-t copula 之下，次償分券乙券與先償分券在期末的期望損失金額分別為 27.48 萬美元與 41.92 萬美元，雖然先償分券的期望損失較次償分券乙券大，但如果考慮兩分券的名目本金後會發現，先償分券的風險較次償分券乙券小得多。

由此可見，雖然分券的期望損失廣泛被信評公司視為一項審定信用評

等重要的風險衡量指標，但是並無法真實反映出擔保債權憑證分券之間相對風險之大小。因此本文採用期望損失率的觀念，利用期望損失佔本金的比例來比較各分券之相對風險。

表 5 期望損失率（%）

	債權群組	權益分券	次償分券甲券	次償分券乙券	先償分券
Gaussian copula	2.93	51.00	21.66	9.96	0.38
double-t copula	2.93	56.94	17.48	6.87	0.47

表 5 顯示，在 Gaussian copula 下，權益分券的投資人在契約到期時會有 51%的預期本金損失，次償分券甲券與次償分券乙券分別有 21.66%與 9.96%的期望損失率，相較於債權群組 2.93%的期望損失率，顯現出擔保債權憑證分券高報酬高風險的特性。由於先償分券擁有高達 10%的次順位信用保護層，該分券在契約到期日只有 0.38%的期望損失率，該分券的風險甚至低於債權群組本身的風險，因此先償分券的信用價差較債權群組整體之信用價差小。

在 double-t copula 下，權益分券與先償分券之期望損失率將高於採用 Gaussian copula 假設所得到之結果，至於次償分券的期望損失率，則小於 Gaussian copula 假設下所得到的期望損失率，此結果顯示因子模型在 double-t copula 連繫結構假設下，權益分券與先償分券所面對的風險相對於 Gaussian copula 假設下更大，因此由 double-t copula 所求得之權益分券與先償分券的合理信用價差亦相對較高；依同樣的分析模式可知，在 double-t copula 假設下，次償分券面對的風險相對較低，因此會有較低的信用價差。

除了分券期望損失率之外，若以債權群組之期望損失率為基礎，可進一步求得分券期望損失的風險槓桿倍數(leverage)。我們用債權群組在各時點之期望損失率為單位，計算分券在各時點下之期望損失率相對於債權群組期望損失率之倍數，作為另一項衡量分券之間相對風險的指標。我們將不同分券在各時點之期望損失槓桿倍數列於表 6。

表 6 顯示在 Gaussian copula 下，權益分券在契約到期日的槓桿倍數高達 17.43，相較於其他分券 0.13 到 7.40 不等的槓桿倍數，充分展現出權益分券高風險的特性。隨著時間的經過，權益分券的槓桿倍數呈現逐漸下降的趨勢，表示權益分券在契約期間的前期所面對的風險較契約之後期為大；反觀兩個次償分券的槓桿倍數則隨著時間經過而逐漸上升，表示次償分券在契約期間的後半段所面臨的風險相對較大。至於先償分券在契約期間內的槓桿倍數並無太大改變，仍然呈現其低報酬低風險之特性。

在 double-t copula 下，隨著時間經過，權益分券的槓桿倍數呈遞減型態，其他分券的槓桿倍數則會遞增，與 Gaussian copula 假設下所得到之結果一致。由此可觀察到權益分券與先償分券在 double-t copula 下的風險較 Gaussian copula 下的風險高，分別為 19.43 與 0.16。在契約前期，權益分券的相對風險較高，肇因於債權群組中前 3%累積違約金額會先由權益分券承擔，換言之，權益分券在契約前期會承擔大部分的損失，而當累積違約金額超過 3%的債權群組本金時，次償分券才開始遭受損失，因此次償分券大多承擔契約中後期的債權群組資產違約的損失。

當債權群組中資產發生違約，權益分券首先蒙受損失，因此表 6 中權益分券的槓桿倍數隨時間遞減的原因是因為已實現之損失(realized loss)使得權益分券對於損失發生的不確定性相較於其他分券變得較低。對於次償分券與先償分券而言，由於權益分券能承擔的損失有限，隨時間經過，權益分券的本金因損失發生而逐漸減少，保護層的大小縮減，造成其他分券對於發生損失的不確定性提高，因此槓桿倍數會隨時間增加呈現上升的趨勢。

