第三章 相關模型探討

3.1 Markowitz 模型

Markowitz（1952）**提出建立投資組合的重要原則：希望最大的報酬和最小的風險。首先，定義了報酬為個別資產期望報酬的線性組合**

$$r(x_1,\ldots,x_n)=E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)=\sum_{j=1}^{n}E(R_j)x_j$$

其次定義風險為期望報酬的變異數

$$\begin{aligned}s^2(x_1,\ldots,x_n)&=E\{\sum_{j=1}^{n}R_j x_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_j x_j)\}^2\\&=\sum_{j=1}^{n}x_j^2 s_j^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n}x_i x_j s_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j s_{ij}\end{aligned}$$

其中， $x_1,\ldots,x_n$ **為** n **個資產的分配金額，** R_j **為資產** j **的報酬率，** s_j^2 **為資產** j **的報酬變異數，** s_{ij} **為資產** i **與資產** j **的共變異數，即** $s_{ij}=E[(R_i-r_i)(R_j-r_j)]$ **，** $i=1,\ldots,n$ **，** $j=1,\ldots,n$ **。** Markowitz **根據其所提的原則所建立的數學規劃模型如下：**

<模型 1>

min $\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}x_i x_j$

s.t. $\quad \sum_{j=1}^{n}r_j x_j \geq rC \qquad (3.1)$

$\quad \sum_{j=1}^{n}x_j = C \qquad (3.2)$

$\quad x_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n \qquad (3.3)$

參數：

n **投資資產總個數**

s_{ij}　　資產 i 與資產 j 的共變異數，即 $s_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$

r_j　　資產 j 的報酬率期望值，即 $r_j = E(R_j)$

r　　投資者希望得到的最小報酬率

C　　原有資產總額

變數：

x_j　　資產 j 的投資金額

此模型之目標函數為資產 i 與資產 j 之間的共變異數最小，即希望投資組合的風險最小，（3.1）式表示各資產期望報酬的線性組合加總要不小於期望的價值，（3.2）式表示整個資產分配的總和為 C，（3.3）式表示資產 j 的配置大於零。

Markowitz（1959）也提出可以將報酬的標準差（standard deviation）作為投資組合的風險測度，即

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{E\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)\}^2}$$

由以上可知風險函數 $s^2(x)$ 與 $s(x)$ 只有開根號的差別，因此，模型 1 並沒有因風險函數的不同而有任何的改變。

這個模型的目標函數為 x 的二次式，若加入太多的限制條件，會使得該模型不容易求得最佳解。後來的學者在此問題上，發展目標函數為線性函數的模型以避免遭遇二次函數的難題。

3.2　Konno-Yamazaki模型

Konno 和 Yamazaki（1991）的模型不採用 Markowitz（1959）的風險函數

$$s(x) = \sqrt{E\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)\}^2}$$

而使用偏差的絕對值為風險函數，其定義如下：

$$w(x) = E\{|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)|\}$$

，此處的 $w(x)$ 為偏差的絕對值函數，其中，x_j 為資產 j 的投資金額，R_j 為資產

j 的報酬率，$j = 1, \ldots, n$。

Konno 和 Yamazaki 在文中提到，當 $(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ 服從多重變異常態分配時，$s(x)$ 與 $w(x)$ 兩種測度有倍數關係。

定理 3.1 (Konno 與 Yamazaki, 1991)：如果 $(R_1, R_2, \cdots, R_n)$ 服從多重變異常態分配，則

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\, s(x)。$$

由上面的定理可知，我們要求最小的 $s(x)$ 就相當於要求最小的 $w(x)$ 一樣。因此，Markowitz 與 Konno 和 Yamazaki 的模型所求出的投資組合，兩者即為相似。Konno 和 Yamazaki 提出的投資組合模型如下：

<模型 2>

$$\min \quad w(x) = E\{|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)|\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

參數：

- n 投資資產總個數
- R_j 資產 j 的報酬率
- r_j 資產 j 的報酬率期望值，即 $r_j = E(R_j)$
- r 投資者希望得到的最小報酬率
- C 原有資產總額
- U_j 投資資產 j 的金額上限

