第三章 數學模型探討

本章探討相關數學模型的演進，茲將這些模型分為投資組合與指數基金兩大部分來介紹。第一節以投資組合的數學模型為主： Markowitz (1952)**提出** MV **模型奠定了投資組合選擇問題的基礎，隨後許多學者致力發展線性規劃模型，其中以** Konno **與** Yamazaki (1990)**的** MAD **模型較具代表性，文中亦介紹相關的目標規劃模型及其對偶模型。第二節的重點為指數基金的數學模型：首先，莊智祥**(**民**87)**利用絕對平均偏差的概念，定義新的追蹤誤差**e_2(P) **取代傳統的追蹤誤差** e_1(P)**，並建立指數基金的目標規劃模型，白惠琦**(**民** 91)**針對其對偶模型的性質及切平面法，發展一套啟發式演算法以解決問題規模太大時所遭遇的求解困難。**

3.1 投資組合的數學模型

投資組合選擇問題是選擇各項資產的最佳配置方式，來獲得較大的投資報酬及較小的投資風險。首先，Markowitz **定義報酬為個別資產之期望報酬的線性組合：**

$$r(x_1, ..., x_n) = E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i \ ,$$

其中 x_i **為第** i **項資產的配置數量，** $E(R_i)$ **表示第** i **項資產的期望報酬率。**

風險則為期望報酬的變異數：

$$\begin{aligned} s^2(x_1, ..., x_n) &= E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 s_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n} x_i x_j s_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j \ , \end{aligned}$$

其中 s_{ij} **表示資產** i **與資產** j **報酬率的共變異數，** s_i^2 **則為資產** i **的報酬率的變異數，亦可表示成** s_{ii}**。**

在給定報酬率為 r 的水準時要求風險最小的投資組合，Markowitz (1952)所提的平均變異數模型如下：

<MV 模型>

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq r M_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

參數：

s_{ij}　資產 i 與資產 j 之共變異數

r_i　資產 i 投資報酬率之期望值

r　投資所需之最小報酬率

M_0　投資總額

變數：

x_i　資產 i 之投資金額

Markowitz (1959)也使用報酬的標準差(standard deviation)作為投資組合的風險測度：

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right)\right]^2} .$$

因為風險函數 $s(x)$ 為 $s^2(x)$ 的正平方根，所以 MV 模型的最佳解並不會因風險函數不同而有任何的改變。

雖然 MV 模型為現代投資組合理論奠定了基礎，但是非線性的目標函數及二次規劃模型在實際的應用較為困難。因此，許多學者藉著定義新的風險函數來解決這個問題。

其中以 Konno 與 Yamazaki (1991)提出的絕對平均偏差---- L_1 風險函數 $w(x)$

為最佳代表：

定義 3.1 (Konno **與** Yamazaki，1991) L_1 **風險函數** $w(x)$ **定義如下：**

$$w(x)=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)\right|\right].$$

並同時提出了絕對平均偏差(MAD)**模型：**

<**MAD 模型**>

$$\min \quad w(x)=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)\right|\right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}E(R_i)x_i \geq rM_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i = M_0$$

$$0 \leq x_i \leq U_i,\quad \forall i=1,\cdots,n$$

參數：

R_i **資產** i **之投資報酬率**

r **投資者所需之最小報酬率**

M_0 **投資總額**

U_i **資產** i **投資金額之上限**

變數：

x_i **資產** i **之投資金額**

另外 Konno **等人將** MV **模型中，期望報酬的標準差**---- L_2 **風險函數** $s\,(x)$ **定義重述如下，並探討** L_1 **風險函數** $w(x)$ **與** L_2 **風險函數** $s\,(x)$ **之間的關係：**

定義 3.2 (Konno **與** Yamazaki，1991) L_2**風險函數** $s(x)$ **定義如下：**

$$s(x) = \sqrt{E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right]^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j}\ .$$