表 6 之結果提供了投資人(信用保護賣方)各分券的避險訊息。對於權益分券的投資人而言，主要需規避標的資產過早違約的風險：若標的資產的違約發生於契約前期，權益分券的持有人在尚未收到足夠的信用價差之前，本金便可能遭受損失，但標的資產的違約若發生於契約後期，則之前所收取的信用價差也許可以彌補權益分券在本金上的部分損失。因此對權益分券投資人而言，主要需規避標的資產於契約前期違約之風險。同理可推論次償分券的投資人，主要需規避的風險為契約後期標的資產的違約風險。

表 6 期望損失的槓桿倍數

時點	權益分券		次償分券甲券		次償分券乙券		先償分券	
	Gaussian	doublt t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t
3個月	30.93	31.67	1.85	0.87	0.32	0.36	0.004	0.01
6個月	29.27	30.01	2.93	1.37	0.63	0.60	0.009	0.04
9個月	27.93	28.95	3.72	1.73	0.91	0.73	0.02	0.06
1年	26.78	28.02	4.33	2.11	1.16	0.86	0.02	0.07
1年3個月	25.78	27.37	4.82	2.39	1.39	0.95	0.03	0.08
1年6個月	24.88	26.55	5.23	2.77	1.60	1.07	0.04	0.09
1年9個月	24.07	25.94	5.57	3.06	1.80	1.17	0.04	0.09
2年	23.32	25.30	5.86	3.37	1.98	1.27	0.05	0.10
2年3個月	22.64	24.74	6.11	3.64	2.15	1.36	0.06	0.10
2年6個月	22.01	24.13	6.33	3.93	2.30	1.46	0.06	0.11
2年9個月	21.42	23.60	6.51	4.19	2.45	1.55	0.07	0.12
3年	20.87	23.08	6.68	4.43	2.58	1.64	0.08	0.12
3年3個月	20.35	22.52	6.82	4.68	2.71	1.74	0.08	0.13
3年6個月	19.86	22.06	6.94	4.89	2.83	1.83	0.09	0.13
3年9個月	19.40	21.62	7.05	5.09	2.94	1.91	0.10	0.13
4年	18.97	21.13	7.14	5.30	3.04	2.00	0.11	0.14
4年3個月	18.55	20.73	7.22	5.46	3.14	2.08	0.11	0.14
4年6個月	18.16	20.26	7.29	5.65	3.23	2.18	0.12	0.15
4年9個月	17.79	19.85	7.35	5.81	3.32	2.26	0.12	0.15
5年	17.43	19.43	7.40	5.97	3.41	2.34	0.13	0.16

(2) 以非預期損失為分券風險衡量指標

非預期損失即預期以外之損失金額，該金額通常高出期望損失許多，代表重大損失情況下的損失金額。根據第參節的模型設定，本文所採用的非預期損失定義為「各分券期望損失加上一個損失金額的標準差」，並以此為基礎分析各分券之相對風險。

其他常見的非預期損失的定義，如各分券損失的風險值(Value-at-Risk, VaR) 並不適合用來定義分券的非預期損失，因為在這個例子中，權益分券與次償分券甲券遭受完全損失的機率太大，因此本文以損失金額標準差為基礎來計算非預期損失。表 7 列出債權群組與各分券於契約到期日時的非預期損失金額：

表 7　非預期損失（單位：百萬元）

	債權群組	權益分券	次償分券甲券	次償分券乙券	先償分券
Gaussian copula	7.1252	2.7616	1.7910	1.4963	2.2130
double-t copula	7.5615	2.813	1.5478	1.2031	3.3477