變數：

x_j　　資產 j 的投資金額

模型 2 與模型 1 最大不同處在風險函數的定義，不過目標都是希望建構投資組合的風險最小，並且在限制條件中，對資產 j 的投資金額 x_j 多加金額上限 U_j 的限制，其他條件皆相同。

為了簡化模型 2 的目標函數，我們令 r_{jt} 為 R_j 在時間 t 的報酬率，可得

$$r_j = E(R_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt} \qquad j = 1, \ldots, n$$

所以，模型 2 的目標函數 $w(x)$ 可以改寫成

$$w(x) = E\{|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)|\} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j|$$

之後，我們再令 a_{jt} 為 R_j 在時間 t 的報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 r_j 的差，即

$$a_{jt} = r_{jt} - r_j \qquad j = 1, \ldots, n, t = 1, \ldots, T$$

因此模型 2 可改寫為

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j|$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

經由以上的簡化，目標函數仍不是線性函數，所以引進一組變數 $z_t \geq 0$，令

$$z_t \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j| \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.5}$$

（3.5）式也不是線性函數，將（3.5）式進一步改寫成

$$z_t \geq \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.6}$$

與

$$z_t \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.7}$$

在（3.5**）式中，若**$\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j > 0$**時，則**$z_t \geq \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j$**，即得到（**3.6**）式；反之，若**$\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j < 0$**時，則**$z_t \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j$**，即得到（**3.7**）式。原目標函數可以換成**$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$**，因此模型** 2 **可改寫成下面的等價線性規劃模型：**

<模型 3>

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \tag{3.2}$$

$$z_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.6}$$

$$z_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.7}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

$$z_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.8}$$

參數：

T **歷史資料或預測資料的期數**

n **投資資產總個數**

r_j **資產** j **的報酬率期望值，即**$r_j = E(R_j)$

r **投資者希望得到的最小報酬率**

C **原有資產總額**

a_{jt} R_j 在時間 t 的報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 r_j 的差，即 $a_{jt} = r_{jt} - r_j$

U_j 投資資產 j 的金額上限

變數：

z_t 偏差變數

x_j 資產 j 的投資金額

我們再觀察一下（3.6）式與（3.7）式，在時間 t 時，如果 $\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j > 0$ 時，則（3.7）式為多餘的限制式；反之，若 $\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j < 0$ 時，則（3.6）式為多餘的。因此，Feinstein 和 Thapa（1993）將 Konno 和 Yamazaki (1991)的模型（模型 3）改寫，引進兩組變數分別為 $u_t \geq 0$ 與 $v_t \geq 0$，將（3.6）式和（3.7）式分別減去 $2u_t$ 和 $2v_t$，使這兩式成為恆等式，即

$$z_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j - 2u_t = 0 \qquad t = 1, \dots, T \tag{3.9}$$

$$z_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j - 2v_t = 0 \qquad t = 1, \dots, T \tag{3.10}$$

再將（3.10）式減去（3.9）式，使 z_t 消去，並將其除以 2 可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j - v_t + u_t = 0 \qquad t = 1, \dots, T \tag{3.11}$$

因此，可以把模型 3 改寫成如下：

<模型 4>

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} (u_t + v_t)$$

$$\text{s.t.} \quad u_t - v_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j = 0 \qquad t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C$$

$$0 \le x_j \le U_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$u_t \ge 0, v_t \ge 0 \qquad t = 1, \ldots, T$$

參數：

T	**歷史資料或預測資料的期數**
n	**投資資產總個數**
a_{jt}	R_j **在時間** t **的報酬率** r_{jt} **與平均報酬率** r_j **的差，即** $a_{jt} = r_{jt} - r_j$
r_j	**資產** j **的報酬率期望值，即** $r_j = E(R_j)$
r	**投資者希望得到的最小報酬率**
C	**原有資產總額**
U_j	**投資資產** j **的金額上限**

變數：

u_t	**負偏差變數**
v_t	**正偏差變數**
x_j	**資產** j **的投資金額**

若不考慮 $0 \le x_j \le U_j$ **的限制，則在模型** 3 **中最多有** $2T + 2$ **條限制式，表示解集合中最多有** $2T + 2$ **個** $x_j > 0$ **，經過等價轉換之後，模型** 4 **最多只有** $T + 2$ **條限制式，表示解集合中最多有** $T + 2$ **個** $x_j > 0$ **，因此，可藉由控制** T **的大小來限定** $x_j > 0$ **的數目。**

