Abstract

In this thesis, we analyze the single server queueing system $C_k/C_m/1$. We construct a general solution space of the vector for stationary probability and describe the solution space in terms of singularities and vectors of the fundamental matrix polynomial $\mathbf{Q}(\omega)$. There is a relation between the singularities of $\mathbf{Q}(\omega)$ and the roots of the characteristic polynomial involving the Laplace transforms of the interarrival and service times distributions. In the $E_k/E_m/1$ queueing system, it is proved that the roots of the characteristic polynomial are distinct if the arrival and service rates are real. When multiple roots occur, one needs to solve a set of equations of matrix polynomials. As a result, we establish a procedure for describing those vectors used in the expression of saturated probability as linear combination of Kronecker products.

中文摘要

在這一篇論文中，我們討論$C_k/C_m/1$的等候系統。我們利用矩陣多項式的奇異點及向量造$C_k/C_m/1$的機率分配的解空間。而矩陣多項式的非零奇異點和一個由抵達間隔時間與服務時間所形成的方程式有密切的關係。我們證明了在$E_k/E_m/1$的等候系統中，方程式的所有根都是相異的。但是當方程式有重根時，我們必須解一組相當複雜的方程式才能得到構成解空間的向量。此外，我們建立了一個描述飽和機率為Kronecker products線性組合的演算方法。

論文結構

為了找解空間，我們發現滿足非邊界方程式的所有解空間可用$\mathbf{Q}(\omega)$這個矩陣多項式裡的奇異點及left Jordan chain裡的向量表示。此外，$\mathbf{Q}(\omega)$的非零奇異點又可藉由一個以x為變數的方程式的根表示。這樣一來，就不用解$\mathbf{Q}(\omega)$這個複雜的式子，以解x的方程式取代。我們知道在$\rho < 1$時，x的方程式恰有m個實部是正的根，這些x會對應到$\mathbf{Q}(\omega)$在單位圓裡(不含邊界)的根。另外，已知$\mathbf{Q}(\omega)$在單位圓裡(不含邊界)恰有mk個根，且'0'根的部分至少佔了$mk-m$個，於是可以推得$\mathbf{Q}(\omega)$在單位圓裡(不含邊界)至多有m個非零根。只是，我們還無法知道x的重根數和其所對應的ω的重根數的關係。但是如果可以找到m個$\mathbf{Q}(\omega)$其在所有非零的奇異點之Left Jordan chains裡的向量，那麼這些向量便可建構成解空間。按照類似的手法，當所有x方程式裡的根重根數小於4時，我們可以找到這m個向量且表示成product-forms的線性組合。我們猜測，這樣的方法對於一般的情況皆適用，這也是我們未來需要進一步努力的地方。