由非預期損失的定義可知，債權群組的非預期損失並不會等於四個分券非預期損失之總和，亦即非預期損失不具有相加性。由於各分券的非預期損失值和期望損失值類似，都未考慮分券的名目本金值，在不具有相同比較基礎的原因下，非預期損失也不適合用於衡量分券的相對風險。為比較各分券相對風險的大小，本文同樣將非預期損失金額轉換成非預期損失率以衡量此相對風險。表 8 為債權群組與各分券於契約到期日之非預期損失率：

表 8　非預期損失率（%）

	債權群組	權益分券	次償分券甲券	次償分券乙券	先償分券
Gaussian copula	7.13	92.05	59.70	37.41	2.46
double-t copula	7.56	93.77	51.60	30.08	3.72

由表 8 之結果可知，在 Gaussian copula 之下，非預期損失將使權益分券遭受高達 92.05%的本金損失，而兩個次償分券與先償分券亦將分別遭受 59.7%、37.41%與 2.46%的本金損失。相較於先前所計算之期望損失率，次償分券和先償分券損失率增加的幅度較權益分券為大，尤其當非預期損失發生於期末時，權益分券會因在之前已遭受部分或全部損失，而降低其保護次償分券的能力，此時權益分券無法吸收之損失將依序由兩個次償分券和先償分券承擔損失之機率大增，因此這三個分券在非預期損失發生時，皆面對了較正常情況下多出一倍以上的風險。

當因子連繫結構改採 double-t copula 時，本文發現，權益分券與先償分券的非預期損失率同樣較 Gaussian copula 所得到之結果為大，而次償分券的非預期損失率則較小，此結果與利用期望損失率衡量分券相對風險時所得的結果一致。

若以各時點債權群組之非預期損失率為基礎，則可求得各分券非預期損失的槓桿倍數。我們以債權群組在各時點之非預期損失率為單位，計算各分券非預期損失率相對於債權群組非預期損失率的倍數，即可求出表 9 的結果。根據表 9，在非預期損失發生的情況下，權益分券的槓桿倍數較先前利用期望損失率所求得的槓桿係數為低，但同樣隨時間的經過而逐漸下降，兩個次償分券與先償分券的槓桿倍數則較正常情況下為高，同樣隨著時間的經過逐漸上升。至契約到期日時，四個分券之非預期損失槓桿倍數分別為 12.92、8.38、5.25 與 0.35，各分券間的相對風險差異會縮小，表示在非預期損失發生時，即使是求償順位較優先的分券亦可能遭受重大的損失。

在 double-t copula 之下，同樣會呈現權益分券的非預期損失槓桿比率隨著時間經過遞減、其他分券隨著時間遞增的特性。即使以非預期損失為風險衡量的基礎，double-t copula 下的權益分券與先償分券風險仍相對較 Gaussian copula 之下為大，至於次償分券的風險則相對較小。

在兩種因子連繫結構假設下，權益分券之相對風險皆隨著時間經過不增反減，其原因可解釋為非預期損失的發生造成大量之「已實現」損失，因此權益分券殘存的部分本金，對於損失發生的不確定性變得較低；至於次償分券，則因為權益分券吸收損失的能力變小，使得次償分券對於損失的不確定性大幅提高，因此在契約後期的相對風險較高。綜合上述結果，本文發現與其他分券相比，權益分券對於非預期損失的發生較不敏感，因此相對風險增加的幅度較其他分券小。

綜合以上所述，當違約事件發生，債權群組之已實現損失(realized loss)對於各分券的相對風險有不同程度的影響。已實現損失雖然對權益分券造成損害，但卻同時降低了權益分券發生損失之不確定性。反觀次償分券，當已實現損失侵蝕其次順位信用保護層(subordination level)時，會增加其損失發生的機率，相對風險因而提高，直到已實現損失開始發生於次償分券時，次償分券才會因發生損失之不確定性降低，產生相對風險下降的情形。表 9 顯示，當非預期損失發生時，權益分券的槓桿倍數較先前利用期望損失率所求得的槓桿倍數低，而且同樣隨著時間的經過逐漸下降，兩個次償分券與先償分券的槓桿倍數則較正常情況下高，同樣隨著時間的經過逐漸上升。至契約到期日時，四個分券之非預期損失槓桿倍數分別為 12.92、

