第四章 調整指數基金的數學模型與演算法

通常已建立的投資組合經過一段時間後，可能已經不再滿足原先建構時的各種限制條件，這時管理者就面臨投資組合的調整問題。本章首先介紹 Konno 與 Yamamoto (2003)考慮交易成本最小的投資組合調整問題，架構出一個全新的數學規劃模型。Konno 等人使用絕對偏差作為風險測度，在交易成本為凹函數時，利用枝界法求解。第二節融合建構指數基金的方法及 Konno 與 Yamamoto (2003)最小化交易成本的概念，考慮一段時間後，根據所獲得的新資料與新數據使用目標規劃，產生一個調整建議，根據此調整建議調整指數基金的配置，使所產生的交易成本為最小的規劃模型。

4.1 調整投資組合的數學模型

管理者使用 MAD 模型建立投資組合之後，當其投資組合經過一段時間不再滿足原來所要求的條件時，就必須進行調整投資組合的工作。我們再介紹一次第三章所提到的 MAD 模型，模型敘述如下：

<MAD 模型>

$$\min \quad w(x) = E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right)\right|\right\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i \geq r M_0 \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0 \tag{4.2}$$

$$0 \leq x_i \leq U_i, \quad \forall i = 1, \cdots, n \tag{4.3}$$

參數：

R_i 資產 i 之投資報酬率

r 投資者所需之最小報酬率

M_0 投資總額

U_i 資產 i 投資金額之上限

變數：

x_i 資產 i 之投資金額

解這個數學模型，令 $w^0 = \min w(x)$，此時所對應的投資組合為 $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$。假設 k_i^+、k_i^- 分別為每單位資產 i 買進、賣出的交易成本，投資組合從 x^0 調整至 x 所需的交易成本 $C(x - x^0)$ 可以寫成以下的型態：

$$C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_+ + \sum_{i=1}^{n} k_i^- \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_- ,$$

其中

$$\left| x \right|_+ = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$\left| x \right|_- = \begin{cases} 0 & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{otherwise} \end{cases} .$$

調整後的新投資組合 x 仍應滿足條件(4.1)、(4.2)、與(4.3)，所以考慮交易成本最小且滿足 x 的風險值不大於 x^0 的風險值，所建購的數學模型如下(Konno 與 Yamamoto，2003)：

<R-MAD 模型>

$$\min \quad C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_+ + \sum_{i=1}^{n} k_i^- \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_-$$

$$\text{s.t.} \quad w(x) = E\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i) \right| \right\} \leq w^0 \cdot (1 + d)$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i \geq r M_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0$$

$$0 \leq x_i \leq U_i \,, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$k_i^+, k_i^- \geq 0 \,, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

參數：

k_i^+ **買進每單位資產** i **的交易成本**

k_i^- **賣出每單位資產** i **的交易成本**

x_i^0 **原投資組合中，資產** i **的投資金額**

w^0 **原投資組合所具有的風險函數值**

d **投資者所能容忍的風險程度**

R_i **資產** i **之投資報酬率**

r **投資者所需之最小報酬率**

M_0 **投資總額**

U_i **資產** i **投資金額之上限**

變數：

x_i **資產** i **之投資金額**

倘若考慮交易成本為分段線性的凹函數，換言之，$\tilde{k}_i^+(\cdot)$**、**$\tilde{k}_i^-(\cdot)$ **分別為資產** i **買進、賣出的交易成本，則目標函數為：**

$$C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{k}_i^+ (\left| x_i - x_i^0 \right|_+) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{k}_i^- (\left| x_i - x_i^0 \right|_-) \,,$$

此時可用枝界法求解(Konno **與** Yamamoto，2003)。

4.2 調整指數基金的數學模型

建立追蹤指數 I_t， $t=1,\cdots,T$ **的基金，並且限制組成指數基金的資產至多為** N_0**，以絕對值誤差總合最小為選取標準的數學模型如下：**

