第三章　推廣二

考慮有n支隊伍，每隊有r名隊員，欲從這n隊中選m隊出來比賽$(0 \le m \le n)$，且選中的隊伍每隊可派s人$(0 < s \le r)$，問有多少種不同的選取方法？

[法一]：

n支隊伍選出m隊，有$\binom{n}{m}$種方法，被選取的m隊每隊r名隊員中，挑s人出來參加比賽，有$\underbrace{\binom{r}{s}\bullet\binom{r}{s}\bullet\cdots\cdots\bullet\binom{r}{s}}_{m個}=\binom{r}{s}^m$種方法，所以總共有$\binom{n}{m}\binom{r}{s}^m$種不同的選取方法。

[法二]：

將n支隊伍編號，編為第1隊、第2隊、……、第n隊，接著，每隊的r名隊員也都加以編號(1號、2號、……、r號)，以a_{ij}代表第j隊第i號隊員，如下所示：

$$\underbrace{\begin{matrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ a_{r1} \quad a_{r2} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{rn} \end{matrix}}_{\text{第一行代表第一隊1號到r號隊員，第二行代表第二隊1號到r號隊員，以此類推……，第n行代表第n隊1號到r號隊員。}} \longrightarrow \text{各隊的 1 號隊員}$$

我們將固定第一列(也就是各隊的 1 號隊員)，對於這n名 1 號隊員參加比賽的情形分別討論之：

若被選出參加比賽的隊伍中有k隊派出 1 號隊員時，相當於是從全部n位 1 號隊員裡選出k位，有$\binom{n}{k}$種，而這k支隊伍都還需從自己隊上剩下的$(r-1)$中派出$(s-1)$人，有$\underbrace{\binom{r-1}{s-1}\bullet\binom{r-1}{s-1}\bullet\cdots\cdots\bullet\binom{r-1}{s-1}}_{k\text{個}}=\binom{r-1}{s-1}^{k}$種方法，因為我們總共要選出$m$隊參加比賽，所以還要再從剩下的$(n-k)$支隊伍中選出$(m-k)$隊，有$\binom{n-k}{m-k}$種方法，而這$(m-k)$隊都不能派出隊上的 1 號隊員，只能從剩下的$(r-1)$人中派出$s$人，共有$\underbrace{\binom{r-1}{s}\bullet\binom{r-1}{s}\bullet\cdots\cdots\bullet\binom{r-1}{s}}_{(m-k)\text{個}}=\binom{r-1}{s}^{m-k}$種方法，故當被選出參加比賽的隊伍中有$k$隊派出 1 號隊員時，一共有$\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}$種不同的選取方法，其中 $0\le k\le m$。

從 n 支隊伍中選出來比賽的這 m 隊裡，可以有 0 隊、1 隊、2 隊、……、m 隊派出自己隊上的 1 號隊員，這 $(m+1)$ 種情況不可能同時發生(彼此為互斥事件)，而全部的選取方法數便是這 $(m+1)$ 種不同情況的加總，也就是：

$$\text{全部的方法數} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{r-1}{s-1}^{k} \binom{n-k}{m-k} \binom{r-1}{s}^{m-k}$$

故由[法一]及[法二]我們可以推導出：

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{r-1}{s-1}^{k} \binom{n-k}{m-k} \binom{r-1}{s}^{m-k} = \binom{n}{m} \binom{r}{s}^{m} \qquad \begin{matrix} 0 \le m \le n \\ 0 < s \le r \\ m, n, s, r \in Z \end{matrix}$$

上式在 $s=1$ 時恰好是推廣一中所導出的組合等式。