8.38、5.25 與 0.35，各分券相對風險的差異縮小，表示在非預期損失發生時，即使是求償順位較優先的分券亦可能遭受重大的損失。

三、合成型擔保債權憑證分券之避險分析

對合成型擔保債權憑證分券避險時，分券持有人可依據所要規避的風險類型，選擇市場上現有的信用違約交換指數或是單一資產之信用違約交換(single-name credit default swap)來進行避險。若以信用違約交換指數當作避險工具，所要規避的是總體環境變動造成標的資產信用價差同時改變的風險；而以單一資產信用違約交換為避險工具時，主要規避的是特定標的信用價差變動以及違約的風險，兩種不同的避險工具在避險的成本與效果上有很大的差異。以下將在 Gaussian copula 與 double-t copula 兩種因子聯繫結構下，求算各分券的避險參數與分析避險成本，並比較不同避險策略所產生的效果。

近年來市場上出現許多標準化的信用違約交換指數型商品，如 DJ CDX NA 和 DJ iTraxx Europe 等，當合成型擔保債權憑證群組的標的是這些信用違約交換指數時，投資人可直接利用該指數進行避險，並透過第參節的模型與避險參數的定義，求算合成型擔保債權憑證各分券之避險比例(tranche Delta)。

表 9　非預期損失的槓桿倍數

時點	權益分券		次償分券甲券		次償分券乙券		先償分券	
	Gaussian	doublt t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t
3 個月	27.45	26.19	6.92	5.59	2.78	3.56	0.09	0.16
6 個月	24.98	21.42	7.72	5.26	3.38	3.47	0.12	0.36
9 個月	23.26	19.62	8.11	5.18	3.74	3.36	0.15	0.42
1 年	21.91	18.52	8.35	5.24	4.00	3.32	0.17	0.45
1 年 3 個月	20.80	17.91	8.50	5.33	4.20	3.31	0.19	0.46
1 年 6 個月	19.85	17.24	8.60	5.48	4.36	3.34	0.20	0.47
1 年 9 個月	19.02	16.78	8.66	5.61	4.50	3.37	0.22	0.47
2 年	18.28	16.33	8.69	5.75	4.61	3.41	0.23	0.47
2 年 3 個月	17.62	15.93	8.71	5.88	4.71	3.45	0.24	0.48
2 年 6 個月	17.01	15.52	8.72	6.01	4.80	3.50	0.25	0.48
2 年 9 個月	16.46	15.16	8.71	6.13	4.87	3.55	0.27	0.48
3 年	15.95	14.81	8.69	6.24	4.94	3.60	0.28	0.48
3 年 3 個月	15.48	14.44	8.67	6.35	4.99	3.65	0.29	0.48
3 年 6 個月	15.04	14.13	8.64	6.43	5.05	3.70	0.30	0.48
3 年 9 個月	14.63	13.84	8.60	6.51	5.09	3.74	0.30	0.48
4 年	14.25	13.52	8.56	6.59	5.13	3.79	0.31	0.49
4 年 3 個月	13.89	13.26	8.52	6.65	5.17	3.84	0.32	0.49
4 年 6 個月	13.55	12.94	8.48	6.72	5.20	3.89	0.33	0.49
4 年 9 個月	13.23	12.68	8.43	6.77	5.23	3.93	0.34	0.49
5 年	12.92	12.40	8.38	6.82	5.25	3.98	0.35	0.49

當債權群組期初的平均信用價差增加一個基點時，各分券與債權群組的市場價值(mark-to-market value)會產生負向的變動，且各分券變動的幅度並不相同。我們利用分券與債權群組的相對價值變動率來計算各分券之避險比例，結果如表 10 所示。當債權群組的平均信用價差增加一個基點時，權益分券所受到的影響最大，其次是次償分券，而先償分券所受到的影響最小，其市場價值變化幅度甚至小於債權群組本身的市場價值變化幅度。在 Gaussian copula 下，權益分券期初的 Delta 為-15.5547，代表若要完全規避債權群組中標的資產信用價差變動的風險，投資人須於買入分券的同時，「賣出」相當於權益分券本金 15.5547 倍金額的標的信用違約交換指數。避險成本即為建立此避險部位所必須於每期支付的信用價差，除定期支付固定的信用價差外，避險者還須遵守該指數型商品有關結算與保證金繳交之相關規範。