定理 3.3 (Konno **與** Yamazaki，1991) **當** $(R_1, ..., R_n)$ **呈多元常態分配時，則**

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\, s(x)\ .$$

事實上，當 $R(x_1, ..., x_n)$ **為多元常態分配時，** L_2 **風險函數** $s(x)$ **及** L_1 **風險函數** $w(x)$ **在本質上是相同的。再加上 MAD 模型可轉換成線性規劃模型且不需計算複雜的共變異矩陣，因此在實際應用上，MAD 模型較有可行性。**

倘若將 Konno **與** Yamazaki **提出的風險函數進一步改寫如下：**

$$w(x) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right|\right]$$
$$= E\left[-\min\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\} + \max\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\}\right].$$

上式，前項小於平均報酬率的部分為下方風險(downside risk)**，後項大於平均報酬率的部分為上方風險**(upside risk)**。對一般投資大眾而言，上方風險越多越好，但是報酬率低於預期要求的下方風險則越少越好。基於一般投資人對上方風險與下方風險態度的差異，** Speranza (1993)**藉著給予兩種風險各自的權重重新定義一個新的風險函數：**

定義 3.4 (Speranza，1993) **風險函數** $N(x)$ **定義如下：**

$$N(x) = E\left[-a\min\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\} + ß\max\left\{0,\ \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i)\right\}\right],$$

其中，a **與** b **為表示權重的任意數。**

Speranza (1993)在論文中討論了風險函數 $N(x)$ 與 L_1 風險函數 $w(x)$ 間的關聯：

定理 3.5 (Speranza，1993) 當 $(R_1, ..., R_n)$ 呈多重變異常態分配時，則

$$N(X) = \frac{a+b}{2} w(x).$$

由上述定理得知，當 $a = b = 1$ 時，$N(X) = w(x)$。換言之，令 $a = b = 1$ 時，Speranza (1993)的模型等於 Konno 與 Yamazaki (1991)的 MAD 模型。

Feinstein 與 Thapa (1993)引進偏差變數，將 MAD 模型之目標函數的絕對值函數改寫，提高求解之效率。改寫後之模型如下：

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} (v_t + u_t)$$

$$\text{s.t.} \quad v_t - u_t - \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i) x_i = 0, \ \forall t = 1, \cdots, T \qquad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq r M_0 \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0 \qquad (3.3)$$

$$0 \leq x_i \leq U_i, \ \forall i = 1, \cdots, n \qquad (3.4)$$

$$v_t \geq 0, \ u_t \geq 0, \ \forall t = 1, \cdots, T$$

其中，$r_i = E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{it}$.

參數：

R_i 資產 i 之投資報酬率，為一隨機變數

r_{it} 資產 i 在時間 t 之投資報酬率，為一參數

r 投資者所需之最小報酬率

M_0 投資總額

U_i 資產 i 投資金額之上限

變數：

x_i　資產 i 之投資金額

v_t　正偏差變數

u_t　負偏差變數

Cooper、Lelas、與 Sueyoshi (1997)將 Feinstein 與 Thapa (1993)的目標規劃模型轉換成對偶模型如下：

$$\max \quad (j\, r + y\,)M_0 - \sum_{i=1}^{n} d_i U_i$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{t=1}^{T} l_t a_{it} + j\, r_i + y\; - d_i \le 0,\ \ \forall i = 1,\cdots,n$$

$$\left| l_t \right| \le 1,\ \ \forall t = 1,\cdots,T$$

$$d_i \ge 0,\ \ \forall i = 1,\cdots,n$$

$?_t$ 不限正負值, $\forall t = 1,\cdots,T$

$$j \ge 0$$

其中，$a_{it} = r_{it} - r_i$.