<G 模型>

$$\min \quad Z=\sum_{t=1}^{T}(d_t^{+}+d_t^{-})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it}x_i+d_t^{-}-d_t^{+}=I_t,\ \ \forall t=1,\cdots,T \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0 \tag{4.5}$$

$$x_i \le M_i y_i,\ \ \forall i=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

$$x_i \in Z^{+}\cup\{0\},\ \ y_i\in\{0,1\},\ \ \forall i=1,\cdots,n \tag{4.7}$$

$$d_t^{+},d_t^{-}\ge 0,\ \ \forall t=1,\cdots,T \tag{4.8}$$

參數：

d_t^{+} **指數基金之價值在時間** t **和市場指數價值間的正偏差**

d_t^{-} **指數基金之價值在時間** t **和市場指數價值間的負偏差**

p_{it} **股票** i **在時間** t **的股票價格**

I_t **市場指數在時間** t **的價值**

N_0 **指數基金所選取公司家數之上限**

M_i **表一正數，即** $M_i=\dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}}\times w_i$ **，** w_i **為股票** i **之資本額權重**

變數：

x_i **股票** i **的購買數量**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

首先令解 G 模型所得的最小追蹤誤差為Z^0，即 $Z^0 = \min\ Z$，此時所建立的指數基金為 $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$。同樣地，假設 k_i^+、k_i^- 分別為資產 i 每單位買進、賣出的交易成本，考慮以投資組合從x^0調整至 x 所需的交易成本$C(x - x^0)$：

$$C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_+ + \sum_{i=1}^{n} k_i^- \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_- ,$$

調整後的新投資組合 x 仍應滿足條件(4.4)、(4.5)、(4.6)、(4.7)與(4.8)，所以考慮交易成本最小且滿足 x 的追蹤誤差值不大於 x^0 的追蹤誤差值。由於「x 的追蹤誤差值不大於x^0的追蹤誤差值」此一條件可能造成模型沒有可行解，因此我們考慮投資者對追蹤誤差的容忍程度d 。此時建購指數基金調整問題的數學模型如下：

$$\begin{aligned}
\min \quad & C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_+ + \sum_{i=1}^{n} k_i^- \cdot \left| x_i - x_i^0 \right|_- \\
\text{s.t.} \quad & Z = \sum_{t=1}^{T} (d_t^+ + d_t^-) \le Z^0 \cdot (1 + d) \\
& \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t , \quad \forall t = 1, \cdots, T \\
& \sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0 \\
& x_i \le M_i y_i , \quad \forall i = 1, \cdots, n \\
& x_i \in Z^+ \cup \{0\} , \quad y_i \in \{0,1\} , \quad \forall i = 1, \cdots, n \\
& d_t^+, d_t^- \ge 0 , \quad \forall t = 1, \cdots, T
\end{aligned}$$

參數：

k_i^+ 　買進每單位股票 i 的交易成本

k_i^-　**賣出每單位股票 i 的交易成本**

x_i^0　**原投資組合中，股票 i 的投資金額**

Z^0　**原指數基金投資組合所具有的追蹤誤差值**

d　**投資者所能容忍的誤差程度，** $d = \dfrac{Z - Z^0}{Z^0}$

d_t^+　**指數基金投資組合之價值在時間 t 和市場指數價值間的正偏差**

d_t^-　**指數基金投資組合之價值在時間 t 和市場指數價值間的負偏差**

p_{it}　**股票 i 在時間 t 的股票價格**

I_t　**市場指數在時間 t 的價值**

N_0　**指數基金投資組合所選取公司家數之上限**

M_i　**表一正數，即** $M_i = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{it}\}} \times w_i$ **，** w_i **為股票 i 之資本額權重**

變數：

x_i　**股票 i 的購買數量**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由於此模型的目標函數不是線性函數，所以我們引進一組變數 u_i**、**v_i **使得**

$$x - x_i = u_i - v_i,\ \ u_i, v_i \geq 0,\ \ u_i v_i = 0\ .$$

其中，互補限制式(complementarity constraints) $u_i v_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ **可以消去，得到下述** MILP **模型：**