表 10 避險參數－分券 DELTA（變動一個基點）

	市場價值變動（百萬元）		價值變動率（%）		分券 Delta	
	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t
權益分券	-0.0200	-0.0235	-0.6667	-0.7833	-15.5547	-18.5014
次償分券甲券	-0.0118	-0.0117	-0.3933	-0.39	-9.1456	-9.1920
次償分券乙券	-0.0087	-0.0066	-0.2175	-0.165	-5.0803	-3.9118
先償分券	-0.0096	-0.0093	-0.0107	-0.0103	-0.2503	-0.2430
標的資產組合	-0.0428	-0.0424	-0.0428	-0.0424	N/A	N/A

除了分券 Delta 外，本文進一步求算分券的 Gamma，如表 11 所示。分券的 Gamma 定義為債權群組的平均信用價差變動一個基點時，各分券 Delta 變動的程度，因此對於避險者而言，Gamma 值是從事避險時另一項重要的參考指標。

表 11 避險參數－分券 Gamma

	信用價差變動 1 bp 分券 Delta		信用價差變動 10 bp 分券 Delta		分券 Gamma	
	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t	Gaussian	double-t
權益分券	-15.55	-18.50	-14.83	-17.33	0.08	0.13
次償分券甲券	-9.15	-9.19	-9.07	-9.33	0.0089	-0.0155
次償分券乙券	-5.08	-3.91	-5.18	-4.12	-0.0111	-0.0233
先償分券	-0.25	-0.24	-0.27	-0.26	-0.0022	-0.0022

表 11 顯示，在兩種因子連繫結構下，權益分券有正的 Gamma 值，表示當信用價差擴大的幅度愈大，分券的 Delta 絕對值會愈小，可以解釋為分券已實現的損失增加導致發生損失的機率降低，所需的避險部位因此減少。次償分券乙券與先償分券的 Gamma 值為負，代表當信用價差擴大的幅度越大，分券的 Delta 絕對值會隨之變大，可解釋為分券發生損失的機率增加，因此所需的避險部位變大。次償分券甲券在兩種模型下的 Gamma 值一正一負，則是因為兩種模型對於該分券的風險刻劃有所不同，在 Gaussian copula 下次償分券甲券的風險較 double-t copula 下大，因此在 Gaussian copula 下次償分券甲券會呈現出部分權益分券的風險特質－Gamma 為正值。

當債權群組的信用違約交換指數存在於市場時，分券的持有人可以透過該指數進行完全的避險，然而利用信用違約交換指數進行避險是一個非常昂貴的避險策略，以下將分析利用信用違約交換指數避險的效果與所需花費的成本。我們將 Gaussian copula 因子結構下的避險結果列於表 12，double-t copula 因子結構下的避險結果列於表 13 中。表中的第二列為各分券的期初名目本金金額，第三列為各分券的信用價差，各分券的 Delta 值列於第四列，第五列的 PV01 值代表債權群組中資產之平均信用價差變動一個基點時各分券 1 元本金的價值變動。首先我們將各分券的 Delta 值乘以各分券的期初名目本金，便可算出各分券所需的避險部位金額(如表中第六列所示)。為了探討避險的效果，我們在債權群組的平均信用價差變動一個基點的假設下，分別計算各分券之市場價值(mark-to-market)的變化，與避險部位的市場價值變化，列於表中的第七、第八列，其中，將分券期初部位乘以分券之 PV01 值可得到分券的市場價值變化量；將避險部位乘上債權群組的 PV01 值可求得避險部位的市場價值變化。最後，我們將各分券的收入(即各分券的信用價差乘上各分券的名目本金)扣除掉避險的成本(即群組的信用價差乘上各分券的避險部位)，求算出表中第九列的分券淨收入，最後我們將分券淨收入除以該分券期初的名目資產，可得到此分券的報酬率，我們將此報酬率以基點的方式，表示於表中的最後一列。例如在 Gaussian copula 下，權益分券的 Delta 為-15.55，代表若要完全規避 3 百萬本金的違約風險，必須於買入分券時，賣出約 46.66 百萬元的信用違約交換指數。將權益分券之 PV01 乘上權益分券之期初部位，可得到權益分券因標的資產信用價差變動所造成之市場價值改變-20,000，而避險部位因信用價差變動所造成的價值改變為+20,000，避險部位價值的增加恰好抵銷權益分券市場價值減損的

