第四章 大中取小法的規劃模型

根據前章所述，Markowitz（1952）**提出用報酬的變異數做為投資組合的風險測度，稱為**l_2**風險函數；而** Konno **和** Yamazaki（1991）**則利用偏差的絕對值做為投資組合的風險測度，稱為**l_1**風險函數。本章將以下層風險做為模型的風險測度，此風險測度屬於** Cai（2000）**等人提出的**l_∞**風險函數，並且運用** Young（1998）**提出的“大中取小”原則，考量歷史資料期間某投資組合於不同時點的下層風險，取最大的下層風險作為目標函數，最小化此目標函數以建立投資組合的數學規劃模型。若報酬率符合多重變異常態分配時，最大的下層風險就是報酬率的第一階統計量。這個模型就是尋找最大的第一階統計量（亦即最小的最大下層風險）。而** Markowitz **的模型是尋找最小的報酬變異數，**Konno **和** Yamazaki **的模型則是在歷史資料期間中，尋找投資組合裡頭最小的所有偏差總和。**

4.1 不含實際交易限制的模型

在說明大中取小法的規劃模型之前，我們先討論不含實際交易限制的模型。首先，讓我們回顧一下模型 3**：**

<模型 3>

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \tag{3.2}$$

$$z_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.6}$$

$$z_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \qquad t = 1, \cdots, T \tag{3.7}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

$$z_t \geq 0 \qquad t = 1, \cdots, T \tag{3.8}$$

參數：

T	**歷史資料或預測資料的期數**
n	**投資資產總個數**
r_j	**資產 j 的報酬率期望值，即** $r_j = E(R_j)$
r	**投資者希望得到的最小報酬率**
C	**原有資產總額**
a_{jt}	R_j **在時間** t **的報酬率** r_{jt} **與平均報酬率** r_j **的差，即** $a_{jt} = r_{jt} - r_j$
U_j	**投資資產** j **的金額上限**

變數：

z_t	**偏差變數**
x_j	**資產** j **的投資金額**

在模型 3 中，偏差變數 z_t **需要滿足限制條件（3.6）式與（3.7）式：**

$$z_t \geq \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \ \ldots, T \tag{3.6}$$

與

$$z_t \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \cdots, T \tag{3.7}$$

目標函數為觀測期間中 z_t **的總和。若** $\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j < 0$ **表示下層風險，若** $\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j > 0$ **表示上層風險，此處我們引進一變數** $z \geq 0$**，使得** $z = \max_t z_t$**，即** z **為在時間** t **時，所有下層風險** z_t **的最大值，所以，** z **要滿足**

$$z \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \cdots, T \qquad (4.1)$$

本章所提的大中取小原則就是希望此 z 值越小越好，即為要求個別最大損失為最小值的投資組合，加上其他的限制條件：期望報酬超過投資者所預期的最小報酬率 r，及所有配置的資產金額不超過原有資產總額 C，建構的線性規劃模型的雛形如下：

<模型 A>

$$\min \quad z$$

$$\text{s.t.} \quad z \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \qquad t = 1, \cdots, T \qquad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq rC \qquad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \qquad (4.3)$$

$$0 \leq x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (4.4)$$

參數：

n **投資資產總個數**

a_{jt} R_j **在時間** t **的報酬率** r_{jt} **與平均報酬率** r_j **的差，即** $a_{jt} = r_{jt} - r_j$

r_j **資產** j **的報酬率期望值**

r **投資者希望得到的最小報酬率**

C **原有資產總額**

U_j **投資資產** j **的金額上限**

變數：

z **所有** z_t **中的最大值，即** $z = \max_t z_t$ **，此處的** z_t **為大於等於資產期望報酬與平均報酬之差的線性總和加總的絕對值，即** $z_t \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right|$

x_j **資產** j **的投資金額**

模型 A 的目標函數要求投資組合在觀測期間中不同時點個別最大下層風險的最小值，（4.2）式表示各資產期望報酬的線性組合加總要不小於期望的價值，（4.3）式表示整個資產分配的總和為 C，（4.4）式表示資產 j 的配置以不超過 U_j 的值為上限而且要大於零。

4.2 含實際交易限制的模型

根據上述所提及的模型 A，我們加入實際交易的限制條件於模型中。先討論決策變數 x_j，因為變數 x_j 定義為資產 j 的投資金額，在這裡我們所討論的資產將以股票為主。在台灣股票交易市場中，最小的交易單位為 1000 股，所以，我們應該將 x_j 重新定義為投資股票 j 之最小交易單位的乘數，而且，x_j 必須為整數，所以我們需要加入一條新的限制式為

$$x_j \text{ 是整數} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4.5}$$

而且，（4.1）式也要更改為

$$z \ge -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} P_{jt} x_j \qquad t = 1, \cdots, T \tag{4.1}$$