參數：

r　投資者所需之最小報酬率

M_0　投資總額

U_i　資產 i 投資金額之上限

變數：

l_t　限制式(3.1)之對偶乘子(dual multiplier)

j　限制式(3.2)之對偶乘子

y　限制式(3.3)之對偶乘子

d_i　限制式(3.4)之對偶乘子

經由探討對偶模型，Cooper 等人解釋每個對偶變數所代表的實質意義，並透過對偶變數研究參數變動對風險及報酬所產生的影響，即所謂的敏感度分析。

Mansini 與 Speranza (1999)在投資組合選擇問題中加入最小交易量的限制，

因此決策變數設為整數，即最小交易量之整數倍。此模型為一 MILP 之模型，且目標函數只考慮下方風險。因此，具有最小交易量限制之投資組合選擇問題的混合型整數線性規劃模型如下所述：

$$\min \quad \frac{\sum_{t=1}^{T} u_t}{T}$$

$$\text{s.t.} \quad u_t + \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i) c_i x_i \geq 0, \quad \forall t = 1, \cdots, T$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i c_i x_i \geq r M_0$$

$$C_0 \leq M_0 \leq C_1$$

$$0 \leq x_i \leq U_i, \quad x_i \in Z^+, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$u_t \geq 0, \quad \forall t = 1, \cdots, T$$

其中，$r_i = E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{it}$.

參數：

r_{it} 資產 i 在時間 t 之投資報酬率，為一參數

c_i 資產 i 最小交易量之購買價格

M_0 投資總額

r 投資者所需之最小報酬率

C_0 投資總額之下限

C_1 投資總額之上限

U_i 資產 i 批量之上限

變數：

x_i 資產 i 最小交易量之批量(亦即最小交易量之整數倍)

u_t 負偏差變數

由於此模型為一 MILP 模型，求解較為困難。問題規模太大時無法於合理時間內求得最佳解，因此 Mansini 與 Speranza 放鬆模型的零一變數再利用下降成本(reduced cost)的觀念，發展出啟發式演算法以求此模型之近似解。

3.2 指數基金的數學模型

Rudd (1980)考慮與市場一致的風險水準, 提出一個二次規劃的最佳化模型來建構指數基金。其模型略述如下：

$$\min \quad w_P^2$$

$$\text{s.t.} \quad b_P = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$$

$$u_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

參數：

w_P^2　投資組合殘差變異數

b_i　資產 i 之 b 值

b_P　投資組合之 b 值，為各資產 b 值之加權總合

變數：

u_i　指數基金投資在資產 i 的比例

一旦選定了標的指數, 架構指數基金的目標即是使投資組合的績效表現和市場指數之間的差距越小越好。指數基金是以追蹤誤差來代表追蹤效果的測度。傳統的追蹤誤差定義如下：

定義 3.6 (Meade 與 Salkin，1989) 追蹤誤差 $e_1 : R^n \to R$ 是測量投資組合 P 的績效與市場指數差距的一種函數。令 R_t^I 和 R_t^V 分別代表市場指數和投資組合在第 t 期的報酬率，則傳統追蹤誤差之定義為：

$$e_1(\mathrm{P}) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} (R_t^V - R_t^I)^2},$$

其中 $R_t^I = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$, $R_t^V = \dfrac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$, I_t 和 V_t 分別代表市場指數和投資組合在第 t 期的價值。

莊智祥(民 87)**模擬** Konno **與** Yamazaki (1991)**在 MAD 模型中以絕對偏差作為風險函數的概念，將之應用在追蹤誤差的定義上。**

定義 3.7 (**莊智祥，民** 87) **令** $p_{it} \in R$ **，** $x_i \in N \bigcup \{0\}$ **，** p_{it} **和** x_i **分別表示股票** i **在** t **時間的價格及股票** i **的購買數量。則追蹤誤差為：**

$$e_2(\mathrm{P}) = \sum_{t=1}^{T} \left| V_t - I_t \right| = \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i - I_t \right| .$$

定義 3.7 **將追蹤誤差** $e_2(\mathrm{P})$ **表示為投資組合之價格和市場指數之價格的絕對偏差，好處是可將非線性函數轉換成線性函數來處理。不過，不論是使用何種追蹤誤差，在指數基金的建構中，最主要的目的就是使追蹤誤差越小越好。**

定理 3.8 (**莊智祥，民** 87)**對任一投資組合** P **是指數基金建構模型中之一可行解** (*feasible solution*)**，且** $e_2(\mathrm{P}) \le d$ **，** $d \in R^+$ **，則**

$$e_1(\mathrm{P}) \le K e_2(\mathrm{P}),$$

其中 $K = \dfrac{I_{max}}{I_{min}^2}$, $I_{max} = \max\limits_{1 \le t \le T} \{I_t\}$, $I_{min} = \min\limits_{1 \le t \le T} \{I_t, V_t\}$.