部分，因此按照避險比例 Delta 進行避險可以達到完全避險的效果。在避險的成本上，權益分券的本金每年可以收到 1487 bp 的信用價差，而避險部位的本金每年需支付 60 bp 的信用價差，將分券收入扣除避險成本後，避險後的權益分券本金每年可以收到 553.7 bp 的信用價差，避險成本相當於每年 933.3 bp，由此可見 Delta 避險是一個成本相當高的避險策略。

在 double-t copula 下，若於買入分券時賣出約 55.5 百萬元的標的信用違約交換指數，則可完全規避標的信用違約交換指數信用價差變動之風險。在 double-t copula 的假設下，權益分券每年可以收到 1706 bp 的信用價差，而避險部位須支付每年 60 bp 的信用價差，分券收入扣除避險成本後，權益分券每年可收取 595.9 bp 的信用價差，相當於每年 1110.1 bp，與 Gaussian copula 相比，權益分券在 double-t copula 之下的避險成本較高。

在 Gaussian copula 下，次償分券甲券在期初的 Delta 約為(-9.15)，代表若要完全規避 3 百萬本金的信用風險，須賣出約 27.44 百萬元之標的信用違約交換指數。避險成本過高仍然是利用信用指數從事 Delta 避險的最大問題，表 12 顯示，即使次償分券甲券規避了債權群組信用價差變動的風險，過高的避險成本仍將導致分券的淨收入為負值。避險後次償分券甲券每年需支付 74.7 bp 的信用價差，相當於每年 548.7 bp 的避險成本。

表 13 顯示，在 double-t copula 下，次償分券甲券每年可收到的信用價差只有 364 bp，但避險成本每年卻高達 551.5 bp，使得避險後次償分券甲券的淨收入為負，每年需支付 187.5 bp 的信用價差。其他分券之分析方式亦相同，在此不再贅述。

綜合上述之結果，賣出標的信用違約交換指數來進行 Delta 避險雖然可以達到完全避險，但過高的避險成本將使次償分券和先償分券在避險後的淨收入為負，並不是一個好的避險策略，只有對權益分券做 Delta 避險後，避險後的投資組合仍能維持正的淨收入。我們建議分券的持有人賣出單一資產信用違約交換，以規避特定標的信用價差變動的風險。對於單一資產信用違約交換之避險參數的求算，同樣可透過機率勺斗法則，計算特定信用違約交換信用價差變動對於分券市場價值之影響，並計算該信用違約交換本身之市場價值變動，最後透過兩者本金之相對價值變動程度求出避險比例 Delta 值。一般而言，分券對於單一信用違約交換之價差變動敏感度會較該信用價差本身為小，因此 Delta 值通常小於 1，故對於次償分券與先償

分券的投資人而言，利用單一資產信用違約交換避險可花費較低之避險成本來達到一定之避險效果。

表 12 Gaussian copula 因子結構下的避險結果

	權益分券	次償分券甲	次償分券乙	先償分券
期初部位（百萬元）	3	3	4	90
信用價差（bp）	1487	474	202	7
避險比例 (Tranche Delta)	-15.5547	-9.1456	-5.0803	-0.2503
PV01	0.006667	0.003933	0.002175	0.000107
避險部位（百萬元）	46.6641	27.4368	20.3212	22.527
價值變動 (↑1 bp)	-20,000	-11800	-8700	-9630
避險價值變動 (↑1 bp)	20000	11800	8700	9630
分券總價值	166115.4	-22420.8	-41127.2	-72162
分券淨收入 (bp)	553.718	-74.736	-102.818	-8.018
避險成本	933.282	548.736	304.818	15.018