其中，P_{jt} 表示股票 j 在時間 t 的價格。

令 $\overline{P}_j$ 為購買股票 j 的單位成本（觀測期間股票 j 的平均價格，即 $\overline{P}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P_{jt}$）及 d_j 為固定交易費用比率。因此，（4.3）式改寫如下：

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + d_j)\overline{P}_j x_j = C \tag{4.6}$$

因為 x_j 為整數，不容易剛好滿足像（4.6）式的限制條件，即所要投資的金額完全為原有資產總額。我們放寬此限制條件改寫成（4.7）式與（4.8）式：

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + d_j)\overline{P}_j x_j \le C^U \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(1+d_j)\overline{P}_j x_j \geq C^L \tag{4.8}$$

其中C^U與C^L分別表示可投資總額的上限與下限。

除外，若希望能控制納入投資組合的股票總類數，可加限制條件來控制此股票的選擇與否，我們引進一組二元變數y_j來表示股票 j 的選擇與否，其定義如下：

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{如果股票} j \text{被選擇，即} x_j > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

為了投資組合總類數不超過 N 個，我們加一條限制條件為

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq N \tag{4.9}$$

而且，為了避免投資極小金額於某股票，我們設 L_j (其中 $L_j \geq 0$)為投資股票 j 的最小金額，因此，(4.4) 式可以改寫為

$$L_j \leq \overline{P}_j x_j \leq U_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4.10}$$

其中，$\overline{P}_j$ 表示股票 j 的平均價格。

最後，我們將（4.10）式與二元變數合併成邏輯關係的限制式如下：

$$L_j y_j \leq \overline{P}_j x_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4.11}$$

且

$$\overline{P}_j x_j \leq U_j y_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4.12}$$

因為，若股票j被我們選進投資組合中，則 $y_j = 1$，那（4.11）式與（4.12）式可以合併同（4.10）式一樣；換句話說，若股票 j 沒有被選取到，則 $y_j = 0$，即（4.11）式為$0 \leq \overline{P}_j x_j$ 且（4.12）式為 $\overline{P}_j x_j \leq 0$，也就是 $\overline{P}_j x_j = 0$。

根據以上的討論，本章的大中取小投資組合選擇規劃模型如下：

<**模型 B**>

$$\min \quad z$$

$$\text{s.t.} \quad z \geq -\sum_{j=1}^{n} a_{jt} P_{jt} x_j \qquad t = 1, \dots, T \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \overline{P}_j x_j \geq rC \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + d_j) \overline{P}_j x_j \leq C^U \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + d_j) \overline{P}_j x_j \geq C^L \tag{4.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq N \tag{4.9}$$

$$L_j y_j \leq \overline{P}_j x_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{4.11}$$

$$\overline{P}_j x_j \leq U_j y_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{4.12}$$

$$x_j \text{ 是整數} \qquad j = 1, \dots, n \tag{4.5}$$

$$y_j = \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n \tag{4.13}$$

參數：

n **投資股票總個數**

P_{jt} **股票** j **在時間** t **的價格**

a_{jt} R_j **在時間** t **的報酬率** r_{jt} **與平均報酬率** r_j **的差，即** $a_{jt} = r_{jt} - r_j$

r_j **股票** j **的報酬率期望值**

r **投資者希望得到的最小報酬率**

C **原有資產總額**

d_j **購買股票** j **的固定交易費用比率**

$\overline{P}_j$ **股票** j **的平均價格**

C^U **允許可投資總額的上限**

C^L 允許可投資總額的下限

N 投資組合總類數

L_j 投資股票 j 的最小金額

U_j 投資股票 j 的最大金額

變數：

z 所有 z_t 中的最大值，即 $z = \max_t z_t$ ，此處的 z_t 為大於等於資產期望報酬與平均報酬之差的線性總和加總的絕對值，即 $z_t \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right|$

x_j 投資股票 j 之最小交易單位的乘數

y_j 股票 j 的選擇與否

本節的模型 B 屬於大中取小的資產配置問題，且為混和整數線性規劃模型，其中含有二元變數與整數變數（皆為離散變數），因此，模型 B 應可類歸在 Yu（1998）提出含離散變數的大中取小問題中，例如：最小生成樹問題、資產配置問題、和生產控管問題等，Yu 並證明這些問題都是困難的不確定多項式（NP-hard）問題，並且針對這些問題，提出合適的演算法求解。所以，模型 B 也可歸類為 NP-hard 的問題。而且，若問題的變數與限制式過多時，直接以枝界法求解將費時太長或甚至無法求得答案。我們將於第五節發展啟發式演算法求解。