第六章
「圓上不相交之弦」與「正規中括號」的對應關係

在這一章裏，我們一樣想用**對射函數**探討「**圓上不相交之弦**」與「**正規中括號**」之間的對應關係。

(I) 對射函數的建立（見〔4〕*P*.5）

設 S 為圓上有 $2n$ 個點連接成**不相交弦**所形成的集合；

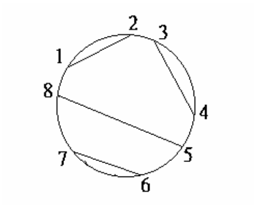
B 為有 n 組**正規中括號**所形成的集合

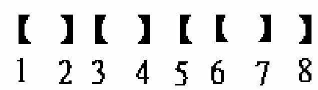
定義對應函數f：$S \to B$，依據下列步驟來建構 $B = f(S)$

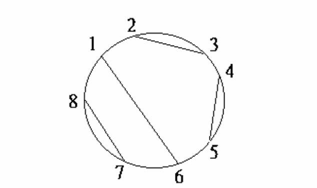
① 將圓上的 $2n$ 個點，依順時鐘方向依序標為 1，2，…，$2n$，且每一個編號對應到一個**中括號**。

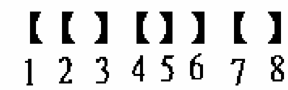
② 由編號 1 開始連接成**弦**，若編號 i 與編號 j 相連（$i<j$），則 i 對應到一個“左**正規中括號【**”，而 j 對應到一個“右**正規中括號】**”。

③ 將編號由 1 到 $2n$ 所對應到的**正規中括號**，依序排成一列。

例如：

對應到 



對應到 

(II) f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數

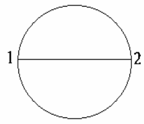
我們將證明所定義的函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）。

(i) f 是 1 對 1 函數：即若 S 集合中有二個元素 $\bar{s}_n$、$\hat{s}_n$，使得 $f(\bar{s}_n) = f(\hat{s}_n) = \bar{b}_n$，則 $\bar{s}_n = \hat{s}_n$ 恆成立，其中 $\bar{b}_n$ 表示有 n 組**正規中括號**。

(ii) f是映成（*onto*）函數：即對於集合B中任意一個元素 $\bar{b}_n$，在集合S中皆存在一個元素 $\bar{s}_n$ 具有n條**不相交之弦**，使得$f(\bar{s}_n) = \bar{b}_n$

我們對b_n的組數n做歸納法：

（1）n＝1 時，

集合 B 中只有一個元素 $\bar{b}_1$ =【 】，又 S 集合中也只有唯一元素 $\bar{s}_1$ = 

，

根據函數 f 的定義知道 $f(\bar{s}_1)=\bar{b}_1$ ，

所以函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

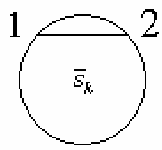
（2）假設 n＝1，2，…，k 時，函數 f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。

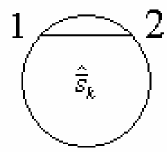
（3）當 $n=k+1$ 時，

考慮與編號 1 連成弦之編號 $2l$ 所對應到的“右正規中括號】”之位置 l，

其位置是針對“所有右正規中括號】 ”由小而大給予編號 1 到 $k+1$。

① 若 $l=1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}$ =【 $\underset{1}{】}$$\bar{b}_k$ ，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 n 組正規中括號。

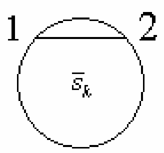
(i) 已知 $\bar{b}_{k+1}=f(\bar{s}_{k+1})=f(\hat{\bar{s}}_{k+1})$，且 $\bar{s}_{k+1}$ = 

，$\hat{\bar{s}}_{k+1}$ = 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{s}_k)=\bar{b}_k=f(\hat{\bar{s}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道 $\bar{s}_k=\hat{\bar{s}}_k$ ，

故得證 $\bar{s}_{k+1}=\hat{\bar{s}}_{k+1}$ ，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{s}_k$ 、$\hat{\bar{s}}_k$ 為圓上各有 k 條不相交之弦。

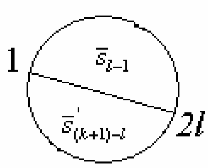
(ii) 由（2）之歸納假設知道，存在元素 $\bar{s}_k$ 具有 k 條不相交之弦，使得 $f(\bar{s}_k)=\bar{b}_k$ ，