表 13 double-t copula 因子結構下的避險結果

	權益分券	次償分券甲	次償分券乙	先償分券
期初部位（百萬元）	3	3	4	90
信用價差（bp）	1706	364	137	9
避險比例 (Tranche Delta)	-18.5014	-9.192	-3.9118	-0.243
PV01	0.007833	0.0039	0.00165	0.000093
避險部位（百萬元）	55.5042	27.576	15.6472	21.87
價值變動 (↑1 bp)	-20,000	-11800	-8700	-9630
避險價值變動 (↑1 bp)	20000	11800	8700	9630
分券總價值	178774.8	-56256	-39083.2	-50220
分券淨收入 (bp)	595.916	-187.52	-97.708	-5.58
避險成本	1110.084	551.52	234.708	14.58

伍、結　論

本文首先在條件獨立的假設下，以 Hull and White (2004)所提出之機率杓斗法則建構合成型擔保債權憑證債權群組之損失分配，進而求得分券信用價差之半解析式(semi-analytic)評價模型。和常態分配因子聯繫結構下的評價結果相比，本研究發現，當系統性風險因子服從機率分配函數尾端較厚之 Student-t 分配時，將使權益分券信用價差下降而先償分券信用價差上升，其效果類似於資產間相關性增加；當非系統性風險因子服從 Student-t 分配時，則使權益分券信用價差上升而先償分券之信用價差下降，效果類似於資產間相關性降低。當系統及非系統因子皆服從尾端較厚的 Student-t 分配時，對於權益分券而言，非系統性風險因子對於分券之影響相對大於系統性風險因子，因此評價結果顯示其信用價差因而加大；先償分券受系統性風險因子之影響相對較大，故評價結果顯示其信用價差因而下降。近年實務界評價擔保債權憑證之基準為 Gaussian copula 因子模型，然而假設因子負載係數為單一常數時，Gaussian copula 之評價結果往往會有權益分券與先償分券價差較市場報價低，而次償分券價差較市場報價高的情形。本文發現若使用 double-t copula 因子連繫結構來進行合成型擔保債權憑證之評價，會使模型求算出的理論價格與市場上所觀察到的價格更接近。

本文進而提供異質性敏感度分析，比較兩種因子連繫結構假設－Gaussian copula 與 double-t copula 之下，風險因子負載係數(factor loadings)與回復率(recovery rate)之於分券信用價差的影響。研究結果發現，權益分券與先償分券在兩種單因子連繫結構之下，風險因子負載係數與回復率對於分券信用價差之影響類似：對於權益分券而言，信用價差與違約回復率呈正向關係而與風險因子負載係數係數呈反向關係；對於先償分券而言，信用價差與違約回復率呈反向關係而與風險因子負載係數呈正向關係。反觀次償分券，在不同因子連繫結構之下，其信用價差受風險因子負載係數與回復率變動之影響則呈現不一致的現象。

其次本文求算並分析不同的分券風險衡量指標。研究結果顯示，分券之已實現損失反而會使分券未來發生損失之風險下降，而分券的次順位保護層遭受損耗會使分券遭受損失的風險上升。以權益分券為例，由於其率

先承擔信用違約交換債權群組之違約損失，因此在契約前期所面對之風險較高，至於契約後期則因部分損失已發生，使得分券未來發生損失的不確定性降低，故風險較低；而以權益分券為其次順位保護層的次償分券，在權益分券隨時間經過遭受違約損失後，次償分券遭受損失之可能性提高，因此次償分券的風險將隨著時間經過而逐漸上升，直到其本身亦開始遭受損失時，風險才會因為部分損失已實現而降低。先償分券的風險在契約期間並未發生太大改變，仍維持其低風險低報酬之特性。

