# 第四章　將$n,r$推廣到實數

以下$N$代表正整數，$R$代表實數。

我們知道在$n$，$r\in N$，$n\geq r>0$時有下列公式：

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

當$n$未必屬於$N$時，我們使用後者當定義，也就是：

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\qquad \text{定義：}\binom{n}{0}=1$$

由推廣二，我們已知：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m}\qquad \begin{matrix}0\leq m\leq n\\ 0<s\leq r\\ m,n,s,r\in Z\end{matrix}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

利用上面的定義，我們將證明即使$n,r\in R$，$(1)$式依然是成立的。

我們先證明下面的引理：

引理： $\binom{r}{s}=\binom{r-1}{s-1}+\binom{r-1}{s}$ $\qquad \begin{matrix} s>0, s\in Z \\ r\in R \end{matrix}$

證明：

$$\binom{r-1}{s-1}+\binom{r-1}{s}$$

$$=\frac{(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s+1)}{(s-1)!}+\frac{(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s)}{s!}$$

$$=\frac{s}{s}\bullet\frac{(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s+1)}{(s-1)!}+\frac{(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s)}{s!}$$

$$=\frac{(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s+1)\left[s+(r-s)\right]}{s!}$$

$$=\frac{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots(r-s+1)}{s!}$$

$$=\binom{r}{s}$$

[證一]：代數證明

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\binom{r-1}{s-1}^{k}\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-m+1)}{(m-k)!}\binom{r-1}{s}^{m-k}$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]$$

$$=\binom{n}{m}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]$$

$$=\binom{n}{m}\left[\left(\binom{r-1}{s-1}+\binom{r-1}{s}\right)^{m}\right]$$

$$=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m}$$

從上面的[證一]及引理，的確可看出就算$n,r\in R$，$(1)$式還是成立的。

於是我們可以把$(1)$式改為：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m}\qquad\begin{matrix}m\ge 0,s>0\\ m,s\in Z\\ n,r\in R\end{matrix}$$

[證二]：

我們以變數$x$取代$n$，用方程式的方法證明$n$可為實數。

設 $$f(x)=\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{x-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{x}{m}\binom{r}{s}^{m}=0\qquad\begin{matrix}m\ge 0\\ 0<s\le r\\ m,s,r\in Z\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{x-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{x}{m}\binom{r}{s}^{m}=0$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}\binom{r-1}{s-1}^{k}\frac{(x-k)(x-k-1)\cdots(x-m+1)}{(m-k)!}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]$$

$$-\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}\binom{r}{s}^{m}=0$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{k!(m-k)!}\right]-\binom{r}{s}^{m}\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}=0\cdots\cdots(2)$$

化簡至此可看出$(2)$式是一個$x$最高次為$m$次的方程式

$\Rightarrow$ 此方程式最多有$m$個根

但我們再看一下$(1)$式：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m} \qquad \begin{matrix} 0\le m\le n \\ 0<s\le r \\ m,n,s,r\in Z \end{matrix} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$\Rightarrow$ 只要$n\ge m$且$n\in Z$，這樣的$n$皆能滿足$(1)$式

也就是說在$(2)$式中我們能夠找到無限多個正整數解

$\Rightarrow$ $(2)$式等號的左邊必為零多項式

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{x-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{x}{m}\binom{r}{s}^{m}\equiv 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{x-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}\equiv\binom{x}{m}\binom{r}{s}^{m} \qquad \begin{matrix} m\ge 0 \\ 0<s\le r \text{ ， } x\in R \\ m,s,r\in Z \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m} \qquad \begin{matrix} m\ge 0 \\ 0<s\le r \text{ ， } n\in R \\ m,s,r\in Z \end{matrix}$$

接著我們用變數 $y$ 取代 $r$，證明 $r$ 也可為實數。

設 $f(y)=\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{y-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{y-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{n}{m}\binom{y}{s}^{m}=0$ $\quad \begin{matrix} m\ge 0, s>0 \\ m,s\in Z \\ n\in R \end{matrix}$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{y-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{y-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{n}{m}\binom{y}{s}^{m}=0$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-s+1)}{(s-1)!}\right)^{k}\binom{n-k}{m-k}\left(\frac{(y-1)(y-2)\cdots(y-s)}{s!}\right)^{m-k}\right]$$

$$-\binom{n}{m}\left(\frac{y(y-1)\cdots(y-s+1)}{s!}\right)^{m}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

觀察上式中括號的部份：$\left(y^{s-1}\right)^{k}\bullet\left(y^{s}\right)^{m-k}=y^{sk-k}\bullet y^{sm-sk}=y^{sm-k}$

當 $k=0$ 時，可看出 $y$ 的最高次項為 $y^{sm}$

再來觀察 $\left(\frac{y(y-1)\cdots(y-s+1)}{s!}\right)^{m}$ 的部份：

很容易可看出 $y$ 的最高次項為 $\left(y^{s}\right)^{m}=y^{sm}$

所以 $(3)$ 式是一個 $y$ 最高次為 $sm$ 次的方程式 $\Rightarrow$ 最多有 $sm$ 個根

同樣的由 $(1)$ 式知，只要 $y\ge s, y\in Z$，這樣的 $y$ 都可滿足 $(1)$ 式

$\Rightarrow$ $(3)$ 式我們可以找到無限多個正整數解

$\Rightarrow$ $(3)$ 式等號左邊必為零多項式

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{y-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{y-1}{s}^{m-k}\right]-\binom{n}{m}\binom{y}{s}^{m}\equiv 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{y-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{y-1}{s}^{m-k}\equiv\binom{n}{m}\binom{y}{s}^{m} \qquad \begin{array}{c} m\geq 0, s>0 \\ m,s\in Z \quad , \quad y\in R \\ n\in R \end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{r-1}{s-1}^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{r-1}{s}^{m-k}=\binom{n}{m}\binom{r}{s}^{m} \qquad \begin{array}{c} m\geq 0, s>0 \\ m,s\in Z \\ n,r\in R \end{array}$$