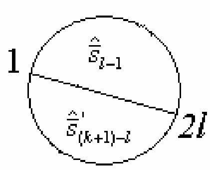
令 $\bar{s}_{k+1}$ = 

，則 $\bar{s}_{k+1}$ 為圓上有 $k+1$ 條不相交之弦，且 $f(\bar{s}_{k+1})=\bar{b}_{k+1}$ 。

即得證函數 f 是映成（*onto*）函數。

② 若 $2\le l\le k$ 時，即 $\bar{b}_{k+1}$ =【 $\bar{b}_{l-1}$ 】$\bar{b}_{(k+1)-l}$ ，其中 $\bar{b}_j$ 表示有 j 組正規中括號。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1}=f(\bar{s}_{k+1})=f(\hat{\bar{s}}_{k+1})$，且 $\bar{s}_{k+1}$ = 

，$\hat{\bar{s}}_{k+1}$ = 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{s}_{l-1})=\bar{b}_{l-1}=f(\hat{\bar{s}}_{l-1})$ 且 $f(\bar{s}'_{(k+1)-l})=\bar{b}_{(k+1)-l}=f(\hat{\bar{s}}'_{(k+1)-l})$

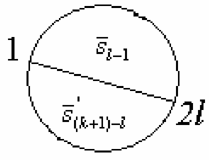
$\because$ $1\le l-1\le k-1$，且 $1\le k+1-l\le k-1$， $\therefore$ 由（2）之歸納假設知道：

$\bar{s}_{l-1}=\hat{\bar{s}}_{l-1}$，且 $\bar{s}'_{(k+1)-l}=\hat{\bar{s}}'_{(k+1)-l}$，故得證 $\bar{s}_{k+1}=\hat{\bar{s}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，

其中 $\bar{s}_j$ 、$\bar{s}'_j$ 、$\hat{\bar{s}}_j$ 、$\hat{\bar{s}}'_j$ 表示圓上各有 j 條不相交之弦。

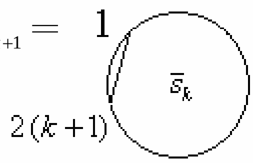
(ii) $\because$ $1 \le l-1 \le k-1$，且 $1 \le k+1-l \le k-1$，$\therefore$由（2）之歸納假設知道，

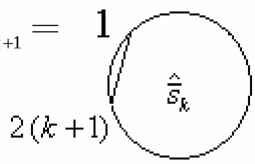
存在元素 $\bar{s}_{l-1}$，使得 $f(\bar{s}_{l-1}) = \bar{b}_{l-1}$，及存在元素 $\bar{s}'_{(k+1)-l}$，使得 $f(\bar{s}'_{(k+1)-l}) = \bar{b}_{(k+1)-l}$。

令 $\bar{s}_{k+1} =$ 

，則 $\bar{s}_{k+1}$ 爲圓上有 $k+1$ 條**不相交之弦**，且 $f(\bar{s}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$。即得證函數 f 是映成（*onto*）函數。

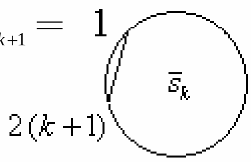
③ 若 $l = k+1$ 時，即 $\bar{b}_{k+1} =$【$\bar{b}_k$】，其中 $\bar{b}_k$ 表示有 k 組**正規中括號**。

(i) 已知 $\bar{b}_{k+1} = f(\bar{s}_{k+1}) = f(\hat{\bar{s}}_{k+1})$，且 $s_{k+1} =$ 

，$\hat{s}_{k+1} =$ 

則由函數 f 之定義知 $f(\bar{s}_k) = \bar{b}_k = f(\hat{\bar{s}}_k)$，又由（2）之歸納假設知道 $\bar{s}_k = \hat{\bar{s}}_k$，故得證 $s_{k+1} = \hat{\bar{s}}_{k+1}$，即證明了函數 f 是 1 對 1 函數，其中 $\bar{s}_k$ 與 $\hat{\bar{s}}_k$ 表示圓上各有 k 條**不相交之弦**。

(ii) 由（2）之歸納假設知道，存在元素 $\bar{s}_k$ 具有 k 條**不相交之弦**，使得 $f(\bar{s}_k) = \bar{b}_k$，

令 $\bar{s}_{k+1} =$ 

，則 $\bar{s}_{k+1}$ 爲圓上有 $k+1$ 條**不相交之弦**，且 $f(\bar{s}_{k+1}) = \bar{b}_{k+1}$。即得證函數 f 是映成（*onto*）函數。

由以上之證明可知：f 是 1 對 1 且映成（*onto*）函數。