最後，本文在所建立之半解析式模型下進行分券避險參數之求算與避險分析。研究發現合成型擔保憑證的投資人若在買入分券時，依避險比例賣出市場上現有之標的信用指數來避險，雖可完全消除信用價差變動之風險，卻可能因避險成本過高，使次償分券和先償分券的投資人有負的淨收入，因此並非一個可行的避險方式。本文建議，投資人在購入分券時，可利用賣出單一資產信用違約交換進行避險，並選擇 Delta 值較高之單一信用違約交換作為避險工具以期達到避險的目的。因為避險參數實為分券對於其信用價差變動之敏感程度，雖然利用單一信用違約交換來避險並無法完全消除債權群組信用價差變動之風險，但因成本相對較低，且若能正確選擇對分券敏感度較高之信用違約交換作為避險工具，仍然能夠達到部分避險效果。

參考文獻

1. Altman, E.I., B. Brady, A. Resti and A. Sironi, 2005, "The link between default and recovery rate: theory, empirical evidence and implications," *Journal of Business* 78, 2203-2228.

2. Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu, 2003, "All your hedges in one basket," *Risk Magazine*, November 2003.

3. Andersen, L. and J. Sidenius, 2004, Extensions to the Gaussian copula：random recovery and random factor loadings (working paper, Bank of America).

4. Black, F. and J. C. Cox, 1976, "Valuing corporate securities：some effects of bond indenture provisions," *Journal of Finance* 31, 351-367.

5. Bluhm, C., L. Overbeck and C. Wagner, 2002, An introduction to credit risk modeling (Chapman and Hall).

6. Burtschell, X., J.-P. Laurent. and J. Gregory, 2005, A comparative analysis of CDO pricing models (working paper, BNP-Paribas).

7. Cifuentes, A. and G. O'Connor, 1996, "The binomial expectation method applied to CBO/CLO analysis," *Moody's Special Report*, Dec 13th .

8. Duffie, D. and K. Singleton, 1999, "Modeling term structures of defaultable bonds," *Review of Financial Studies* 12, 687-720.

9. Frey, R. and McNeil, A. J., 2003, "Dependent defaults in models of portfolio credit risk," *Journal of Risk* 6(1), 59-92

10. Gibson, M., 2004, "Understanding the risk of synthetic CDOs", *FEDS Discussion Papers*, no. 2004-36, Board of Governors of the Federal Reserve System.

11. Greenberg, A., D. O'Kane and L. Schloegl, 2004, "LH+: a fast analytical model for CDO hedging and risk management," *Lehman Brothers*

Quantitative Credit Research Quarterly Report.

12. Hellqvist, M., 2005, Comparison of approximation methods for combinations of differently distributed random variables (Mat-2.108 Independent research project in applied mathematics, Helsinki University of Technology).

13. Hull, J. and A. White, 2004, "Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without Monte Carlo simulation," *Journal of Derivatives* 12(2), 8-48.

14. Hull, J. and A. White, 2005, The perfect copula (working paper, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto).

15. Jarrow, R., D. Lando, and S. Turnbull, 1997, "A Markov model for the term structure of credit spread," *Review of Financial Studies* 10, 481- 523.

16. Jarrow, R. and S. Turnbull, 1995, "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance* 50, 53- 85.

17. Jarrow, R. and F. Yu, 2001, "Counterparty risk and the pricing of defaultable securities," *Journal of Finance* 56, 1765- 1799.

18. Laurent, J.P. and J. Gregory, 2003, Basket default swaps, CDO's and factor copulas (working paper, ISFA Actuarial School, University of Lyon).

19. Laurent, J.P. and J. Gregory, 2004, "In the core of correlation," *Risk magazine*, October, 87-91.

20. Li, D. X., 2000, On default correlation: A copula function approach (working paper, The RiskMetrics Group), 99-07.

21. Merton, R., 1974, "On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates," *Journal of Finance* 29, 449-470.

22. Peretyatkin, V., 2006, HPM+: a fast analytical model to pricing synthetic CDOs (working paper, Imperial College and Rabobank International).