Konno **和** Yamazaki **提出的風險函數可進一步改寫如下：**

$$w(x) = E\{|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)|\}$$

$$= E\{-\min[0, \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)] + \max[0, \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)]\}$$

觀察上式，前項為小於平均報酬率的部分稱做下層風險（downside risk**），後項為大於平均報酬率的部分稱做上層風險（**upside risk**）。**Konno **和** Yamazaki **在模型**

中，對上層風險和下層風險抱持著相同的看法。然而，實際上，一般人對於上層風險與下層風險可能有不同的見解。因此，Speranza（1993）重新定義出一個風險函數能對這兩種風險視需要給予各自的權重如下：

$$N(x)=E\{-a\ \min[\,0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j)]+b\ \max[\,0,\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j)]\}$$

其中，a 與 b 為任意數，表示權重。

Speranza（1993）在其論文中提到一個有用的結論：

定理 3.2 (Speranza, 1993)：若 $(R_1,\dots,R_n)$ 服從多重變異常態分配，則

$$N(x)=\frac{a+b}{2}w(x)。$$

觀察上述定理可知，當 $a=b=1$ 時，$N(x)=w(x)$，亦即令 $a=b=1$ 時，Speranza（1993）的模型等於 Konno 和 Yamazaki（1991）的模型。

然而，對一般投資大眾來說，上層風險這部分是愈多愈好，只有當報酬低於預期要求時，投資者希望這情形能愈少愈好。因此，呂建鴻（民 91）即針對下層風險來建構投資組合模型，其模型的目標函數要求所有下層風險的總和為最小，其餘的限制條件與前述相同。

3.3 Young 模型

Young（1998）提出一個大中取小的投資組合選擇法，此法依據歷史資料，計算觀測期間某投資組合在不同時間的最大損失, 選取使得個別最大損失為最小值的投資組合，即是大中取小的原則。若應用此原則考慮投資組合報酬的部分，一樣根據歷史資料，計算觀測期間某投資組合在不同時間的最小報酬，選取使得個別最小報酬為最大值的投資組合，即成為小中取大的原則，建構的模型如下：

<模型 5>

$$
\begin{aligned}
\max \quad & m \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ge rC && && (3.1) \\
& \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - m \ge 0 && t = 1, \ldots, T && (3.12) \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j \le C && && (3.13) \\
& x_j \ge 0 && j = 1, \ldots, n && (3.3)
\end{aligned}
$$

參數：

n **投資資產總個數**

r_j **資產 j 的報酬率期望值，即** $r_j = E(R_j)$

r **投資者希望得到的最小報酬率**

C **原有資產總額**

r_{jt} R_j **在時間 t 的報酬率**

變數：

m **投資組合在歷史資料期間 t 裡最小的報酬，即** $m = \min_t \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j$

x_j **資產 j 的投資金額**

此模型之目標函數是希望投資組合在歷史資料期間 t 裡最小報酬的最大值，（3.1）式表示各資產期望報酬的線性組合加總大於等於期望的價值，（3.12）式表示在時間 t 時，投資組合的報酬值大於等於最小的報酬，（3.13）式表示所有資產配置金額不超過原有資產總額，（3.3）式表示資產 j 的配置大於零。

Young **說明了當報酬率的資料是常態分配時，模型所用的風險測度為投資組合報酬中的第一階統計量（**first order statistic**），亦稱為投資組合的下層風險測度，與** Markowitz**（**1952**）提出的變異數測度，相當地一致；然而，在不是常態分配的資料中，**Young **舉例說明採用大中取小的方法，較符合投資者的投資心態，不像** Markowitz **提出在投資組合中要求最小變異數的方法，會違背投資者的**

直覺，因為 Markowitz 為了讓投資組合的變異數最小，卻忽略了高報酬的存在。

Young 所提出的準則，不僅可以使用在報酬率為常態分配時，亦可以適用於報酬率為非對稱的偏態分配中。下一章將採用大中取小的準則，加入符合股票交易現實情形的限制條件於模型中，建立一個混合整數線性規劃的投資組合選擇模型。