<R-G 模型>

$$\min \qquad C(x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} k_i^+ u_i + \sum_{i=1}^{n} k_i^- v_i$$

$$\text{s.t.} \qquad Z = \sum_{t=1}^{T} (d_t^+ + d_t^-) \leq Z^0 \cdot (1 + d)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i + d_t^- - d_t^+ = I_t \,,\quad \forall t = 1, \cdots, T$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le N_0$$

$$x_i \le M_i y_i \,,\quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$x_i - x_i^0 = u_i - v_i$$

$$x_i \in Z^+ \cup \{0\} \,,\quad y_i \in \{0,1\} \,,\quad \forall i = 1, \cdots, n$$

$$d_t^+, d_t^- \ge 0 \,,\quad \forall t = 1, \cdots, T$$

$$u_i, v_i \ge 0 \,,\quad \forall i = 1, \cdots, n$$

參數：

k_i^+	**買進每單位股票 i 的交易成本**
k_i^-	**賣出每單位股票 i 的交易成本**
x_i^0	**原投資組合中，股票 i 的投資金額**
Z^0	**原指數基金投資組合所具有的追蹤誤差值**
d	**投資者所能容忍的誤差程度**
d_t^+	**指數基金投資組合之價值在時間 t 和市場指數價值間的正偏差**
d_t^-	**指數基金投資組合之價值在時間 t 和市場指數價值間的負偏差**
p_{it}	**股票 i 在時間 t 的股票價格**
I_t	**市場指數在時間 t 的價值**
N_0	**指數基金投資組合所選取公司家數之上限**
M_i	**表一正數，即** $M_i = \dfrac{\max_t \{I_t\}}{\min_t \{p_{it}\}} \times w_i$ **，** w_i **為股票 i 之資本額權重**

變數：

x_i	**股票 i 的購買數量**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \textbf{當 } x_i > 0 \\ 0 & \textbf{其他} \end{cases}$$

R-G 模型含有二元變數及整數變數，是一個 MILP 模型，因此我們將於第三節發展啟發式演算法來求解，並於第五章提出實證的結果與分析。

4.3 演算法

由於當模型規模較大時，MILP 問題的難度較高，不容易於合理時間內求得問題的最佳解。因此，我們針對混合型整數線性規劃的 R-G 模型發展啟發式演算法，主要分成以下兩個步驟：

1.解局部放鬆之 MILP 模型。(即放鬆 x_i 為非負實數變數，y_i 仍為 0-1 變數。)

2.調整實數解 x_i^R，使其逼近最佳整數解。

上述步驟所求得的近似解仍必須是滿足原限制式的可行解。現將啟發式演算法的步驟條列於下：

步驟 1　解局部放鬆之 MILP 模型：

將每個非負整數變數 x_i 放鬆為非負實數變數，y_i 仍為 0-1 變數。解 **R-G** 模型得到最佳實數解 x_i^R。

步驟 2　$x_i^R = \lfloor x_i^R \rfloor + f_i$，其中 $\lfloor x_i^R \rfloor$ 表示小於或等於 x_i^R 的最大整數，且 $0 \le f_i < 1$，$\forall i = 1, \cdots, n$。令 $CS = 0$、$TS = \sum_{i=1}^{n} AP_i \cdot f_i$、及 $x_i^H = \lfloor x_i^R \rfloor$。

其中 AP_i 表股票 i 的平均股價。

步驟 3　假如 $(CS + AP_i) \le TS$ 且 $x_i^R > 0$，則 $x_i^H \leftarrow x_i^H + 1$ 且 $CS \leftarrow CS + AP_i$，$\forall i = 1, \cdots, n$；否則，$x_i^H \leftarrow x_i^H$。

步驟 4　令 $RS = TS - CS$，取 k 使得 $AP_k = \min_{i \in N'} \{AP_i\}$，其中 $N' \in \{i \mid x_i^R > 0\}$。假如 $RS \ge AP_k$，則回到步驟 3；否則，結束。

此啟發式演算法求得 **R-G** 模型局部鬆弛的實數解 x_i^R 後，將其分成整數及小數兩部分。整數部分令為起始整數解 x_i^H，小數部分造成的誤差總合 TS 即為平均誤差。我們針對 $x_i^H > 0$ 的數進行調整工作，直到平均誤差達到最小。如此便可得到一組合理整數解 x_i^H。