莊智祥(民 87)**使用最佳化法來建構指數基金的數學模型，其目標函數是最小化追蹤誤差。由於股票** i **的購買數量為一正整數或** 0**，而** y_i **為決定該檔股票購買與否的零一變數，因此建構出一個整數規劃的問題。此模型描述如下：**

<P 模型>

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i - I_t \right|$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0$$

$$x_i \le M_i y_i, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$x_i \in Z^+ \bigcup \{0\}, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

參數：

p_{it}　　**股票** i **在時間** t **的股票價格**

I_t　　**市場指數在時間** t **的價值**

N_0　　**指數基金投資組合所選取公司家數之上限**

M_i　　**表一正數，即** $M_i = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}} \times w_i$ **，** w_i **為股票** i **之資本額權重**

變數：

x_i　　**股票** i **的購買數量**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

Feinstein **與** Thapa (1993)**將 MAD 模型轉換成目標規劃模型，因此莊智祥(民** 87)**也依此法引進正、負偏差變數** d_t^+ **及** d_t^- **，將上述之 P 模型轉換成目標規劃模型 G 模型如下：**

<**G 模型**>

$$\min \quad Z = \sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it}x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t, \quad \forall t = 1, \cdots, T$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0$$

$$x_i \le M_i y_i, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$x_i \in Z^+ \cup \{0\}, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$d_t^+ \ge 0, \quad d_t^- \ge 0, \quad \forall t = 1, \cdots, T$$

其中 $d_t^+ = \sum_{i=1}^n p_{it}x_i - I_t \ge 0$, $-d_t^- = \sum_{i=1}^n p_{it}x_i - I_t \le 0$, d_t^+ **、** d_t^- **分別表示在時間** t **指數基金投資組合的價值和市場指數的價值之間的正、負偏差。**

此模型亦為一 MILP **之模型，當問題規模太大時同樣遭遇到無法於合理時間**

內求得最佳解的困難。白惠琦(民 91)假設已知一組 y_i 解，將 G 模型改寫成下列之 F 模型：

<F 模型>

$$\min \quad Z=\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it}x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t\,,\ \ \forall t=1,\cdots,T \qquad (3.5)$$

$$x_i \le M_i\,,\ \ \forall i\in N_1 \qquad (3.6)$$

$$x_i \in Z^+ \cup \{0\}\,,\ \ \forall i\in N_1$$

$$d_t^+ \ge 0\,,\ \ d_t^- \ge 0\,,\ \ \forall t=1,\cdots,T$$

其中 $N_1=\{i\,|\,y_i, i=1,...,n\}\subseteq N$ **。**

令 l_t **及** d_t **分別為對應限制式**(3.5)**及**(3.6)**的對偶乘子，F 模型的對偶模型 D 模型如下：**

<D 模型>

$$\max \quad W=\sum_{t=1}^{T} I_t\, l_t - \sum_{i=1}^{n} M_i d_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^{T} p_{it}\, l_t - d_i \le 0\,,\ \ \forall i\in N_1$$

$$|l_t| \le 1\,,\ \ \forall t=1,\cdots,T$$

l_t **不限正負值**, $\forall t=1,\cdots,T$

$$d_t \ge 0\,,\ \ \forall i\in N_1$$

白惠琦(民 91) 應用切面法(cutting plane method)**，將 MILP 問題的變數全部放鬆，利用所求得的合理不等式縮小其 LP 鬆弛問題的可行解區域，以提高求解的速度。之後，根據模型的對偶性質發展出的啟發式演算法將鬆弛解調整為合理的整數解。**